

A. DE GROSSOUVRE

**Solution de la question proposée au
concours d'agrégation (1871)**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 10
(1871), p. 372-379

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__372_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1871, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS
D'AGRÉGATION (1871);**

PAR M. A. DE GROSSOUVRE,

Élève Ingénieur des Mines.

On donne trois points fixes ; on demande de trouver le lieu des centres des ellipsoïdes de révolution pour lesquels ces trois points sont les extrémités de trois diamètres conjugués.

Il est aisé de voir que ces ellipsoïdes passent tous par une ellipse unique, circonscrite au triangle formé par les trois points donnés, ayant en chaque sommet pour tangente la parallèle au côté opposé, et pour centre le point de rencontre des médianes de ce triangle. En outre, si, pour l'un de ces ellipsoïdes, on considère le tétraèdre formé par le triangle et les trois plans diamétraux conjugués contenant les côtés de ce triangle, et le tétraèdre formé par le plan du triangle et les plans tangents aux trois sommets, on voit que ces deux tétraèdres sont semblables et que leurs arêtes homologues sont dans le rapport de 1 à 2; de sorte que, O étant le centre d'un des

ellipsoïdes, C le centre de l'ellipse, M l'extrémité du diamètre OC, S le pôle du plan de l'ellipse, on a

$$SC = 2 OC;$$

et comme

$$\overline{OM}^2 = OS \cdot OC,$$

il en résulte

$$\overline{OM}^2 = 3 \overline{OC}^2.$$

De plus, deux systèmes de diamètres conjugués étant situés sur un cône du second degré, s'il existe un système de trois diamètres conjugués ayant leurs extrémités sur l'ellipse, il y en aura une infinité d'autres jouissant de cette même propriété; de sorte que le lieu est indépendant de la position des sommets des triangles sur l'ellipse. et l'on peut substituer à la condition énoncée, celle de passer par une ellipse donnée, dont le plan intercepte sur le demi-diamètre conjugué une longueur qui est dans le rapport de 1 à $\sqrt{3}$ avec celle du demi-diamètre.

Dans un ellipsoïde de révolution, toute section a un de ses axes dans un même plan avec l'axe de l'ellipsoïde, plan qui est perpendiculaire au plan de la section; par suite, le lieu du centre se compose de deux courbes planes situées dans des plans perpendiculaires au plan de l'ellipse et menés par ses axes.

Je prends pour plan de la figure un de ces plans. Soient O le centre d'un des ellipsoïdes; a et b les demi-axes de l'ellipse méridienne; PQ la trace du plan qui coupe l'ellipsoïde suivant l'ellipse donnée, dont les demi-axes sont A et B (le demi-axe A étant dirigé suivant PQ, les points P et Q sont situés sur l'ellipse méridienne); $OM = \rho$ le diamètre conjugué à la direction PQ; $OM' = \rho'$ le diamètre parallèle à PQ; α l'angle des diamètres conjugués OM, OM'.

PC est la longueur du demi-axe A de l'ellipse donnée; et, cette ligne étant parallèle à OM', comme l'on a

$$\overline{OM}^2 = 3\overline{OC}^2,$$

il en résulte, d'après l'équation de l'ellipse rapportée à ses diamètres conjugués, que l'on aura

$$\overline{OM'}^2 = \frac{3}{2}\overline{CP}^2,$$

c'est-à-dire

$$\rho'^2 = \frac{3}{2}A^2.$$

En considérant l'ellipse contenue dans le plan perpendiculaire au plan de la figure et passant par OM, on trouverait de même

$$a^2 = \frac{3}{2}B^2;$$

ce qui montre que tous les ellipsoïdes répondant à la question, et ayant leurs centres dans le plan considéré, ont le rayon de l'équateur constant.

Dans l'ellipse méridienne, on a

$$\rho^2 + \rho'^2 = a^2 + b^2, \quad \rho\rho' \sin\alpha = ab,$$

et, en vertu des relations trouvées, ces égalités deviennent

$$\rho^2 - b^2 = \frac{3}{2}(B^2 - A^2), \quad b = \frac{A}{B}\rho \sin\alpha.$$

Si nous rapportons l'une des courbes planes du lieu à des axes passant par le point C, l'axe des x étant CP, on aura

$$x = \frac{\rho \cos\alpha}{\sqrt{3}}, \quad y = \frac{\rho \sin\alpha}{\sqrt{3}}.$$

En éliminant les quantités b, ρ, α , on arrive à l'équation

$$x^2 + \left(1 - \frac{A^2}{B^2}\right)y^2 = \frac{B^2 - A^2}{2},$$

équation d'une courbe du deuxième degré rapportée à ses axes. L'équation de la courbe située dans le second plan s'obtiendra en changeant A en B. L'une de ces courbes est une ellipse et l'autre une hyperbole ; et ces courbes sont telles, que l'une d'elles a pour sommets les foyers de l'autre.

Remarque. — La formule $\overline{OM}^2 = 3\overline{OC}^2$ montre que le point M décrit un lieu semblable au lieu du point O. Donc :

Pour tous les ellipsoïdes satisfaisant aux conditions de l'énoncé, le lieu des points de contact avec des plans parallèles au plan de l'ellipse donnée, se compose de quatre courbes semblables à celles du lieu des centres ; de plus, l'équateur de ces ellipsoïdes a un rayon constant.

La question se résout aussi très-facilement par le calcul direct se rapportant à des axes rectangulaires dont deux coïncident avec les axes de l'ellipse.

Seconde solution de la même question,

PAR M. E. BONNET,

Ancien Élève de l'École Polytechnique.

Remarque préliminaire. — Soient A, B, C les trois points donnés. On voit facilement que le plan ABC coupera un quelconque des ellipsoïdes suivant une ellipse telle, que les tangentes aux points A, B, C soient parallèles aux côtés BC, AC, AB. Car si M désigne le centre de la surface, le diamètre MA sera conjugué du plan BMC ; par suite, le plan tangent en A sera parallèle à ce dernier plan et coupera le plan ABC, suivant une droite DE, qui sera, à la fois, parallèle à BC et tangente

à la section. On voit donc que les ellipsoïdes considérés devront passer tous par une même ellipse, contenant les trois points donnés et déterminée par cette condition que le triangle ABC soit un triangle inscrit d'aire maximum.

Cela posé, je prends les équations de cette ellipse rapportée à ses axes

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

L'équation générale des ellipsoïdes passant par cette ellipse sera

$$(2) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 + z(2Ax + 2By + Cz + 2D) = 0.$$

Exprimant que cette surface est de révolution, on trouve l'une ou l'autre des conditions suivantes :

$$(3) \quad \begin{cases} B = 0, \\ \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) \left(C - \frac{1}{b^2}\right) - A^2 = 0, \end{cases}$$

ou bien

$$(4) \quad \begin{cases} A = 0, \\ \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) \left(C - \frac{1}{a^2}\right) - B^2 = 0. \end{cases}$$

Je me servirai seulement des conditions (3), les autres donneraient des résultats symétriques.

En faisant $B = 0$ l'équation de la surface devient

$$(5) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 + z(2Ax + Cz + 2D) = 0.$$

Les équations du centre sont

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{x}{a^2} + Az = 0, \\ \frac{y}{b^2} = 0, \\ Ax + Cz + D = 0. \end{cases}$$

Ce qui montre déjà que le lieu des centres sera situé dans le plan zox : la condition (4) aurait donné zoy . Ce résultat était facile à prévoir, parce que l'on sait que la projection de l'axe d'une surface de révolution sur un plan sécant est un axe de la courbe d'intersection.

Il reste à exprimer que les trois points donnés sont les extrémités de trois diamètres conjugués. Ceci se fera simplement en se servant de cette propriété, que le plan passant par les extrémités de trois diamètres conjugués coupe son propre diamètre conjugué OH en un point K , tel que $OH = OK\sqrt{3}$.

L'origine des coordonnées étant ici le point K , si l'on désigne par x l'abscisse du centre O et par X l'abscisse de H , on devra avoir

$$\frac{X}{x} = 1 - \sqrt{3}.$$

L'équation de la surface nous donnera d'ailleurs

$$(7) \quad \frac{X^2}{x^2} \left(\frac{x^2}{a^2} + 2Azx + Cz^2 \right) + 2Dz \frac{X}{x} - 1 = 0.$$

Pour avoir la condition cherchée il nous suffira d'exprimer que cette équation est satisfaite si l'on y porte $\frac{X}{x} = 1 - \sqrt{3}$, ce qui donnera

$$(8) \quad (\sqrt{3} - 1)^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + 2Azx + Cz^2 \right) - 2Dz(\sqrt{3} - 1) - 1 = 0.$$

L'équation du lieu situé dans le plan zox résultera de l'élimination des paramètres A, C, D entre cette équation et les suivantes, que nous récrivons :

$$(9) \quad \begin{cases} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \left(C - \frac{1}{b^2} \right) - A^2 = 0, \\ \frac{x}{a^2} + Az = 0, \\ Ax + Cz + D = 0. \end{cases}$$

Une combinaison des deux dernières donne

$$(10) \quad \frac{x^2}{a^2} + 2Azx + Cz^2 = -Dz,$$

et alors l'équation (8) devient

$$(11) \quad 2Dz + 1 = 0.$$

Si l'on calcule D au moyen de (9) on aura enfin l'équation du lieu

$$(12) \quad \frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2} + \frac{1}{2} = 0.$$

On voit que le lieu complet se compose de deux coniques

$$(I) \quad \begin{cases} y = 0, \\ \frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2} + \frac{1}{2} = 0, \end{cases}$$

$$(II) \quad \begin{cases} x = 0, \\ \frac{y^2}{b^2 - a^2} - \frac{z^2}{a^2} + \frac{1}{2} = 0. \end{cases}$$

Si a désigne le demi-grand axe de l'ellipse, (I) sera une hyperbole ayant l'axe des z pour axe transverse, et (II) sera une ellipse.

On peut remarquer qu'il existe sur l'ellipse ABC une

infinité de groupes de trois points donnant le même lieu géométrique.

Si les trois points donnés forment un triangle équilatéral, l'ellipse ABC devient une circonférence, et le lieu se réduit à l'axe des z .

Note. — Une troisième solution nous a été communiquée par M. Dieu, répétiteur au lycée de Lyon.
