

PAINVIN

**Note sur un système variable de trois directions rectangulaires**

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 10 (1871), p. 414-423

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1871\\_2\\_10\\_\\_414\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__414_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1871, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**NOTE SUR UN SYSTÈME VARIABLE DE TROIS DIRECTIONS  
RECTANGULAIRES ;**

**PAR M. PAINVIN,**

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Lyon

---

*1. On suppose que les cosinus des angles de trois directions rectangulaires sont des fonctions données et déterminées d'un paramètre arbitraire ;*

Je me propose d'établir les propositions suivantes :

1° Une de ces directions peut être regardée comme constamment parallèle à la tangente d'une courbe (S); les coordonnées d'un point quelconque de cette courbe dépendent du paramètre arbitraire et d'une fonction entièrement arbitraire de ce paramètre.

2° Les deux autres directions ne coïncideront pas, en général, avec la normale principale et la binormale de la courbe (S); pour que la coïncidence ait lieu, il faut qu'une certaine relation soit identiquement vérifiée: on a alors, entre les cosinus des trois directions rectangulaires et leurs différentielles, les relations que M. J. Serret a données pour le cas des courbes à double courbure, et on ne les a que dans ce cas.

2. Je désignerai par

$$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma; \quad \cos l, \cos m, \cos n; \quad \cos p, \cos q, \cos r$$

les cosinus des angles, avec les axes de coordonnées, des trois directions considérées; ces cosinus sont des fonctions données d'un paramètre arbitraire  $t$ .

Comme ces trois directions sont rectangulaires, les relations suivantes devront avoir lieu identiquement, quel que soit  $t$  :

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \\ \cos^2 l + \cos^2 m + \cos^2 n = 1, \\ \cos^2 p + \cos^2 q + \cos^2 r = 1; \\ \cos\alpha \cos l + \cos\beta \cos m + \cos\gamma \cos n = 0, \\ \cos\alpha \cos p + \cos\beta \cos q + \cos\gamma \cos r = 0, \\ \cos l \cos p + \cos m \cos q + \cos n \cos r = 0. \end{array} \right.$$

On sait que les relations (I) entraînent comme consé-

quence nécessaire les suivantes :

$$(I \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos^2 \alpha + \cos^2 l + \cos^2 p = 1, \\ \cos^2 \beta + \cos^2 m + \cos^2 q = 1, \\ \cos^2 \gamma + \cos^2 n + \cos^2 r = 1; \\ \cos \alpha \cos \beta + \cos l \cos m + \cos p \cos q = 0, \\ \cos \alpha \cos \gamma + \cos l \cos n + \cos p \cos r = 0, \\ \cos \beta \cos \gamma + \cos m \cos n + \cos q \cos r = 0. \end{array} \right.$$

3. Nous pouvons regarder la direction  $(\alpha, \beta, \gamma)$  comme constamment parallèle à la tangente d'une certaine courbe (S).

En effet, si  $x, y, z$  sont les coordonnées d'un point quelconque de cette courbe, et si  $ds$  est l'élément d'arc correspondant, on aura

$$dx = \cos \alpha ds, \quad dy = \cos \beta ds, \quad dz = \cos \gamma ds,$$

ou

$$dx = \varphi_1(t) ds, \quad dy = \varphi_2(t) ds, \quad dz = \varphi_3(t) ds,$$

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  étant des fonctions connues de  $t$ ; or donnons arbitrairement la valeur

$$s = F(t), \quad \text{ou} \quad ds = F'(t) dt;$$

on conclura de là les valeurs des coordonnées  $x, y, z$ , lesquelles dépendront de la fonction  $F(t)$  arbitrairement choisie.

4. Désignons, pour la courbe (S), par  $\lambda, \mu, \nu$  les angles, avec les axes de coordonnées, de la binormale; par  $\xi, \eta, \zeta$  ceux de la normale principale ( $\alpha, \beta, \gamma$  sont ceux de la tangente); on aura, comme on sait, les relations (*Calcul*

différentiel de M. J. SERRET, t. I, p. 408),

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} d \cos \alpha = \cos \xi d \sigma, \\ d \cos \beta = \cos \eta d s, \\ d \cos \gamma = \cos \zeta d \sigma; \\ \\ d \cos \lambda = \cos \xi d \tau, \\ d \cos \mu = \cos \eta d \tau, \\ d \cos \nu = \cos \zeta d \tau; \\ \\ d \cos \xi = -\cos \alpha d \sigma - \cos \lambda d \tau, \\ d \cos \eta = -\cos \beta d \sigma - \cos \mu d \tau, \\ d \cos \zeta = -\cos \gamma d \sigma - \cos \nu d \tau; \end{array} \right.$$

$$(1 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} d \sigma = \varepsilon \sqrt{(d \cos \alpha)^2 + (d \cos \beta)^2 + (d \cos \gamma)^2}, \quad \varepsilon = \pm 1, \\ d \tau = \varepsilon_1 \sqrt{(d \cos \lambda)^2 + (d \cos \mu)^2 + (d \cos \nu)^2}, \quad \varepsilon_1 = \pm 1. \end{array} \right.$$

Les directions  $(\alpha, \beta, \gamma)$ ,  $(\lambda, \mu, \nu)$ ,  $(\xi, \eta, \zeta)$  étant rectangulaires, on a

$$\begin{aligned} \varepsilon' \cos \lambda &= \cos \beta \cos \zeta - \cos \gamma \cos \eta, \\ \varepsilon' \cos \mu &= \cos \gamma \cos \xi - \cos \alpha \cos \zeta, \quad \varepsilon' = \pm 1, \\ \varepsilon' \cos \nu &= \cos \alpha \cos \eta - \cos \beta \cos \xi, \end{aligned}$$

d'où l'on conclut, en ayant égard au premier groupe des relations (1),

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon' d \sigma \cos \lambda = \cos \beta d \cos \gamma - \cos \gamma d \cos \beta, \\ \varepsilon' d \sigma \cos \mu = \cos \gamma d \cos \alpha - \cos \alpha d \cos \gamma, \\ \varepsilon' d \sigma \cos \nu = \cos \alpha d \cos \beta - \cos \beta d \cos \alpha. \end{array} \right.$$

En différentiant les relations (2), il vient

$$\begin{aligned} \varepsilon' (d \sigma d \cos \lambda + \cos \lambda d^2 \sigma) &= \cos \beta d^2 \cos \gamma - \cos \gamma d^2 \cos \beta, \\ \varepsilon' (d \sigma d \cos \mu + \cos \mu d^2 \sigma) &= \cos \gamma d^2 \cos \alpha - \cos \alpha d^2 \cos \gamma, \\ \varepsilon' (d \sigma d \cos \nu + \cos \nu d^2 \sigma) &= \cos \alpha d^2 \cos \beta - \cos \beta d^2 \cos \alpha; \end{aligned}$$

on déduit de là, en multipliant par  $\cos \xi$ ,  $\cos \eta$ ,  $\cos \zeta$ , en

ajoutant et en ayant égard au deuxième groupe des relations (1),

$$\begin{aligned} \varepsilon' d\sigma d\tau &= \cos\xi(\cos\beta d^2\cos\gamma - \cos\gamma d^2\cos\beta) \\ &+ \cos\eta(\cos\gamma d^2\cos\alpha - \cos\alpha d^2\cos\gamma) \\ &+ \cos\zeta(\cos\alpha d^2\cos\beta - \cos\beta d^2\cos\alpha); \end{aligned}$$

puis, remplaçant  $\cos\xi$ ,  $\cos\eta$ ,  $\cos\zeta$ , par les valeurs que fournit le premier groupe des relations (1), on a

$$(3) \quad \varepsilon' d\sigma^2 d\tau = - \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ d\cos\alpha & d\cos\beta & d\cos\gamma \\ d^2\cos\alpha & d^2\cos\beta & d^2\cos\gamma \end{vmatrix}.$$

Ainsi on a, *en définitive*, les formules suivantes, qui donnent  $\cos\xi$ ,  $\cos\eta$ ,  $\cos\zeta$ ;  $\cos\lambda$ ,  $\cos\mu$ ,  $\cos\nu$ ;  $d\sigma$ ,  $d\tau$ , en fonction de  $\cos\alpha$ ,  $\cos\beta$ ,  $\cos\gamma$ , et des différentielles premières et secondes de ces mêmes quantités :

$$\begin{aligned} (1^0) \quad \cos\xi &= \frac{d\cos\alpha}{d\sigma}, \quad \cos\eta = \frac{d\cos\beta}{d\sigma}, \quad \cos\zeta = \frac{d\cos\gamma}{d\sigma}; \\ (2^0) \quad \left. \begin{aligned} \varepsilon \cos\lambda &= \frac{\cos\beta d\cos\gamma - \cos\gamma d\cos\beta}{d\sigma}, \\ \varepsilon' \cos\mu &= \frac{\cos\gamma d\cos\alpha - \cos\alpha d\cos\gamma}{d\sigma}, \\ \varepsilon'' \cos\nu &= \frac{\cos\alpha d\cos\beta - \cos\beta d\cos\alpha}{d\sigma}; \end{aligned} \right\} \\ (3^0) \quad \varepsilon d\tau &= \sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2}; \\ (4^0) \quad \left. \begin{aligned} \varepsilon' d\sigma^2 d\tau &= - \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ d\cos\alpha & d\cos\beta & d\cos\gamma \\ d^2\cos\alpha & d^2\cos\beta & d^2\cos\gamma \end{vmatrix}. \\ \varepsilon &= \pm 1, \quad \varepsilon' = \pm 1. \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Il ne faut pas oublier que  $\cos\alpha$ ,  $\cos\beta$ ,  $\cos\gamma$ ;  $d\cos\alpha$ , ... :

$d^2 \cos \alpha, \dots$  doivent vérifier identiquement les relations

$$(II \text{ bis}) \begin{cases} \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1, \\ \cos \alpha d \cos \alpha + \cos \beta d \cos \beta + \cos \gamma d \cos \gamma = 0, \\ \cos \alpha d^2 \cos \alpha + \cos \beta d^2 \cos \beta + \cos \gamma d^2 \cos \gamma = -d\sigma^2. \end{cases}$$

5. Ceci posé, si l'on mène, par l'origine des coordonnées, des parallèles aux quatre directions

$$(\lambda, \mu, \nu), \quad (\xi, \eta, \zeta); \quad (l, m, n), \quad (p, q, r),$$

ces quatre parallèles sont dans un même plan perpendiculaire à la droite  $(\alpha, \beta, \gamma)$ .

Désignons par  $i$  l'angle de la demi-droite  $(l, m, n)$  avec la demi-droite  $(\lambda, \mu, \nu)$ ; on peut disposer de  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$ , de manière que cet angle soit positif et aigu; on peut encore disposer de  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$ , de manière que l'angle des deux demi-droites  $(p, q, r)$  et  $(\xi, \eta, \zeta)$  soit également positif et aigu. On aura, dès lors, les égalités

$$(4) \begin{cases} \cos \lambda \cos l + \cos \mu \cos m + \cos \nu \cos n = \cos i, \\ \cos \xi \cos l + \cos \eta \cos m + \cos \zeta \cos n = -\sin i, \\ \cos \lambda \cos p + \cos \mu \cos q + \cos \nu \cos r = \sin i, \\ \cos \xi \cos p + \cos \eta \cos q + \cos \zeta \cos r = \cos i. \end{cases}$$

Les deux premières égalités (4), jointes à la relation qui exprime que la direction  $(l, m, n)$  est perpendiculaire à la direction  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , donnent le système des trois équations

$$\begin{aligned} \cos \alpha \cos l + \cos \beta \cos m + \cos \gamma \cos n &= 0, \\ \cos \lambda \cos l + \cos \mu \cos m + \cos \nu \cos n &= \cos i, \\ \cos \xi \cos l + \cos \eta \cos m + \cos \zeta \cos n &= -\sin i. \end{aligned}$$

En ajoutant ces trois égalités respectivement multipliées par  $\cos \alpha, \cos \lambda, \cos \xi$ ; puis par  $\cos \beta, \cos \mu, \cos \eta,$

et enfin par  $\cos\gamma$ ,  $\cos\nu$ ,  $\cos\xi$ , on trouve

$$(5) \quad \begin{cases} \cos l = \cos\lambda \cos i - \cos\xi \sin i, \\ \cos m = \cos\mu \cos i - \cos\eta \sin i, \\ \cos n = \cos\nu \cos i - \cos\xi \sin i. \end{cases}$$

Les deux dernières égalités (4), jointes à la relation qui exprime que la direction  $(p, q, r)$  est perpendiculaire à la direction  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , donnent le système des trois équations

$$\begin{aligned} \cos\alpha \cos p + \cos\beta \cos q + \cos\gamma \cos r &= 0, \\ \cos\lambda \cos p + \cos\mu \cos q + \cos\nu \cos r &= \sin i, \\ \cos\xi \cos p + \cos\eta \cos q + \cos\xi \cos r &= \cos i. \end{aligned}$$

On déduit, comme précédemment, de ces trois équations

$$(6) \quad \begin{cases} \cos p = \cos\lambda \sin i + \cos\xi \cos i, \\ \cos q = \cos\mu \sin i + \cos\eta \cos i, \\ \cos r = \cos\nu \sin i + \cos\xi \cos i. \end{cases}$$

En remplaçant dans les équations (4)  $\cos\lambda$ ,  $\cos\mu$ ,  $\cos\nu$ ;  $\cos\xi$ ,  $\cos\eta$ ,  $\cos\xi$  par leurs valeurs (II), on trouve

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon' d\sigma \cos i &= \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ d \cos\alpha & d \cos\beta & d \cos\gamma \\ \cos l & \cos m & \cos n \end{vmatrix} \\ &= \varepsilon' (\cos p d \cos\alpha + \cos q d \cos\beta + \cos r d \cos\gamma), \end{aligned} \right.$$

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon' d\sigma \sin i &= \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ d \cos\alpha & d \cos\beta & d \cos\gamma \\ \cos p & \cos q & \cos r \end{vmatrix} \\ &= -\varepsilon' (\cos l d \cos\alpha + \cos m d \cos\beta + \cos n d \cos\gamma). \end{aligned} \right.$$

A l'aide des valeurs (II), on pourra exprimer  $\cos l$ ,  $\cos m$ ,  $\cos n$ ;  $\cos p$ ,  $\cos q$ ,  $\cos r$  en fonction de  $\cos\alpha$ ,  $\cos\beta$ ,



cos  $\gamma$ , de leurs différentielles premières et secondes et de l'angle  $i$ ; je ne transcrirai pas ces formules.

On constatera sans difficulté que les relations (I) sont identiquement vérifiées par les valeurs (5) et (6), en tenant compte, bien entendu, des relations (II) et (II bis).

6. Différentions maintenant les équations (5) et (6), on a  
 $d \cos l = \cos i d \cos \lambda - \sin i d \cos \xi - (\cos \lambda \sin i + \cos \xi \cos i) di,$   
.....  
 $d \cos p = \sin i d \cos \lambda + \cos i d \cos \xi + (\cos \lambda \cos i - \cos \xi \sin i) di,$   
.....

En ayant égard aux équations (1), (5) et (6), ces dernières égalités donnent les valeurs définitives

$$(III) \left\{ \begin{array}{l} (1^o) \left\{ \begin{array}{l} d \cos l = \sin i \cos \alpha d\sigma + \cos p(d\tau - di), \\ d \cos m = \sin i \cos \beta d\sigma + \cos q(d\tau - di), \\ d \cos n = \sin i \cos \gamma d\sigma + \cos r(d\tau - di); \end{array} \right. \\ (2^o) \left\{ \begin{array}{l} d \cos p = -\cos i \cos \alpha d\sigma - \cos l(d\tau - di), \\ d \cos q = -\cos i \cos \beta d\sigma - \cos m(d\tau - di), \\ d \cos r = -\cos i \cos \gamma d\sigma - \cos n(d\tau - di). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

7. On voit, par les équations (5) et (6), que les directions  $(l, m, n)$ ,  $(p, q, r)$  ne coïncident pas avec la binormale et la normale principale de la courbe touchée par la droite  $(\alpha, \beta, \gamma)$ .

Cette coïncidence aura lieu si l'angle  $i$  est nul, c'est-à-dire si l'on a identiquement

$$(9) \quad \cos l d \cos \alpha + \cos m d \cos \beta + \cos n d \cos \gamma = 0.$$

Cette condition est évidemment suffisante; on constate facilement qu'elle est nécessaire, en introduisant dans les équations (5) et (6) les hypothèses

$$\begin{array}{lll} \cos l = \cos \lambda, & \cos m = \cos \mu, & \cos n = \cos \nu; \\ \cos p = \cos \xi, & \cos q = \cos \eta, & \cos r = \cos \zeta. \end{array}$$

8. Lorsque l'identité (9) a lieu, c'est-à-dire lorsque  $i$  est nul, les égalités (5) et (6) et (III) donnent lieu aux relations suivantes :

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} d \cos \alpha = \cos p d\sigma, \\ d \cos \beta = \cos q d\sigma, \\ d \cos \gamma = \cos r d\sigma; \\ d \cos l = \cos p d\tau, \\ d \cos m = \cos q d\tau, \\ d \cos n = \cos r d\tau; \\ d \cos p = -\cos \alpha d\sigma - \cos l d\tau, \\ d \cos q = -\cos \beta d\sigma - \cos m d\tau, \\ d \cos r = -\cos \gamma d\sigma - \cos n d\tau; \end{array} \right.$$

ce sont les relations caractéristiques des courbes à double courbure, relations énoncées et établies par M. J. Serret.

Je vais enfin démontrer que le système des trois directions rectangulaires

$$(\alpha, \beta, \gamma), \quad (l, m, n), \quad (p, q, r)$$

ne peut donner lieu à des relations caractéristiques de la forme précédente, savoir :

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} d \cos \alpha = \cos p d\sigma', \\ d \cos \beta = \cos q d\sigma', \\ d \cos \gamma = \cos r d\sigma'; \\ d \cos l = \cos p d\tau', \\ d \cos m = \cos q d\tau', \\ d \cos n = \cos r d\tau'; \\ d \cos p = -\cos \alpha d\sigma' - \cos l d\tau', \\ d \cos q = -\cos \beta d\sigma' - \cos m d\tau', \\ d \cos r = -\cos \gamma d\sigma' - \cos n d\tau', \end{array} \right.$$

que lorsqu'on a identiquement

$$(9) \quad \cos l d \cos \alpha + \cos m d \cos \beta + \cos n d \cos \gamma = 0,$$

c'est-à-dire lorsque les trois directions considérées constituent la tangente, la binormale et la normale principale d'une courbe à double courbure.

En ajoutant la somme des carrés des équations du premier groupe (11), on trouve d'abord

$$(12) \quad d\sigma'^2 = d\sigma^2.$$

Le second groupe des égalités admises (11) peut s'écrire, en ayant égard aux relations (6) et (II),

$$\sin i \cos \alpha d\sigma + (\cos \lambda \sin i + \cos \xi \cos i)(d\tau - di - d\tau') = 0,$$

$$\sin i \cos \beta d\sigma + (\cos \mu \sin i + \cos \eta \cos i)(d\tau - di - d\tau') = 0,$$

$$\sin i \cos \gamma d\sigma + (\cos \nu \sin i + \cos \zeta \cos i)(d\tau - di - d\tau') = 0.$$

Ajoutons ces dernières égalités, après les avoir respectivement multipliées par  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$ ; puis par  $\cos \lambda$ ,  $\cos \mu$ ,  $\cos \nu$ , et enfin par  $\cos \xi$ ,  $\cos \eta$ ,  $\cos \zeta$ , on trouve

$$(13) \quad \begin{cases} \sin i d\sigma = 0, \\ \sin i (d\tau - di - d\tau') = 0, \\ \cos i (d\tau - di - d\tau') = 0. \end{cases}$$

Les équations (12) et (13) donnent évidemment

$$i = 0, \quad d\sigma' = d\sigma, \quad d\tau' = d\tau;$$

c'est la proposition qu'il s'agissait de démontrer.