NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DÉSIRÉ ANDRÉ

Deux théorèmes sur la parabole

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 10 (1871), p. 411-414

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__411_1>

DEUX THÉORÈMES SUR LA PARABOLE;

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

I.

THÉORÈME. — *Si trois points* A, B, C, *pris sur une parabole, sont tels, que le triangle* ABC *ait son centre de gravité sur l'axe de la courbe, les normales en* A, B, C *à la parabole se coupent en un même point, et réciproquement.*

Soit

$$Y^2 = 2pX$$

l'équation de la parabole; celle de la normale en un point quelconque xy sera

$$yX + pY = y(p + x).$$

Cela posé, considérons les normales aux trois points (x, y), (x', y'), (x'', y''). Pour qu'elles concourent en un même point, il faut et il suffit que le triangle qu'elles forment ait une surface nulle. Or, au signe près, cette surface a pour expression

$$\frac{1}{2p^3(y'-y'')(y''-y)(y-y')} \times \begin{vmatrix} y & p & py + xy \\ y' & p & py' + x'y' \\ y'' & p & py'' + x''y'' \end{vmatrix}^2;$$

donc il faut et il suffit que l'on ait

$$\begin{vmatrix} y & p & py + xy \\ y' & p & py' + x'y' \\ y'' & p & py'' + x''y'' \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien

$$\begin{vmatrix} y & 1 & xy \\ y' & 1 & x'y' \\ y'' & 1 & x''y'' \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien, en remplaçant x, x', x'' par les quantités proportionnelles y^2, y'^2, y''^2,

$$\begin{vmatrix} y & 1 & y^3 \\ y' & 1 & y'^3 \\ y'' & 1 & y''^3 \end{vmatrix} = 0,$$

ou enfin

$$\begin{vmatrix} 1 & y & y^3 \\ 1 & y' & y'^3 \\ 1 & y'' & y''^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Mais ce dernier déterminant est égal à

$$(y'-y'')(y''-y)(y-y')(y+y'+y'');$$

et comme les trois premiers facteurs sont différents de zéro, il faut et il suffit que l'on ait

$$y+y'+y''=0,$$

égalité qui exprime précisément que le centre de gravité du triangle ABC est sur l'axe de la parabole.

II.

Théorème. — *Si trois points d'une parabole (dont aucun d'eux n'est le sommet) sont tels, que les droites qui les joignent au sommet de la courbe aient, par rapport à l'axe, des coefficients angulaires dont la somme soit nulle, les trois centres de courbure correspondants sont en ligne droite, et réciproquement.*

Soit

$$Y^2 = 2pX$$

l'équation de la parabole; le centre de courbure correspondant au point (x, y) aura pour coordonnées

$$p + 3x, \quad -\frac{y^3}{p^2}.$$

Cela posé, considérons les centres de courbure correspondant aux trois points (x, y), (x', y'), (x'', y''). Pour qu'ils soient en ligne droite, il faut et il suffit que le triangle dont ils sont les sommets ait une surface nulle. Or cette surface est exprimée, au signe près, par

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & p + 3x & -\frac{y^3}{p^2} \\ 1 & p + 3x' & -\frac{y'^3}{p^2} \\ 1 & p + 3x'' & -\frac{y''^3}{p^2} \end{vmatrix}.$$

Donc il faut et il suffit que l'on ait

$$\begin{vmatrix} 1 & p + 3x & -\frac{y^3}{p^2} \\ 1 & p + 3x' & -\frac{y'^3}{p^2} \\ 1 & p + 3x'' & -\frac{y''^3}{p^2} \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y^3 \\ 1 & x' & y'^3 \\ 1 & x'' & y''^3 \end{vmatrix} = 0,$$

ou enfin

$$\begin{vmatrix} 1 & y^2 & y^3 \\ 1 & y'^2 & y'^3 \\ 1 & y''^2 & y''^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ce dernier déterminant est égal à

$$(y'-y'')(y''-y)(y-y')(y'y''+y''y+yy').$$

Comme les trois premiers facteurs sont différents de zéro, il faut et il suffit que l'on ait

$$y'y''+y''y+yy'=0,$$

ou bien

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{y'}+\frac{1}{y''}=0.$$

Or, pour tout point de la parabole,

$$\frac{1}{Y}=\frac{Y}{2pX};$$

donc la condition nécessaire et suffisante pour que les trois centres soient en ligne droite se réduit à

$$\frac{y}{x}+\frac{y'}{x'}+\frac{y''}{x''}=0,$$

égalité qui exprime précisément que les droites considérées ont des coefficients angulaires dont la somme est nulle.