Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 10 (1871), p. 379-383

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__379_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 923

(voir 2e série, t. VIII, p 47),

PAR M. L. BÉDOREZ,
Élève du lycée de Douai.

Deux coniques semblables et semblablement placées sont tangentes en un point A. *Par ce point* A *on mène une corde* AB *dans l'une des coniques, et la corde* AC *perpendiculaire à* AB *dans l'autre; on joint* BC, *du point* A *on abaisse une perpendiculaire* AI *sur* BC : *trouver le lieu du point* I *quand* AB *tourne autour du point* A. (LAFONT.)

Je prends pour axe des y la tangente au point A, et comme axe des x la normale au même point. Les deux coniques auront pour équations

$$\begin{gathered} Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - 2Dx = 0, \\ Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - 2D_1x = 0. \end{gathered}$$

Soit (x_0, y_0) un point du lieu; la droite BC, perpendiculaire à AI, a pour coefficient angulaire $-\frac{x_0}{y_0}$, et par suite, pour équation,

$$y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0).$$

Considérons la conique formée par cette droite et l'axe des y, puis une courbe du deuxième ordre passant par les points d'intersection de ce système avec une des deux coniques proposées, la première par exemple : son équation sera

$$[y_0(y-y_0)+x_0(x-x_0)]x+\lambda(Ax^2+Bxy+Cy^2-2Dx)=0.$$

Si l'on exprime que cette équation représente deux droites passant par l'origine, il vient

$$\lambda = -\frac{x_0^2+y_0^2}{2D};$$

par suite, l'équation des deux droites AB, AD sera

$$\begin{aligned}&[A(x_0^2+y_0^2)-2Dx_0]x^2\\&\quad+2[B(x_0^2+y_0^2)-Dy_0]xy+C(x_0^2+y_0^2)y^2=0.\end{aligned}$$

De même, pour les droites AC, AE,

$$\begin{aligned}&[A(x_0^2+y_0^2)-2D_1x_0]x^2\\&\quad+2[B(x_0^2+y_0^2)-D_1y_0]xy+C(x_0^2+y_0^2)y^2=0.\end{aligned}$$

Nous allons chercher la condition pour que, dans chacun des deux systèmes, il y ait une droite perpendiculaire à une droite de l'autre. Pour simplifier les calculs, prenons les équations sous la forme

$$\begin{aligned}ax^2+2bxy+cy^2&=0,\\a_1x^2+2b_1xy+cy^2&=0.\end{aligned}$$

L'équation aux coefficients angulaires des deux premières droites est

$$(1)\qquad a+2bm+cm^2=0.$$

Si nous supposons les équations des deux dernières mises sous la forme $y = -\frac{1}{m}x$, l'équation en m sera

$$(2) \qquad a_1 m^2 - 2b_1 m + c = 0.$$

Il faut et il suffit que les équations (1) et (2) aient une racine commune. La condition connue est

$$(aa_1 - c^2)^2 + 4(ba_1 + b_1 c)(ab_1 + bc) = 0.$$

Si nous remplaçons les quantités a, a_1, b, b_1, c par leurs valeurs, en supprimant les indices et posant $x^2 + y^2 = \rho^2$, il vient, pour l'équation du lieu,

$$\begin{aligned}
&[(A\rho^2 - 2Dx)(A\rho^2 - 2D_1 x) - C^2\rho^4]^2 \\
&\quad + 4[B\rho^2 - Dy)(A\rho^2 - 2D_1 x) + (B\rho^2 - D_1 y)C\rho^2] \\
&\qquad \times [(B\rho^2 - D_1 y)(A\rho^2 - 2Dx) + (B\rho^2 - Dy)C\rho^2] = 0.
\end{aligned}$$

Ordonnons par rapport aux puissances de ρ, supprimons le facteur ρ^2, et posons $m = D + D_1$, $p = DD_1$, nous avons

$$(\mathrm{I})\left\{\begin{aligned}
&(A + C)^2[(A - C)^2 + 4B^2]\rho^6 \\
&\quad -4m(A + C)[A(A - C)x + 2B^2 x + B(A + C)y]\rho^4 \\
&\quad +4[Am^2(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2) \\
&\quad +p[2(A^2 - C^2 + 2B^2)x^2 + 8BCxy + (A - C)^2 y^2]\rho^2 \\
&\quad -8mpx[Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + A(x^2 + y^2)] + 16p^2 x^2 = 0.
\end{aligned}\right.$$

Le lieu est donc une courbe du sixième ordre; les points circulaires à l'infini sont des points triples, l'origine est un point de rebroussement, la tangente de rebroussement Oy a un contact effectif du deuxième ordre.

Si l'on pose

$$\frac{D}{A + C} = K, \quad \frac{D_1}{A + C} = K_1,$$

d'où

$$m = (K + K_1)(A + C), \quad p = KK_1(A + C)^2;$$

si l'on groupe par rapport aux diverses puissances de A, B, C, on trouve que l'équation de la courbe peut s'écrire

$$
\text{(II)}\left\{
\begin{aligned}
&(\rho^2 - 2Kx)(\rho^2 - 2K_1x)\\
&\quad\times\Big\{\rho^2[(A-C)^2+4B^2]\\
&\qquad -2(K+K_1)(A+C)[2By+(A-C)x]+4KK_1(A+C)^2\Big\}\\
&\qquad\qquad +4(K-K_1)^2C\rho^2(Ay^2-2Bxy+Cx^2]=0.
\end{aligned}\right.
$$

On verrait facilement que $\rho^2 - 2Kx = 0$, $\rho^2 - 2K_1x = 0$ sont, *pour chacune des coniques*, le lieu des projections du point A sur les hypoténuses des triangles rectangles pivotant autour du point A.

On peut encore écrire, après avoir posé

$$H = (A-C)^2 + 4B^2,$$

$$
\text{(III)}\left\{
\begin{aligned}
&(\rho^2 - 2Kx)(\rho^2 - 2K_1x)\\
&\quad\times\Bigg\{\left[x-(K+K_1)\frac{(A+C)(A-C)}{H}\right]^2\\
&\qquad+\left[y-\frac{2(K+K_1)(A+C)B}{H}\right]^2-(K-K_1)^2\frac{(A+C)^2}{H}\Bigg\}\\
&\qquad\qquad+4\frac{(K-K_1)^2C}{H}\rho^2(Ay^2-2Bxy+Cx^2)=0.
\end{aligned}\right.
$$

Les trois premiers facteurs égalés à zéro donnent des cercles. La forme (III) met donc en évidence la propriété suivante du lieu : Le produit des carrés des distances d'un point du lieu à trois cercles fixes est proportionnel au produit du carré de sa distance à l'origine multiplié par le produit de ses distances à deux droites fixes passant par l'origine; ces droites sont perpendiculaires aux directions asymptotiques des coniques données.

De plus, ces deux droites donnent, par leurs intersections avec les trois cercles, huit points du lieu différents de l'origine. Les deux droites imaginaires $x^2+y^2=0$ donnent, par leurs intersections avec le troisième cercle, deux points différents des points circulaires. En outre, les points circulaires, qui sont des points triples de la courbe, équivalent à douze points simples, et l'origine, qui est un point double, à trois points simples.

Maintenant, si l'on cherche les intersections de la courbe avec l'axe des y, on trouve deux points différents de l'origine. On connaît donc en tout vingt-sept points de la courbe. C'est juste autant qu'il en faut pour la déterminer.

Différents cas particuliers peuvent être signalés :

1° $A + C = 0$. Les deux coniques sont des hyperboles équilatères. Remontons à la forme (I). Il est visible que le degré de la courbe s'abaisse au quatrième. Son équation devient alors

$$4p^2[Am^2(Ax^2 + 2Bxy - Ay^2) + 4p(Bx - Ay)^2] \\ - 16px^2[m(Ax + By) - p] = 0.$$

2° Nous supposerons que l'on ait *en outre* $D + D_1 = 0$ ou $m = 0$. Les hyperboles équilatères seront alors égales et opposées. Le lieu devient

$$(x^2 + y^2)(Bx - Ay)^2 + px^2 = 0.$$

C'est une courbe du quatrième ordre ayant pour centre l'origine. Elle a deux asymptotes réelles qui sont parallèles au diamètre conjugué de Oy dans les deux hyperboles données.

3° Soit $D = D_1$. Les deux coniques se confondent. En portant cette hypothèse dans la forme (III), on a

$$\left(x^2 + y^2 - \frac{2D}{A+C}x\right)^2 \\ \times \left\{\left[x - \frac{2D(A-C)}{H}\right]^2 + \left(y - \frac{4DB}{H}\right)^2\right\} = 0.$$

On retrouve ici le cercle dont nous avons parlé plus haut, ce que l'on devait prévoir.