PAINVIN

Nombre des systèmes de plans que peut représenter une équation du second degré

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 10 (1871), p. 433-439

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__433_0>

NOMBRE DES SYSTÈMES DE PLANS QUE PEUT REPRÉSENTER UNE ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ ;

PAR M. PAINVIN.

1. *Quel est le nombre des* SYSTÈMES DE DEUX PLANS *que peut représenter l'équation*

$$(\mathrm{I})\quad \left\{\begin{aligned} & a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44}t^2 \\ & + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{14}xt \\ & + 2a_{23}yz + 2a_{24}yt + 2a_{34}zt = 0, \end{aligned}\right.$$

les coefficients de cette équation étant des fonctions entières du degré m par rapport à trois indéterminées α, β, γ.

Posons

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad \text{et} \quad \Delta_{rs} = \frac{d\Delta}{da_{rs}},$$

pour que l'équation (I) représente un système de deux plans distincts, il faut vérifier les *dix équations*

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{llll} \Delta_{44} = 0, & \Delta_{43} = 0, & \Delta_{42} = 0, & \Delta_{41} = 0, \\ & \Delta_{33} = 0, & \Delta_{32} = 0, & \Delta_{31} = 0, \\ & & \Delta_{22} = 0, & \Delta_{21} = 0, \\ & & & \Delta_{11} = 0; \end{array}\right.$$

ces dix équations équivalent à trois relations distinctes, mais toutes néanmoins doivent être vérifiées.

2. Considérons d'abord les deux équations

$$\Delta_{44} = 0, \quad \Delta_{43} = 0,$$

lesquelles peuvent s'écrire

$$(2)\qquad \begin{cases} \Delta_{44} = a_{13}\,\mathrm{M} + a_{23}\,\mathrm{N} + a_{33}\,\mathrm{P} = 0, \\ \Delta_{43} = a_{14}\,\mathrm{M} + a_{24}\,\mathrm{N} + a_{34}\,\mathrm{P} = 0, \end{cases}$$

après avoir posé

$$(3)\qquad (\Gamma)\quad \begin{cases} \mathrm{M} = a_{21}\,a_{32} - a_{22}\,a_{31}, \\ \mathrm{N} = a_{12}\,a_{31} - a_{11}\,a_{32}, \\ \mathrm{P} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2. \end{cases}$$

Regardons les indéterminées α, β, γ comme les coordonnées d'un point de l'espace; les équations (2), toutes deux du degré $3m$, représenteront une courbe de l'ordre $9m^2$. Cette courbe se compose de la courbe ($\mathrm{M} = 0$, $\mathrm{N} = 0$, $\mathrm{P} = 0$) et d'une courbe complémentaire.

Les équations $\mathrm{M} = 0$, $\mathrm{N} = 0$ définissent une courbe d'ordre $4m^2$, laquelle se compose aussi de deux courbes, l'une ($a_{31} = 0$, $a_{32} = 0$), d'ordre m^2, qui ne se trouve pas sur la surface $\mathrm{P} = 0$; et l'autre, d'ordre $3m^2$, qui appartient à la surface $\mathrm{P} = 0$, puisque l'équation $\mathrm{P} = 0$ est une conséquence des équations $\mathrm{M} = 0$, $\mathrm{N} = 0$, tant que a_{31} et a_{32} ne sont pas nuls.

Ainsi les trois équations

$$\mathrm{M} = 0, \quad \mathrm{N} = 0, \quad \mathrm{P} = 0,$$

définissent une courbe (Γ) d'ordre $3m^2$.

Par conséquent, les deux équations $\Delta_{44} = 0$, $\Delta_{43} = 0$ déterminent une courbe complexe composée :

1° D'une courbe (C) d'ordre $6m^2$;

2° D'une courbe (Γ) d'ordre $3m^2$.

Ajoutons maintenant que la courbe (C), et celle-là seulement, appartient aux quatre surfaces

$$(4)\qquad (\mathrm{C})\quad \Delta_{44} = 0, \quad \Delta_{43} = 0, \quad \Delta_{42} = 0, \quad \Delta_{41} = 0.$$

On a, en effet, les identités

$$a_{11}\Delta_{41} + a_{12}\Delta_{42} + a_{13}\Delta_{43} + a_{14}\Delta_{44} = 0,$$
$$a_{21}\Delta_{41} + a_{22}\Delta_{42} + a_{23}\Delta_{43} + a_{24}\Delta_{44} = 0,$$
$$a_{31}\Delta_{41} + a_{32}\Delta_{42} + a_{33}\Delta_{43} + a_{34}\Delta_{44} = 0.$$

Or, pour les différents points de la courbe (C) (2), ces identités se réduisent aux égalités

$$\begin{aligned} &a_{11}\Delta_{41} + a_{12}\Delta_{42} = 0, & & M\Delta_{41} = 0, \quad M\Delta_{42} = 0,\\ &a_{22}\Delta_{41} + a_{22}\Delta_{42} = 0, &\text{d'où l'on déduit}\quad & N\Delta_{41} = 0, \quad N\Delta_{42} = 0,\\ &a_{31}\Delta_{41} + \alpha_{32}\Delta_{42} = 0, & & P\Delta_{41} = 0, \quad P\Delta_{42} = 0; \end{aligned}$$

par conséquent, pour tous les points de la courbe (C) (2), on a

$$\Delta_{41} = 0, \quad \Delta_{42} = 0,$$

puisque M, N, P sont alors différents de zéro, tandis que si M, N, P sont nuls, les égalités qui précèdent sont vérifiées sans que Δ_{41} et Δ_{42} soient nuls.

Des égalités (4) il résulte évidemment

$$(5) \qquad \Delta = 0.$$

3. Maintenant prenons les points communs à la courbe (C), d'ordre $6m^2$, et à la surface $\Delta_{33} = 0$, d'ordre $3m$; le nombre de ces points sera

$$(6) \qquad N = 18m^3.$$

Eu égard à la relation bien connue

$$\Delta \frac{d^2\Delta}{da_{rs}\,da_{r_1 s_1}} = \frac{d\Delta}{da_{rs}}\,\frac{d\Delta}{da_{r_1 s_1}} - \frac{d\Delta}{da_{r s_1}}\,\frac{d\Delta}{da_{r_1 s_1}},$$

on a pour les points en question

$$\Delta_{rr}\Delta_{33} - \Delta_{r3}^2 = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \Delta_{r3} = 0,$$

puisque Δ_{33} est nul. Ainsi, en définitive, les $18m^3$ solutions (6) vérifient les *sept équations*

$$(7)\qquad \begin{cases} \Delta_{44}=0, & \Delta_{43}=0, \quad \Delta_{42}=0, \quad \Delta_{41}=0, \\ & \Delta_{33}=0, \quad \Delta_{32}=0, \quad \Delta_{31}=0. \end{cases}$$

Il nous reste à prendre, parmi ces solutions, celles qui vérifient les *trois dernières équations*

$$(8)\qquad \Delta_{22}=0, \quad \Delta_{21}=0, \quad \Delta_{11}=0.$$

Or, eu égard aux équations (7), les relations fondamentales relatives aux déterminants donnent lieu aux égalités

$$(9)\qquad \begin{cases} a_{11}\Delta_{21}+a_{12}\Delta_{22}=0, \\ a_{21}\Delta_{21}+a_{22}\Delta_{22}=0, \\ a_{31}\Delta_{21}+a_{32}\Delta_{22}=0, \\ a_{41}\Delta_{31}+a_{42}\Delta_{22}=0. \end{cases}$$

Tant qu'on n'aura pas

$$(10)\qquad \frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{21}}{a_{22}}=\frac{a_{31}}{a_{32}}=\frac{a_{41}}{a_{42}}=k,$$

les égalités (9) donneront

$$\Delta_{21}=0, \quad \Delta_{22}=0, \quad \text{d'où l'on conclura} \quad \Delta_{11}=0.$$

4. Nous allons maintenant démontrer qu'il y a $4m^3$ points dont les coordonnées vérifient les équations (10); puis, que les équations (9) sont vérifiées par ces $4m^3$ solutions, sans que Δ_{21} et Δ_{22} soient nuls; et enfin, qu'en ces $4m^3$ points la courbe (C) touche la surface $\Delta_{33}=0$.

1° Le nombre des solutions des équations (10) est égal à $4m^3$.

En effet, ces équations peuvent s'écrire

$$a_{11}-ka_{12}=0, \quad a_{21}-ka_{22}=0,$$
$$a_{31}-ka_{32}=0, \quad a_{41}-ka_{42}=0.$$

Si l'on élimine α, β, γ entre ces quatre équations, on aura [*voir* mon *Analytique*, *Géométrie de l'espace*, n° 1258, (1°)] une équation du degré

$$1m^3 + 1m^3 + 1m^3 + 1m^3 \quad \text{ou} \quad 4m^3,$$

par rapport à k; à chaque valeur de k correspond une seule solution commune aux quatre équations qui précèdent; donc, etc.

2° Pour chacune de ces $4m^3$ solutions, les équations (9) sont vérifiées sans que Δ_{21} et Δ_{22} soient nuls.

En effet, la première, par exemple, de ces équations devient, eu égard aux relations (10),

$$k\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$k\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - k\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$0 = 0.$$

3° Si l'on a égard aux relations (10), les équations (7) et l'équation $\Delta_{33} = 0$ sont évidemment vérifiées. Ajoutons qu'en ces points la courbe (C) touche la surface $\Delta_{33} = 0$, c'est-à-dire que les plans tangents au point (α, β, γ), [ou $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ en introduisant des coordonnées homogènes], commun aux trois surfaces

$$\Delta_{41} = 0, \quad \Delta_{42} = 0, \quad \Delta_{33} = 0,$$

se coupent suivant une même droite.

En tenant compte des relations (10), on trouve sans difficulté, pour les équations de ces trois plans tangents :

Pour la surface $\Delta_{41} = 0$

$$\begin{aligned} X = x & \left[A\left(\frac{da_{12}}{d\alpha} - k\frac{da_{22}}{d\alpha}\right) + B\left(\frac{da_{13}}{d\alpha} - k\frac{da_{23}}{d\alpha}\right) + C\left(\frac{da_{14}}{d\alpha} - k\frac{da_{24}}{d\alpha}\right)\right] \\ + y & \left[A\left(\frac{da_{12}}{d\beta} - k\frac{da_{22}}{d\beta}\right) + B\left(\frac{da_{13}}{d\beta} - k\frac{da_{23}}{d\beta}\right) + C\left(\frac{da_{14}}{d\beta} - k\frac{da_{24}}{d\beta}\right)\right] \\ + z & [\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots] + t[\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots] = 0, \end{aligned}$$

Pour la surface $\Delta_{42} = 0$

$$\begin{aligned} Y = x & \left[A\left(\frac{da_{11}}{d\alpha} - k\frac{da_{12}}{d\alpha}\right) + kB\left(\frac{da_{13}}{d\alpha} - k\frac{da_{23}}{d\alpha}\right) + kC\left(\frac{da_{14}}{d\alpha} - k\frac{da_{24}}{d\alpha}\right)\right] \\ + y & \left[A\left(\frac{da_{11}}{d\beta} - k\frac{da_{12}}{d\beta}\right) + kB\left(\frac{da_{13}}{d\beta} - k\frac{da_{23}}{d\beta}\right) + kC\left(\frac{da_{14}}{d\beta} - k\frac{da_{24}}{d\beta}\right)\right] \\ + z & [\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots] + t[\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots] = 0, \end{aligned}$$

Pour la surface $\Delta_{33} = 0$

$$\begin{aligned} Z = x & \left(\frac{da_{11}}{d\alpha} - 2k\frac{da_{12}}{d\alpha} + k^2\frac{da_{22}}{d\alpha}\right) \\ + y & \left(\frac{da_{11}}{d\beta} - 2k\frac{da_{12}}{d\beta} + k^2\frac{da_{22}}{d\beta}\right) + z(\ldots) + t(\ldots) = 0. \end{aligned}$$

Dans ces équations on a posé

$$\begin{aligned} A &= a_{23}a_{34} - a_{33}a_{24}, \\ B &= a_{32}a_{24} - a_{22}a_{34}, \\ C &= a_{22}a_{33} - a_{23}^2. \end{aligned}$$

Or on constate immédiatement qu'on a l'identité

$$kX - Y + AZ = 0;$$

ce qui démontre la propriété énoncée.

5. De là résulte que les $4m^3$ solutions du système (10) comptent pour $8m^3$ points communs à la courbe $C = 0$ et à la surface $\Delta_{33} = 0$; or ces $8m^3$ solutions ne vérifient

pas les trois dernières équations du système (1). Par conséquent :

Le système (1) *admet* $10m^3$ *solutions, c'est-à-dire que l'équation* (I) *donne* $10m^3$ *systèmes de deux plans distincts.*