Nouvelles annales de mathématiques

Chasles

Propriétés des courbes d'ordre et de classe quelconques démontrées par le principe de correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 10 (1871), p. 385-401

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__385_0>

PROPRIETÉS DES COURBES D'ORDRE ET DE CLASSE QUELCONQUES DÉMONTRÉES PAR LE PRINCIPE DE CORRESPONDANCE;

PAR M. CHASLES.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXII.)

En analyse, un système de courbes, toutes de même ordre ou de même classe, s'exprime par l'équation $F(x, y, \lambda) = 0$, qui ne renferme qu'un coefficient arbitraire λ, tous les autres étant déterminés par les conditions du système. Dans la géométrie de Descartes, l'exposant supérieur de λ exprime le nombre des courbes du système qui passent par un même point quelconque; et dans la méthode corrélative, dite des *coordonnées tangentielles*, cet exposant exprime des courbes qui sont tangentes à une même droite quelconque. Mais, quoique l'équation exprime toujours l'une ou l'autre de ces deux conditions du système, que *par un point quelconque il passe un nombre déterminé de courbes*, ou bien qu'*un nombre de courbes donné touchent une droite quelconque*, on n'avait pas été induit à penser que ces deux conditions associées fussent propres à former un système. Et surtout l'analyse, dans son état actuel, ne saurait former l'équation d'un tel système. Cette équation serait $F(x, y, \lambda, \mu, \nu) = 0$, μ, ν étant les deux nombres en question, et λ le seul paramètre variable, tous les coefficients des termes en x, y devant être nécessairement des fonctions de λ, μ et ν, avec cette condition impérieuse que le plus fort exposant de λ fût μ.

Au contraire, le *Principe de correspondance* s'est appliqué avec la plus grande facilité à l'introduction de ces deux nombres μ et ν, appelés les *caractéristiques* du système, parce qu'ils suffisent non-seulement pour constituer un système, mais aussi pour en faire connaître toutes les propriétés, comme on l'a vu dans les nombreux exemples qui ont été le sujet de mes Communications précédentes.

Je me propose, dans ma Communication de ce jour, de montrer que, si le mode de raisonnement qui constitue le *Principe de correspondance* jouit ainsi d'un privilége précieux dans la théorie générale des systèmes de courbes, il s'applique aussi, et avec la même facilité, dans la théorie générale des courbes géométriques, considérées soit isolément avec des points et des droites, soit associées entre elles; questions regardées généralement comme étant du domaine propre de l'analyse. Ce procédé de démonstration s'applique même aux questions les plus simples, celles de la théorie des coniques, qui forment les exercices habituels de la géométrie analytique.

Ce sont ces applications variées du *Principe de correspondance*, annoncées déjà dans notre séance du 3 avril, dont j'ai l'honneur d'entretenir aujourd'hui l'Académie.

Ce travail est divisé en cinq chapitres dont je dirai brièvement le sujet.

Dans le premier se trouvent quelques propriétés relatives à une simple conique, c'est-à-dire sans association d'aucun autre élément pris arbitrairement, tels que points, droites ou courbes.

Le second chapitre renferme des propriétés d'une conique dans lesquelles peuvent intervenir des points ou des droites étrangers à la conique. Mais ces propriétés sont énoncées dans un état de généralisation fondée sur cette considération, qu'un point peut être regardé comme une courbe de la classe 1, et une droite comme une courbe de l'ordre 1; de sorte que toutes les propriétés d'une conique que renferme ce paragraphe se rapportent aux tangentes d'une courbe de la classe n quelconque, et aux points d'une courbe de l'ordre m. Il suffira de faire, dans les énoncés des théorèmes, $n = 1$ et $m = 1$ pour avoir les propriétés relatives à des points et à des droites, résultats en quelque sorte classiques.

Dans le chapitre III se trouvent des propriétés d'une courbe géométrique quelconque, concernant des systèmes de deux points conjugués par rapport à une conique, ou des systèmes de deux droites conjuguées aussi par rapport à une conique.

Les théorèmes présentés sous ce point de vue sont encore ici une généralisation, savoir : des propriétés qui appartiennent à des systèmes de deux droites divisant un angle donné harmoniquement, ou à des systèmes de deux points divisant un segment donné harmoniquement. Il suffit de supposer, dans le premier cas, que la conique devient l'ensemble de deux droites, et, dans le second cas, que la conique devient infiniment aplatie.

C'est ainsi, par exemple, que la normale en un point d'une courbe peut être regardée comme étant la conjuguée de la tangente en ce point, par rapport à une conique. Car si la conique devient infiniment aplatie, c'est-à-dire un simple segment linéaire, puis, que ce segment soit pris sur la droite située à l'infini, et que ses extrémités soient les deux points circulaires, la tangente et sa conjuguée divisent ce segment harmoniquement, et dès lors sont rectangulaires.

Cette généralisation de la condition de perpendicularité est très-utile pour faire immédiatement la transformation corrélative des propriétés concernant les normales des courbes. Les normales se transforment ainsi en des points pris sur les tangentes d'une courbe, et qui sont conjugués des points de contact, par rapport à une conique.

Les deux derniers chapitres sont consacrés aux propriétés générales des courbes géométriques d'ordre et de classe quelconques. Dans l'un, ces propriétés se rapportent toutes à la présence d'une conique dans l'énoncé de la question, et, dans l'autre, elles répondent à des conditions générales très-variées.

CHAPITRE PREMIER.

PROPRIÉTÉS D'UNE CONIQUE.

1. Si l'on mène en chaque point d'une conique la tangente et la normale, puis par l'extrémité de la normale une nouvelle tangente, celle-ci rencontre la première sur une courbe du quatrième ordre.

2. Les cordes d'une conique, normales en une de leurs extrémités, ont leurs milieux sur une courbe du huitième ordre.

3. Si de chaque point d'une conique on abaisse trois no males sur la courbe :

1° Les cordes qui joignent deux à deux les pieds de ces normales enveloppent une courbe de la quatrième classe;

2° Les tangentes menées par les pieds des trois normales se coupent sur une courbe du quatrième ordre;

3° Ces tangentes rencontrent la tangente au point d'où sont menées les trois normales, en des points situés sur une courbe du quatrième ordre.

4. Les perpendiculaires abaissées des points d'une conique sur les tangentes aux extrémités des normales en ces points enveloppent une courbe de la huitième classe.

5. Les perpendiculaires abaissées de chaque point d'une conique sur les cordes qui joignent deux à deux les extrémités des trois normales menées par ce point enveloppent une courbe de la dixième classe.

6. Le lieu des sommets des angles droits dont un côté est tangent à une conique, et l'autre normal, est une courbe du sixième ordre qui a deux points doubles à l'infini, et six points de contact avec la conique, quatre en ses sommets et deux à l'infini.

7. Le lieu des sommets des angles droits dont les deux côtés sont normaux à une conique est une courbe du sixième ordre.

8. Par chaque point d'une conique on mène la normale et le diamètre, la corde qui joint les extrémités de ces deux droites enveloppent une courbe de la quatrième classe.

9. Les normales d'une conique rencontrent les diamètres qui leur sont perpendiculaires, sur une courbe du sixième ordre, qui a un point quadruple au centre de la conique.

10. Les normales aux extrémités de deux diamètres conjugués se coupent sur une courbe du sixième ordre.

11. Si l'on a sur une conique deux séries de points a et a' qui se correspondent homographiquement :

1° Les normales en deux points correspondants a, a' se coupent sur une courbe du troisième ordre ;

2° La corde qui joint les extrémités des deux normales enveloppe une courbe de la sixième classe ;

3° La corde qui joint un des deux points à l'extrémité de la normale en l'autre point enveloppe une courbe de la huitième classe ;

4° La normale en un point rencontre la tangente en l'autre point, sur une courbe du sixième ordre ;

5° La normale en un point rencontre le diamètre qui passe par l'autre point sur une courbe du sixième ordre ;

6° La droite menée d'un point à l'extrémité de la normale en l'autre point enveloppe une courbe de la quatrième classe.

Observation. — On peut généraliser tous ces divers théorèmes, en considérant sur une conique deux séries de points dans lesquelles, à un point d'une série corresponde dans l'autre série un groupe de points. Ainsi, à un point de la première série correspondront n points de la seconde série, et à un point de celle-ci correspondront n' points de la première. On obtient alors des théorèmes dont les précédents ne sont que les cas les plus simples.

Tous ces théorèmes peuvent même prendre une plus grande généralité: car ils ne sont pas le privilége des sections coniques : ils s'étendent à une classe de courbes de tous les ordres, aux courbes sur lesquelles les points se déterminent individuellement, courbes que M. Cayley a appelées *unicursales*. Ce sont, comme on sait, les courbes d'ordre m douées de $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points doubles, ou plus généralement de points multiples d'ordre quelconque équivalant à $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points doubles. (*Comptes rendus*, t. LXII, 1866; p. 579 et 1354.)

CHAPITRE II.

PROPRIÉTÉS D'UNE CONIQUE EN RAPPORT AVEC UNE COURBE GÉOMÉTRIQUE U_m OU U^n.

12. Si de chaque point d'une courbe U_m d'ordre m on mène deux tangentes à une conique, les normales aux points de contact se coupent sur une courbe de l'ordre $3m$.

13. Si de chaque point d'une courbe U_m on mène deux tangentes à la conique, les normales aux points de contact ont leurs extrémités sur une corde qui enveloppe une courbe de la classe $3m$.

14. Si de chaque point d'une courbe U_m on mène deux

tangentes à une conique, les normales aux points de contact interceptent une corde qui rencontre la corde de contact sur une courbe d'ordre $4m$.

15. Si de chaque point d'une courbe U_m on mène deux tangentes à une conique, chacune de ces tangentes rencontre la normale au point de contact de l'autre sur une courbe de l'ordre $6m$.

16. Si de chaque point d'une courbe U_m on mène deux tangentes à une conique, et par les points où les normales aux deux points de contact coupent les coniques on mène les tangentes : ces tangentes se coupent sur une courbe de l'ordre $3m$.

17. Si de chaque point d'une courbe U_m on mène deux tangentes à une conique, et que du point de contact de l'une on abaisse une perpendiculaire sur la normale au point de contact de l'autre :

1° Cette perpendiculaire enveloppe une courbe de la classe $4m$;

2° Son pied sur la normale est sur une courbe de l'ordre $4m$.

18. Si de chaque point d'une courbe U_m on abaisse les normales sur une conique :

1° Les tangentes aux pieds de ces normales se coupent deux à deux en des points situés sur une courbe de l'ordre $3m$;

2° Les cordes qui joignent deux à deux les pieds des normales enveloppent une courbe de la classe $3m$ (*).

19. Si de chaque point d'une courbe U_m on mène deux tangentes à la conique, et que de ce point on mène une

---

(*) Les théorèmes 12, 16 et 18 ont été démontrés analytiquement par M. le professeur Desboves, comme exercices pour les classes de Mathématiques spéciales, dans son intéressant opuscule : *Théorèmes et problèmes sur les normales aux coniques*. In-8°; 1861.

droite au pôle de la corde comprise entre les extrémités des normales aux deux points de contact, cette droite enveloppe une courbe de la classe $3m$.

20. Si de chaque point a d'une courbe U_m on mène les normales à la conique, ces normales rencontrent la polaire du point a en des points situés sur une courbe de l'ordre $8m$.

21. Si de chaque point d'une courbe U_m on mène des tangentes à la conique, que par l'un des points de contact on mène la normale et par l'autre le diamètre : ce diamètre coupe la normale en un point situé sur une courbe d'ordre $6m$.

22. Les tangentes d'une courbe U^n de la classe n rencontrent les normales d'une conique qui leur sont perpendiculaires, en des points situés sur une courbe d'ordre $6n$.

23. Si par les points où chaque tangente d'une courbe U^n coupe une conique on mène les normales, ces normales se coupent sur une courbe de l'ordre $3n$.

24. Si de chaque point d'une courbe U_m on abaisse sur une conique quatre normales, les cordes qui joignent deux à deux les pieds des unes aux extrémités des autres enveloppent une courbe de la classe $6m$.

25. Si de chaque point d'une courbe U_m on abaisse sur une conique les normales, les cordes qui joignent deux à deux les extrémités de ces normales enveloppent une courbe de la classe $9m$.

26. Si de chaque point d'une courbe U_m on mène les normales d'une conique, elles rencontrent le diamètre conjugué de celui qui passe par le point de U_m, en des points situés sur une courbe de l'ordre $8m$.

27. Les perpendiculaires élevées sur les milieux des polaires des points d'une courbe U_m, relatives à une conique, enveloppent une courbe de la classe $3m$.

28. Si l'on circonscrit à une conique des parallélogrammes ayant un sommet sur une courbe U_m, les deux sommets contigus à celui-là sont sur une courbe d'ordre $2m$.

29. Si des points d'une courbe U_m on abaisse sur les polaires de ces points, relatives à une conique, des obliques, sous un angle de grandeur donnée, compté dans un même sens de rotation, ces obliques enveloppent une courbe de la classe $2m$.

30. Si de chaque point d'une courbe U_m on abaisse une perpendiculaire sur le diamètre d'une conique conjugué à celui qui passe par le point de U_m :

1° Ces perpendiculaires enveloppent une courbe de la classe $2m$;

2° Leurs pieds sont sur une courbe de l'ordre $3m$.

31. Si de chaque point d'une courbe U_m on mène les deux tangentes d'une conique, elles rencontrent le diamètre conjugué de celui qui passe par le point de U_m, en des points situés sur une courbe de l'ordre $4m$.

32. Si de chaque point d'une courbe U_m on mène deux tangentes à une conique, et que par le point de contact de l'une on mène une perpendiculaire à l'autre, cette perpendiculaire enveloppe une courbe de la classe $4m$.

Son pied est sur une courbe de l'ordre $6m$.

33. Si l'on circonscrit à une conique des quadrilatères dont deux sommets opposés soient deux points correspondants sur deux courbes homographiques U_m, U'_m, le lieu des deux autres sommets est une courbe de l'ordre $4m^2$.

CHAPITRE III.

PROPRIÉTÉS D'UNE COURBE GÉOMÉTRIQUE, CONCERNANT DES SYSTÈMES DE DEUX POINTS OU DE DEUX DROITES CONJUGUÉS PAR RAPPORT A UNE CONIQUE.

34. Par chaque point de courbure U_m^n on mène la tangente et sa conjuguée par rapport à une conique : cette droite conjuguée enveloppe une courbe de la classe $m+n$.

Si la conique se réduit à un segment ef terminé à deux points e, f, la tangente et sa conjuguée divisent ce segment en rapport harmonique.

Si e, f sont les deux points circulaires de l'infini, le théorème exprime que :

Les normales d'une courbe U_m^n enveloppent une courbe de la classe $m+n$.

Si e, f sont les points à l'infini sur deux droites rectangulaires, le théorème exprime que :

Si par chaque point d'une courbe U_m^n on mène une droite faisant avec la tangente un angle dont la bissectrice soit parallèle à une droite fixe, ces droites enveloppent une courbe de la classe $m+n$.

35. Par chaque point d'une courbe U_m^n on mène la normale et sa conjuguée par rapport à une conique : cette conjuguée enveloppe une courbe de la classe $2m+n$.

36. Si par chaque point d'une courbe U_m on mène les deux droites rectangulaires conjuguées par rapport à une conique, ces droites enveloppent une courbe de la classe $3m$.

37. Si par chaque point d'une courbe U_m on mène les tangentes d'une courbe $U^{n'}$ et les droites conjuguées de ces tangentes, par rapport à une conique C, ces droites enveloppent une courbe de la classe $2mn'$.

38. De chaque point a d'une courbe U_m on mène les tangentes d'une courbe $U^{n'}$, et l'on prend sur ces tangentes les conjugués du point a par rapport à la conique C : le lieu de ces points conjugués est une courbe de l'ordre $2mn'$.

39. Le lieu d'un point d'où l'on peut mener à deux courbes U^n, $U^{n'}$ deux tangentes, conjuguées par rapport à une conique, est une courbe de l'ordre $2nn'$.

40. En chaque point a d'une courbe U^n_m on mène la normale, sur laquelle on prend le conjugué de ce point, par rapport à une conique : le lieu de ces points conjugués est une courbe de l'ordre $2m + n$.

41. Sur chaque tangente d'une courbe U^n on prend le conjugué du point où cette tangente rencontre une droite D, par rapport à une conique C : le lieu de ces points conjugués est un courbe de l'ordre $2n$, qui a trois points multiples d'ordre n ; l'un est le pôle de D, et les autres sont les points d'intersection de D et de la conique.

42. Les milieux des segments interceptés par une conique sur les tangentes d'une courbe U^n sont sur une courbe de l'ordre $2n$ qui a trois points multiples d'ordre n, l'un est le centre de la conique, et les deux autres sont ses deux points à l'infini.

43. Si sur chaque tangente d'une courbe U^n_m on prend le point conjugué du point de contact par rapport à une conique, le lieu de ces points est une courbe de l'ordre $m + n$.

Si la conique est l'ensemble de droites, on en conclut, entre autres, ce corollaire :

Si un angle droit tourne autour de son sommet, les tangentes aux points où l'un de ses côtés coupe une courbe U^n_m rencontrent l'autre côté sur une courbe d'ordre $m + n$.

44. Sur chaque tangente d'une courbe U^n on prend

les deux points conjugués par rapport à deux coniques C, C′ : le lieu de ces points est une courbe de l'ordre $3n$.

45. Le lieu d'un point duquel on peut mener deux tangentes d'une courbe U^n, conjuguées par rapport à une conique, est une courbe de l'ordre $n(n-1)$, qui a $2n$ points multiples d'ordre $(n-1)$ sur la conique.

46. Les cordes d'une courbe U_m dont les extrémités sont conjuguées par rapport à une conique enveloppent une courbe de la classe $m(m-1)$.

47. De chaque point a d'une courbe U_m on mène deux tangentes à deux courbes $U^{n'}$, $U^{n''}$, et l'on prend sur ces tangentes les conjugués du point a par rapport à une conique : la droite qui joint ces deux points conjugués enveloppe une courbe de la classe $3mn'n''$.

48. Si de chaque point a d'une courbe U_m on mène des tangentes à une courbe $U^{n'}$, ces tangentes rencontrent la polaire du point a, relative à une conique, en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $2mn'$.

CHAPITRE IV.

PROPRIÉTÉS DIVERSES DES COURBES GÉOMÉTRIQUES AUXQUELLES DONNE LIEU LA PRÉSENCE D'UNE CONIQUE.

49. Si l'on mène, de chaque point a d'une conique, des tangentes à une courbe U^n, et des droites aux points de contact de la conique et de ses tangentes parallèles aux tangentes de U^n, ces droites enveloppent une courbe de la classe $4n$.

50. Si par chaque point d'une conique on mène les tangentes à une courbe U^n, et des droites faisant avec ces tangentes des angles de grandeur donnée (comptés dans un sens de rotation déterminé), ces droites enveloppent une courbe de la classe $4n$.

51. Une conique intercepte sur les tangentes d'une courbe U^n, de la classe n, des segments :

1° Les milieux de ces segments sont sur une courbe de l'ordre $2n$;

2° Les perpendiculaires élevées par ces points milieux enveloppent une courbe de la classe n.

52. Si de chaque point d'une conique on mène deux tangentes à une courbe U^n, la corde qu'elles interceptent dans la conique enveloppe une courbe de la classe $n(n-1)$.

53. Les perpendiculaires abaissées des pôles des tangentes d'une courbe U^n, pris par rapport à une conique, sur ces tangentes, enveloppent une courbe de la classe $2n$;

Les pieds de ces perpendiculaires sont sur une courbe d'ordre $3n$.

54. Si de chaque point d'une courbe U_m on mène deux tangentes à une conique, les points milieux des cordes de contact sont sur une courbe de l'ordre $2m$;

Les perpendiculaires élevées par ces points sur les cordes de contact enveloppent une courbe de la classe $3m$;

Et les perpendiculaires élevées par les extrémités des cordes enveloppent une courbe de la classe $4m$.

55. Par chaque point a d'une courbe U_m on mène les tangentes d'une courbe $U^{n'}$: ces tangentes rencontrent la polaire du point a, relative à une conique, en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $2mn'$.

56. Les tangentes d'une courbe U^n rencontrent les diamètres d'une conique conjugués aux diamètres perpendiculaires aux tangentes en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $2n$, qui a trois points multiples d'ordre n; l'un est le centre de la conique, et les deux autres sont à l'infini sur ses axes.

57. Les normales d'une courbe U_m^n rencontrent les diamètres d'une conique dont les conjugués sont perpen-

diculaires aux normales, en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $m + 2n$, qui a un point multiple d'ordre $m + n$ au centre de la conique, et deux points multiples d'ordre n à l'infini sur les axes de la conique.

58. Si l'on circonscrit à une conique des quadrilatères dont deux sommets opposés soient deux points correspondants sur deux courbes homographiques U_m, $U_{m'}$, le lieu des deux autres sommets est une courbe d'ordre $4mm'$.

59. De chaque point d'une courbe U_m on mène deux tangentes à une conique, et l'on abaisse sur la corde de contact une oblique sous un angle de grandeur donnée, dans un sens de rotation déterminé :

1° Ces obliques enveloppent une courbe de la classe $2m$;

2° Leurs pieds sont sur une courbe de l'ordre $3m$.

CHAPITRE V.

PROPRIÉTÉS DIVERSES DES COURBES GÉOMÉTRIQUES.

60. En chaque point a d'une courbe U_m^n on mène la normale, laquelle rencontre la courbe en $(m - 1)$ points : les tangentes en ces points rencontrent la tangente du point a en $(m - 1)$ points dont le lieu est une courbe de l'ordre $n[n + 2(m - 2)]$.

61. Le lieu du sommet d'un angle droit dont un côté est tangent et l'autre est normal à une courbe U_m^n est une courbe de l'ordre $(n - 1)(m + n)$.

62. Le lieu du sommet d'un angle droit dont les côtés sont normaux à une courbe U_m^n est une courbe de l'ordre $n(m + n - 1)$.

63. Un angle droit tourne autour de son sommet : les tangentes aux points où un de ses côtés rencontre une

courbe U_m^n coupent l'autre côté sur une courbe d'ordre $m+n$.

64. Sur chaque tangente d'une courbe U^n se trouvent deux points correspondants dans deux figures homographiques : le lieu de ces points est une courbe de l'ordre $2n$.

65. Si de chaque point d'une conique on abaisse des normales sur deux courbes U_m^n, $U_{m'}^{n'}$, les cordes que ces normales interceptent deux à deux dans la conique enveloppent une courbe de la classe $2(m+n)(m'+n')$.

66. Les tangentes d'une courbe $U^{n'}$ coupent une courbe U_m^n en des points où l'on mène les normales : ces normales se coupent deux à deux sur une courbe de l'ordre $\frac{1}{2}n'[2m(m-1)+n(2m-3)]$.

67. Le lieu d'un point d'où l'on peut mener à deux courbes U^n, $U^{n'}$ deux tangentes faisant un angle de grandeur donnée, dans un sens de rotation déterminé, est une courbe de l'ordre $2nn'$, qui a deux points multiples d'ordre nn' aux deux points circulaires à l'infini.

68. Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une courbe U^n est une courbe de l'ordre $n(n-1)$, qui a deux points multiples d'ordre $\frac{n(n-1)}{2}$ aux deux points circulaires de l'infini, et qui passe par les $2n$ points de contact des tangentes de U^n, menées par ces deux points circulaires.

69. Les cordes qu'un angle de grandeur donnée, tournant autour de son sommet, intercepte dans une courbe U_m enveloppent une courbe de la classe $2m(m-1)$.

Lorsque l'angle est droit, la classe de la courbe est $m(m-1)$.

70. 1° Les cordes comprises entre deux courbes U_m, $U_{m'}$, qui sont vues d'un point O sous un angle droit, enveloppent une courbe de la classe $2mm'$.

2° Les cordes vues sous des angles qui ont la même bissectrice enveloppent uue courbe de la classe $2mm'$.

3° Les cordes qui ont leurs milieux sur une droite enveloppent une courbe de la classe $2mm'$.

71. Si par les points où les tangentes d'une courbe U^n rencontrent une courbe $U_{m'}$ on mène les perpendiculaires à ces tangentes, ces perpendiculaires enveloppent une courbe de la classe $2nm'$.

72. Si autour de deux points fixes on fait tourner deux rayons qui se correspondent homographiquement, les cordes qu'ils interceptent dans une courbe U_m enveloppent une courbe de la classe $2m(m-1)$.

73. Les milieux des segments interceptés par une courbe U_m sur les tangentes d'une courbe $U^{n'}$ sont sur une courbe de l'ordre $n'm(m-1)$.

74. Si sur chaque tangente d'une courbe U^n on prend les milieux des segments qui ont pour extrémités deux points de deux courbes $U_{m'}$, $U_{m''}$, ces points milieux sont sur une courbe de l'ordre $2m'm''n$.

75. Les cordes d'une courbe U_m qui ont leurs milieux sur une courbe $U_{m'}$ enveloppent une courbe de la classe $m'(m-1)$.

76. Par les points où les tangentes d'une courbe $U^{n'}$ rencontrent une courbe U_m, on mène des perpendiculaires à ces tangentes : ces perpendiculaires enveloppent une courbe de la classe $2mn'$, qui a une tangente multiple d'ordre mn' à l'infini.

77. On a une conique et deux tangentes fixes A, A', que chaque autre tangente rencontre en deux points a, a'; de chaque point a on mène les normales à une courbe U_m^n, et du point correspondant a' on mène les normales à une seconde courbe $U_{m'}^{n'}$: ces normales rencontrent les premières sur une courbe de l'ordre $2(m+n)(m'+n')$.

78. Lorsque deux courbes U_m^n, U'^n_m sont homographiques, les tangentes aux points de l'une rencontrent les normales aux points correspondants de l'autre sur une courbe de l'ordre $m + 2n$.

79. De deux points correspondants de deux courbes homographiques U_m, U'_m, on mène des tangentes à une courbe V^r, de la classe r, ces tangentes se coupent deux à deux en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $2mr(r-1)$.

80. Les tangentes aux courbes U^n, U'^n en leurs points correspondants se coupent sur une courbe d'ordre $2n$, qui a trois points multiples d'ordre n situés aux trois points qui, considérés comme appartenant à la première figure, sont eux-mêmes leurs homologues dans la seconde figure.

Observation. — La plupart des théorèmes précédents donnent lieu chacun à un ou deux autres, dans lesquels on prend pour hypothèse la conclusion du théorème primitif. On en a vu des exemples dans ma Communication du 10 avril (*Comptes rendus*, t. LXXII). Je n'ai point énoncé ici ces théorèmes que l'on forme sans difficulté, et qui, du reste, se démontrent aussi directement par le seul secours du Principe de correspondance. On conçoit qu'il en est de même de tous les théorèmes *corrélatifs*, auxquels suffit aussi la même méthode de raisonnement, et dont il est inutile de rapporter ici les énoncés.