

PAINVIN

**Lieu des sommets des trièdres trirectangles  
dont les côtés sont normaux à une  
surface du second ordre**

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 10  
(1871), p. 337-359

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1871\\_2\\_10\\_\\_337\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__337_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1871, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**LIEU DES SOMMETS DES TRIÈDRES TRIRECTANGLES DONT  
LES COTÉS SONT NORMAUX A UNE SURFACE DU SECOND  
ORDRE;**

PAR M. PAINVIN,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Lyon.

1. Cette question, qu'on s'est posée souvent, n'a jamais été résolue, que je sache; en voici une solution.

Prenons pour exemple un ellipsoïde que nous rapporterons à ses plans principaux; si  $x, y, z$  sont les coordonnées d'un point du lieu, et que  $x_1, y_1, z_1$  soient les coordonnées du pied d'une des normales, on a

$$\frac{x - x_1}{\frac{x_1}{a^2}} = \frac{y - y_1}{\frac{y_1}{b^2}} = \frac{z - z_1}{\frac{z_1}{c^2}} = \lambda, \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} - 1 = 0;$$

on déduit des relations qui précèdent

$$(1^0) \quad x_1 = \frac{a^2 x}{\lambda + a^2}, \quad y_1 = \frac{b^2 y}{\lambda + b^2}, \quad z_1 = \frac{c^2 z}{\lambda + c^2},$$

puis

$$(1) \quad \frac{a^2 x^2}{(\lambda + a^2)^2} + \frac{b^2 y^2}{(\lambda + b^2)^2} + \frac{c^2 z^2}{(\lambda + c^2)^2} - 1 = 0.$$

L'équation (1), du sixième degré en  $\lambda$ , détermine six valeurs de  $\lambda$ , et les équations (1<sup>0</sup>) donnent les coordonnées des pieds des six normales correspondantes; d'ailleurs les cosinus des angles, avec les axes de coordonnées, d'une normale en  $(x_1, y_1, z_1)$  sont proportionnels à

$$\frac{x_1}{a^2}, \quad \frac{y_1}{b^2}, \quad \frac{z_1}{c^2},$$

et par suite à

$$\frac{x}{\lambda + a^2}, \quad \frac{y}{\lambda + b^2}, \quad \frac{z}{\lambda + c^2}.$$

D'après cela, si  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  sont trois des racines de l'équation (1), et si nous écrivons que les normales correspondantes sont perpendiculaires entre elles, on a les trois équations de condition

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{(\lambda_1 + a^2)(\lambda_3 + a^2)} + \frac{y^2}{(\lambda_2 + b^2)(\lambda_3 + b^2)} + \frac{z^2}{(\lambda_1 + c^2)(\lambda_3 + c^2)} = 0, \\ \frac{x^2}{(\lambda_3 + a^2)(\lambda_1 + a^2)} + \frac{y^2}{(\lambda_3 + b^2)(\lambda_1 + b^2)} + \frac{z^2}{(\lambda_3 + c^2)(\lambda_1 + c^2)} = 0, \\ \frac{x^2}{(\lambda_1 + a^2)(\lambda_2 + a^2)} + \frac{y^2}{(\lambda_1 + b^2)(\lambda_2 + b^2)} + \frac{z^2}{(\lambda_1 + c^2)(\lambda_2 + c^2)} = 0. \end{array} \right.$$

Si les équations (2) étaient distinctes, elles détermineraient  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ; et, en écrivant que le premier membre de l'équation (1), rendue entière, est divisible par le produit  $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)$ , on aurait trois relations entre  $x, y, z$ ; il en résulterait alors qu'il n'y a qu'un nombre limité de points satisfaisant aux conditions imposées.

Mais nous allons voir que les équations (2) ne déterminent pas  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ; elles sont seulement équivalentes à deux relations distinctes entre les fonctions symétriques

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \quad \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2, \quad \lambda_1\lambda_2\lambda_3;$$

par conséquent, le lieu cherché sera une courbe gauche.

On peut s'expliquer ce fait en se rappelant que les six normales menées d'un point à une surface du second ordre sont sur un cône du second degré jouissant de la propriété d'avoir une infinité de systèmes de trois génératrices rectangulaires.

2. Pour effectuer le calcul dont je viens d'indiquer le

point de départ, j'adopterai les notations suivantes :

$$(I) \quad \begin{cases} A = x^2 + y^2 + z^2, \\ B = (b^2 + c^2)x^2 + (c^2 + a^2)y^2 + (a^2 + b^2)z^2, \\ C = b^2c^2x^2 + c^2a^2y^2 + a^2b^2z^2; \end{cases}$$

$$(II) \quad \begin{cases} m = a^2 + b^2 + c^2, \\ n = b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2, \\ p = a^2b^2c^2; \end{cases}$$

puis, comme notations auxiliaires :

$$(III) \quad \begin{cases} B' = mA - B = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2, \\ C' = nA - C = a^2(b^2 + c^2)x^2 + b^2(c^2 + a^2)y^2 \\ \quad + c^2(a^2 + b^2)z^2, \\ D' = pA + nB - mC = a^2(b^2 + c^2)^2x^2 + b^2(c^2 + a^2)^2y^2 \\ \quad + c^2(a^2 + b^2)^2z^2; \end{cases}$$

$$(IV) \quad \begin{cases} C'' = -nA + mB + C = (b^2 + c^2)^2x^2 + (c^2 + a^2)^2y^2 \\ \quad + (a^2 + b^2)^2z^2, \\ D'' = -pA + mC = b^2c^2(b^2 + c^2)x^2 + c^2a^2(c^2 + a^2)y^2 \\ \quad + a^2b^2(a^2 + b^2)z^2, \\ E'' = -pB + nC = b^4c^4x^2 + c^4a^4y^2 + a^4b^4z^2. \end{cases}$$

Ceci posé, les équations (2) s'écriront, après avoir chassé les dénominateurs et eu égard aux relations (I), (II), (III), (IV) :

$$(3) \quad \begin{cases} A\lambda_2^2\lambda_1^2 + B\lambda_2\lambda_3(\lambda_2 + \lambda_3) + C(\lambda_2^2 + \lambda_3^2) \\ \quad + C''\lambda_2\lambda_3 + D''(\lambda_2 + \lambda_3) + E'' = 0, \\ A\lambda_3^2\lambda_1^2 + B\lambda_3\lambda_1(\lambda_3 + \lambda_1) + C(\lambda_3^2 + \lambda_1^2) \\ \quad + C''\lambda_3\lambda_1 + D''(\lambda_3 + \lambda_1) + E'' = 0, \\ A\lambda_1^2\lambda_2^2 + B\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2) + C(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \\ \quad - C'\lambda_1\lambda_2 - D''(\lambda_1 + \lambda_2) + E'' = 0. \end{cases}$$

22.



3. Le premier membre de l'équation (1) doit être divisible par

$$\lambda^3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\lambda^2 + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3)\lambda - \lambda_1\lambda_2\lambda_3,$$

c'est-à-dire, en ayant égard aux notations (7), par

$$\lambda^3 - \alpha\lambda^2 + \beta\lambda - \gamma,$$

ou enfin, d'après les valeurs (8), par

$$\lambda^3 - \alpha\lambda^2 + \frac{-B\alpha + nA - mB}{A}\lambda - \frac{C\alpha - pA + mC}{A}.$$

Si l'on pose  $\alpha + m = \mu A$ , l'expression qui précède devient

$$(9) \quad \lambda^3 - (\mu A - m)\lambda^2 - (\mu B - n)\lambda - (\mu C - p).$$

D'ailleurs, eu égard aux notations (I), (II), (III), (IV) du n<sup>o</sup> 2, l'équation (1) développée prend la forme suivante :

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\lambda^3 + m\lambda^2 + n\lambda + p)^2 - B'\lambda^4 - 2C'\lambda^3 \\ - (2pA + D')\lambda^2 - 2pB\lambda - pC = 0. \end{array} \right.$$

Ainsi, en définitive, nous obtiendrons *les équations du lieu cherché* en écrivant que le premier membre de l'équation (10) est divisible par l'expression (9);  $\mu$  est une indéterminée qu'il faudra éliminer.

Nous exprimerons que cette division se fait exactement en écrivant qu'on a identiquement

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\lambda^3 + m\lambda^2 + n\lambda + p)^2 - B'\lambda^4 - 2C'\lambda^3 \\ - (2pA + D')\lambda^2 - 2pB\lambda - pC \\ = [\lambda^3 + m\lambda^2 + n\lambda + p - \mu(A\lambda^2 + B\lambda + C)] \\ \times (\lambda^3 + m\lambda^2 + n\lambda + p + \alpha_1\lambda^2 + \beta_1\lambda + \gamma_1), \end{array} \right.$$

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  étant trois nouvelles indéterminées.

On est ainsi conduit aux *six* relations suivantes, entre lesquelles nous devons éliminer les *quatre* indéterminées

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \mu :$

$$(12) \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 - \mu A = 0, \\ \beta_1 - \mu B - A\mu\alpha_1 = -B', \\ \gamma_1 - \mu C + m(\beta_1 - \mu B) - \mu(A\beta_1 + B\alpha_1) = -2C'; \\ m(\gamma_1 - \mu C) + n(\beta_1 - \mu B) - \mu(A\gamma_1 + B\beta_1 + C\alpha_1) \\ \quad = -2pA - D', \\ n(\gamma_1 - \mu C) + p(\beta_1 - \mu B) - \mu(B\gamma_1 + C\beta_1) = -2pB, \\ p(\gamma_1 - \mu C) - \mu C\gamma_1 = -pC. \end{array} \right.$$

4. Des trois premières équations (12), on déduit :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= A\mu, \\ \beta_1 &= A^2\mu^2 + B\mu - mA + B, \\ \gamma_1 &= A^3\mu^3 + (2AB - mA^2)\mu^2 + (C + AB - mA^2)\mu \\ &\quad + (m^2 - 2n)A - mB + 2C. \end{aligned}$$

Or, si l'on pose

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} U = A^2\mu^1 - B'\mu^1 - B'\mu + m^1 - 2n, \\ V = A\mu^2 - m, \end{array} \right.$$

les valeurs précédentes de  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  pourront s'écrire

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = A\mu, \\ \beta_1 = AV + B\mu + B, \\ \gamma_1 = AU + BV + C\mu + 2C. \end{array} \right.$$

Substituons ces valeurs dans le second groupe des équations (12), il vient, en désignant par X, Y, Z les premiers membres des équations résultantes,

$$\begin{aligned} X &= (A\mu - m)(AU + BV + C\mu + 2C) \\ &\quad + (B\mu - n)(AV + B\mu + B) + AC\mu^1 \\ &\quad + (mC + nB)\mu - 3pA - nB + mC = 0, \\ Y &= (B\mu - n)(AU + BV + C\mu + 2C) \\ &\quad + (C\mu - p)(AV + B\mu + B) + (mC + pB)\mu - 2pB = 0. \\ Z &= (C\mu - p)(AU + BV + C\mu + 2C) + pC\mu - pC = 0. \end{aligned}$$

Développons ces trois dernières équations en conservant les termes en U; puis remplaçons  $A^2\mu^3$  et  $A\mu^2$  à l'aide des relations (13), lorsque ces termes se présenteront dans les autres calculs effectués; on trouve, sans difficulté aucune, que les trois équations qui précèdent peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$(15) \left\{ \begin{array}{l} X = (A^2\mu - B')U + (AB\mu - C')V \\ \quad + A(C\mu^2 + 2C\mu - 3\rho) = 0, \\ Y = (AB\mu - C')U + (B^2\mu - D')V \\ \quad + B(C\mu^2 + 2C\mu - 3\rho) = 0, \\ Z = (AC\mu - \rho A)U + (BC\mu - \rho B)V \\ \quad + C(C\mu^2 + 2C\mu - 3\rho) = 0. \end{array} \right.$$

Il s'agit maintenant d'éliminer  $\mu$  entre les trois équations (15).

5. Posons encore

$$(16) \left\{ \begin{array}{l} M = AC'' - B^2 \\ \quad = (b^2 - c^2)^2 y^2 z^2 + (c^2 - a^2)^2 z^2 x^2 + (a^2 - b^2)^2 x^2 y^2, \\ N = AD'' - BC \\ \quad = a^2(b^2 - c^2)^2 y^2 z^2 + b^2(c^2 - a^2)^2 z^2 x^2 + c^2(a^2 - b^2)^2 x^2 y^2, \\ P = AE'' - C^2 \\ \quad = a^4(b^2 - c^2)^2 y^2 z^2 + b^4(c^2 - a^2)^2 z^2 x^2 + c^4(a^2 - b^2)^2 x^2 y^2, \\ Q = BE'' - CD'' \\ \quad = a^6(b^2 - c^2)^2 y^2 z^2 + b^6(c^2 - a^2)^2 z^2 x^2 + c^6(a^2 - b^2)^2 x^2 y^2; \end{array} \right.$$

puis formons les combinaisons

$$BZ - CY = 0, \quad AZ - CX = 0, \quad AY - BX = 0,$$

on trouve

$$(17) \left\{ \begin{array}{l} BZ - CY = PU + QV = 0, \\ AZ - CX = NU + PV = 0, \\ AY - BX = MU - NV = 0; \end{array} \right.$$



une quelconque de ces équations est une conséquence des deux autres. On peut donc remplacer le système (15) par le système (17), auquel on joindra une des équations (15).

La combinaison des équations (17) nous donne, par exemple,

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\text{NQ} - \text{P}^2)\text{U} = 0, \quad (\text{NQ} - \text{P}^2)\text{V} = 0, \\ \text{ou} \quad (\text{MP} - \text{N}^2)\text{U} = 0, \quad (\text{MP} - \text{N}^2)\text{V} = 0, \\ \text{ou} \quad (\text{MQ} - \text{NP})\text{U} = 0, \quad (\text{MQ} - \text{NP})\text{V} = 0. \end{array} \right.$$

On déduit d'ailleurs des valeurs (16) les identités

$$(16 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{MP} - \text{N}^2 = (b^2 - c^2)^2 (c^2 - a^2)^2 (a^2 - b^2)^2 x^2 y^2 z^2 \text{A}, \\ \text{MQ} - \text{NP} = (b^2 - c^2)^2 (c^2 - a^2)^2 (a^2 - b^2)^2 x^2 y^2 z^2 \text{B}, \\ \text{NQ} - \text{P}^2 = (b^2 - c^2)^2 (c^2 - a^2)^2 (a^2 - b^2)^2 x^2 y^2 z^2 \text{C}. \end{array} \right.$$

D'après cela, comme A, B, C ne peuvent pas être nuls à la fois, il résulte des équations (18)

$$(19) \quad \text{U} = 0, \quad \text{V} = 0,$$

et les équations (15) se réduisent alors à

$$(19 \text{ bis}) \quad \text{C}\mu^2 + 2\text{C}\mu - 3p = 0.$$

Ainsi les équations du lieu cherché s'obtiendront en éliminant  $\mu$  entre les trois équations

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{A}\mu^2 - m = 0, \\ \text{C}\mu^2 + 2\text{C}\mu - 3p = 0, \\ \text{A}^2\mu^3 - \text{B}\mu^2 - \text{B}'\mu + m^2 - 2n = 0, \quad \text{où} \quad \text{B}' = m\text{A} - \text{B}. \end{array} \right.$$

6. L'élimination de  $\mu$  ne présente aucune difficulté; en remplaçant d'abord  $\mu^2$  dans les deux dernières équations (20), il vient

$$\begin{aligned} 2\text{AC}\mu - 3p\text{A} - m\text{C}, \\ \text{AB}\mu - 2\mu\text{A} - m\text{B}. \end{aligned}$$

Comparant ces deux valeurs de  $\mu$ , puis remplaçant  $\mu$  par

$\sqrt{\frac{m}{A}}$ , on est conduit aux trois équations

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} 4mAC^2 = (3pA - mC)^2, \\ mAB^2 = (2nA - mB)^2, \\ 3pAB = C(4nA - mB). \end{array} \right.$$

7. CONCLUSION. — *Le lieu des sommets des trièdres trirectangles dont les côtés sont normaux à l'ellipsoïde*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

est une COURBE GAUCHE définie par les trois équations

$$(\Delta) \quad (22) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1^0) \quad 4mAC^2 = (3pA - mC)^2, \\ (2^0) \quad mAB^2 = (2nA - mB)^2, \\ (3^0) \quad 3pAB = C(4nA - mB). \end{array} \right.$$

Dans ces équations, on a posé

$$(22 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = x^2 + y^2 + z^2, \\ B = (b^2 + c^2)x^2 + (c^2 + a^2)y^2 + (a^2 + b^2)z^2, \\ C = b^2c^2x^2 + c^2a^2y^2 + a^2b^2z^2; \\ m = a^2 + b^2 + c^2, \\ n = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2, \\ p = a^2b^2c^2. \end{array} \right.$$

J'ai dit que la courbe était définie par les trois équations (22); c'est qu'en effet deux quelconques de ces équations seraient insuffisantes pour bien déterminer cette courbe. Ainsi, par exemple, si nous voulons la définir par les deux équations (2<sup>o</sup>) et (3<sup>o</sup>) seulement, nous voyons que les deux surfaces (2<sup>o</sup>) et (3<sup>o</sup>) ont en commun la courbe (A = 0, B = 0), qui est une solution étrangère

à la question, car elle n'appartient pas à la surface (1°); il en serait de même pour les autres combinaisons.

Notons que la courbe ( $A = 0$ ,  $B = 0$ ), solution étrangère, se compose de quatre droites passant par l'origine, et que ces droites sont des *droites doubles* pour la surface (2°).

8. *Remarque I.* — Les trois équations (22) seront vérifiées, et les solutions étrangères écartées, si l'on prend

$$(\Delta) \quad (23) \quad \begin{cases} (4^\circ) & 2nA = m(\rho + 1)B, \\ (5^\circ) & 3\rho A = m(2\rho + 1)C, \\ (6^\circ) & A = m\rho^2, \end{cases}$$

$\rho$  désignant une constante tout à fait arbitraire. Remarquons que la nouvelle arbitraire  $\rho$  est liée à l'ancienne  $\mu$  par la relation

$$\rho = \frac{1}{\mu};$$

ceci résulte évidemment de la comparaison de la première des équations (20) et de la troisième des équations (23).

Les équations (23) sont parfaitement aptes à définir la courbe gauche en question, et nous en fournissent en même temps une construction très-simple.

Pour une valeur donnée à l'arbitraire  $\rho$ , la dernière des équations (23) représente une sphère, et les deux premières déterminent quatre droites passant par le centre de cette sphère; les intersections de ces droites avec la sphère donnent quatre points de la courbe gauche.

9. *Remarque II.* — Après avoir remplacé  $A$ ,  $B$ ,  $C$  par leurs valeurs (22 bis), on peut résoudre les équations

tions (23) par rapport aux  $x^2, y^2, z^2$ ; on trouve ainsi

$$(\Delta) \quad (24) \quad \begin{cases} rx^2 = a_1^2 \rho^2 \left[ a^4 m - \frac{2a^2}{\rho+1} n + \frac{3}{2\rho+1} p \right], \\ ry^2 = b_1^2 \rho^2 \left[ b^4 m - \frac{2b^2}{\rho+1} n + \frac{3}{2\rho+1} p \right], \\ rz^2 = c_1^2 \rho^2 \left[ c^4 m - \frac{2c^2}{\rho+1} n + \frac{3}{2\rho+1} p \right], \end{cases}$$

après avoir posé

$$24 \text{ bis) } \begin{cases} a_1^2 = b^2 - c^2, & m = a^2 + b^2 + c^2, \\ b_1^2 = c^2 - a^2, & n = a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2, \\ c_1^2 = a^2 - b^2; & p = a^2 b^2 c^2; \\ r = a^2 b^2 c^2 + b^2 c^2 a^2 + c^2 a^2 b^2, & \text{ou } r = a^2 a^4 + b^2 b^4 + c^2 c^4. \end{cases}$$

*La COURBE GAUCHE, lieu des sommets des trièdres tri-rectangles normaux à l'ellipsoïde*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

est complètement définie par les équations (24), où  $\rho$  est un paramètre arbitraire.

Les carrés des coordonnées d'un point quelconque de la courbe sont ainsi des fonctions rationnelles fort simples d'un paramètre arbitraire. Il est probable qu'une méthode synthétique pourra conduire plus rapidement à ce résultat remarquable qui se dégage d'une analyse assez délicate.

10. Signalons plusieurs propriétés immédiates de la courbe que nous venons de déterminer :

1° *La courbe gauche  $\Delta$  est du seizième ordre.*

Nous pouvons, en effet, définir cette courbe par les équations (2°) et (3°) du groupe (22) : or les deux sur-

faces ( $2^{\circ}$ ) et ( $3^{\circ}$ ) sont des ordres  $6^{eme}$  et  $4^{eme}$  respectivement; il faut d'ailleurs faire abstraction de la courbe commune ( $A = 0, B = 0$ ) qui n'appartient pas à la surface ( $1^{\circ}$ ); et, comme cette courbe se compose de quatre droites qui sont des droites doubles pour la surface ( $2^{\circ}$ ), il reste, en définitive,  $24 - 4 \cdot 2 = 16$  pour l'ordre de la courbe gauche  $\Delta$ .

La même conclusion se déduit facilement des équations ( $1^{\circ}$ ) et ( $3^{\circ}$ ).

La question est plus délicate si l'on définit la courbe par les deux surfaces

$$(1^{\circ}) \quad 4mAC^2 = (3pA - mC)^2,$$

$$(2^{\circ}) \quad mAB^2 = (2nA - mB)^2.$$

Ces surfaces sont toutes deux du sixième ordre; mais elles ont d'abord en commun deux cercles confondus avec le cercle imaginaire de l'infini, cercle qui n'appartient pas à la surface ( $3^{\circ}$ ); l'ordre de la courbe se réduit donc déjà à  $(36 - 4) = 32$ .

De plus, la courbe

$$B(3pA - mC) = 2C(mB - 2nA),$$

$$mAB^2 = (2nA - mB)^2$$

appartient (sauf les quatre droites doubles  $A = 0, B = 0$ ) à la surface ( $1^{\circ}$ ), et n'appartient pas à la surface ( $3^{\circ}$ ): on a ainsi une nouvelle courbe du seizième ordre dont il faut faire abstraction, et il reste, pour l'ordre définitif,  $32 - 16 = 16$ .

C. Q. F. D.

$2^{\circ}$  *Le centre de l'ellipsoïde est un point multiple du huitième ordre pour la courbe gauche  $\Delta$ ; les huit tangentes en ce point forment quatre couples de deux droites coïncidentes qui sont données par les équations*

$$(25) \quad \frac{A}{m} \quad \frac{B}{2n} = \frac{C}{3p}.$$

d ou l'on tire

$$5b_1, \quad \frac{x}{a} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}.$$

En effet, la courbe étant définie par les équations (2°) et (3°) du groupe (22), on voit que l'origine est un point multiple dont les tangentes sont fournies par les équations

$$2nA - mB = 0, \quad C(4nA - mB) - 3pAB = 0;$$

ce sont deux cônes du quatrième ordre qui ont seize génératrices communes formant huit couples de deux droites coincidentes; parmi ces huit couples se trouvent les quatre couples ( $A = 0, B = 0$ ) dont nous devons faire abstraction; il reste alors les quatre couples déterminés par les équations (25).

3° Directions asymptotiques, asymptotes de la courbe  $\Delta$ .

Les valeurs infinies de  $x, y, z$  correspondent aux valeurs 0,  $-1$  et  $-\frac{1}{2}$  du paramètre  $\rho$ ; on trouve ainsi, à l'aide des équations (24),

$$(26) \left\{ \begin{array}{l} (1^0) \frac{x}{a_1 a_1} = \frac{y^2}{b_1^2 b_1^2} = \frac{z}{c_1 c_1} \quad \text{ou} \quad B = 0, \quad C = 0, \\ (2^0) \frac{x^2}{a^2 a_1^2} = \frac{y^2}{b^2 b_1^2} = \frac{z^2}{c^2 c_1^2} \quad \text{ou} \quad C = 0, \quad A = 0, \\ (3^0) \frac{x^2}{a_1^2} = \frac{y^2}{b_1^2} = \frac{z^2}{c_1^2} \quad \text{ou} \quad A = 0, \quad B = 0. \end{array} \right.$$

Les quatre premières directions (1°) correspondent à quatre points doubles à l'infini sur la courbe gauche; les asymptotes s'obtiendront à l'aide des équations (22) [(2°) et (3°)]; elles seront les intersections du plan tangent au point considéré à l'infini sur la surface (3°) avec

la polaire du second ordre du même point relative à la surface (2°).

Les quatre directions (2°) correspondent à quatre points simples à l'infini sur la courbe gauche; les asymptotes seront les intersections des plans tangents au point considéré à l'infini aux surfaces (2°) et (3°).

Les quatre directions (3°) correspondent également à quatre points simples à l'infini sur la courbe gauche; pour obtenir l'asymptote en un de ces points, on prendra la polaire du deuxième ordre de ce point relative à la surface (2°), et le plan tangent à la surface (3°); une des droites d'intersection sera l'asymptote cherchée.

Ces calculs n'offrent aucune difficulté et conduisent à des résultats simples.

4° La courbe gauche  $\Delta$  rencontre l'ellipsoïde donné

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \quad \text{ou} \quad C - p = 0$$

en trente-deux points dont les coordonnées sont fournies par les équations

$$(27) \left\{ \begin{array}{l} (1^\circ) \left\{ \begin{array}{l} rx^2 = a_1^2 a^6, \\ ry^2 = b_1^2 b^6, \\ rz^2 = c_1^2 c^6, \end{array} \right. \text{ou} \left\{ \begin{array}{l} A = m, \\ B = n, \\ C = p; \end{array} \right. \\ \\ (2^\circ) \left\{ \begin{array}{l} 9rx^2 = a_1^2 a^2 (a^2 m - 3n + 9b^2 c^2), \\ 9ry^2 = b_1^2 b^2 (b^2 m - 3n + 9c^2 a^2), \\ 9rz^2 = c_1^2 c^2 (c^2 m - 3n + 9a^2 b^2), \end{array} \right. \text{ou} \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{m}{9}, \\ B = \frac{n}{3}, \\ C = p; \end{array} \right. \\ \\ (3^\circ) \left\{ \begin{array}{l} t = 0, \quad A = 0, \quad C = 0; \\ \\ (4^\circ) \left\{ \begin{array}{l} t = 0, \quad B = 0, \quad C = 0; \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$t = 0$  est le plan de l'infini, et on a posé

$$r = a_1^2 b^2 c^2 + b_1^2 c^2 a^2 + c_1^2 a^2 b^2 = a_1^2 a^2 + b_1^2 b^2 + c_1^2 c^2.$$

Les groupes (1°) et (2°) déterminent chacun *huit* points où la courbe  $\Delta$  rencontre l'ellipsoïde, ce qui donne 16 points.

Le groupe (4°) détermine quatre points à l'infini ; comme ces points sont des points doubles de la courbe gauche, il en résulte 8 points de rencontre.

Enfin le groupe (3°) donne quatre points à l'infini ; en ces points la courbe gauche *touche* l'ellipsoïde, ce qui équivaut à 8 points de rencontre.

On a bien ainsi les 32 points de rencontre de la courbe gauche et de l'ellipsoïde.

11. On peut encore se proposer la question suivante :

QUEL EST LE LIEU DES PIEDS, SUR L'ELLIPSOÏDE DONNÉ, DES NORMALES RECTANGULAIRES ENTRE ELLES ?

Si  $x, y, z$  sont les coordonnées du point d'où sont issues les normales, les coordonnées  $x_1, y_1, z_1$  du pied de l'une d'elles sont

$$x_1 = \frac{a^2 x}{\lambda + a^2}, \quad y_1 = \frac{b^2 y}{\lambda + b^2}, \quad z_1 = \frac{c^2 z}{\lambda + c^2};$$

pour les trois normales rectangulaires, les valeurs de  $\lambda$  sont (n° 3) les trois racines de l'équation

$$\lambda^3 + m\lambda^2 + n\lambda + p - \mu(A\lambda^2 + B\lambda + C) = 0.$$

Quant aux trois autres normales, les valeurs de  $\lambda$  auxquelles elles correspondent sont les trois racines de l'équation

$$\lambda^3 + m\lambda^2 + n\lambda + p + \alpha_1\lambda^2 + \beta_1\lambda + \gamma_1 = 0;$$

ceci résulte évidemment de l'identité [(11), n° 3].

Or, si l'on remarque que, pour les points  $(x, y, z)$  d'où sont issues les normales considérées, les quantités U



et  $V$  sont nulles (n° 5), les égalités [(14), n° 4] donnent alors

$$\alpha_1 = A\mu, \quad \beta_1 = B\mu + B, \quad \gamma_1 = C\mu + 2C.$$

Nous pouvons remplacer  $\mu$  par  $\frac{1}{\rho}$  (n° 8), et  $\rho$  aura la même valeur que dans les équations (23) et (24), (n°s 8 et 9).

Nous arrivons ainsi à cette double conséquence :

1° Les coordonnées  $X, Y, Z$  des pieds des trois normales rectangulaires menées d'un point  $(x, y, z)$  de la courbe  $\Delta$  seront données par les égalités

$$(28) \quad X = \frac{a^2 x}{\lambda + a^2}, \quad Y = \frac{b^2 y}{\lambda + b^2}, \quad Z = \frac{c^2 z}{\lambda + c^2},$$

et les trois valeurs de  $\lambda$  seront les racines de l'équation

$$(28 \text{ bis}) \quad \lambda^3 + m\lambda^2 + n\lambda + p - \frac{1}{\rho}(A\lambda^2 + B\lambda + C) = 0;$$

2° Les coordonnées  $X', Y', Z'$  des pieds des trois normales non rectangulaires menées du même point  $(x, y, z)$  de la courbe  $\Delta$  seront données par les égalités

$$(29) \quad X' = \frac{a^2 x}{\lambda' + a^2}, \quad Y' = \frac{b^2 y}{\lambda' + b^2}, \quad Z' = \frac{c^2 z}{\lambda' + c^2},$$

et les trois valeurs de  $\lambda'$  seront les racines de l'équation

$$(29 \text{ bis}) \quad \lambda'^3 + m\lambda'^2 + n\lambda' + p + \frac{1}{\rho}(A\lambda'^2 + B\lambda' + C) + B\lambda' + 2C = 0.$$

Dans les deux cas,  $x, y, z$  sont des fonctions de  $\rho$  définies par les équations (23) ou (24), (n°s 8 ou 9);  $A, B, C$  sont des fonctions de  $x, y, z$  définies par les égalités [(22 bis), n° 7].

Cette proposition, qui va nous servir pour aborder la question que nous nous sommes posée, pourra être fort

utile si l'on veut pousser plus loin l'étude des propriétés des systèmes de normales rectangulaires.

12. Cherchons maintenant le lieu des pieds, sur l'ellipsoïde donné, des normales rectangulaires.

Les coordonnées  $X, Y, Z$  du pied d'une de ces normales sont données par les équations (28), et  $\lambda$  doit vérifier l'équation (28 bis). Des équations (28) on tire

$$(30) \quad x = \frac{X}{a^2}(\lambda + a^2), \quad y = \frac{Y}{b^2}(\lambda + b^2), \quad z = \frac{Z}{c^2}(\lambda + c^2).$$

Si l'on substitue les valeurs (30) de  $x, y, z$  dans l'équation (1) du n° 1, qui doit être évidemment vérifiée, il vient

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} - 1 = 0, \\ \text{ou} \\ b^2 c^2 X^2 + a^2 c^2 Y^2 + a^2 b^2 Z^2 = a^2 b^2 c^2; \end{array} \right.$$

c'est l'équation de l'ellipsoïde donné.

Il faut maintenant substituer les valeurs (30) de  $x, y, z$  dans l'équation (28 bis), puis dans les équations (23), et éliminer  $\lambda$  et  $\rho$  entre trois des équations ainsi formées.

13. Pour faciliter les calculs dont je viens d'indiquer la marche, je vais d'abord chercher les expressions des quantités  $A, B, C$  en fonction de  $X, Y, Z$  et  $\lambda$ , et, dans ce but, j'adopterai les notations suivantes :

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1 = X^2 + Y^2 + Z^2, \\ B_1 = (b^2 + c^2) X^2 + (c^2 + a^2) Y^2 + (a^2 + b^2) Z^2, \\ C_1 = b^2 c^2 X^2 + c^2 a^2 Y^2 + a^2 b^2 Z^2; \\ D_1 = b^4 c^4 X^2 + c^4 a^4 Y^2 + a^4 b^4 Z^2, \\ E_1 = (b^2 + c^2) b^4 c^4 X^2 + (c^2 + a^2) c^4 a^4 Y^2 + (a^2 + b^2) a^4 b^4 Z^2, \\ F_1 = b^6 c^6 X^2 + c^6 a^6 Y^2 + a^6 b^6 Z^2; \end{array} \right.$$

puis rappelons-nous qu'on a posé (n° 17)

$$(32 \text{ bis}) \left\{ \begin{array}{l} A = x^2 + y^2 + z^2, \\ B = (b^2 + c^2)x^2 + (c^2 + a^2)y^2 + (a^2 + b^2)z^2, \\ C = b^2c^2x^2 + c^2a^2y^2 + a^2b^2z^2; \\ m = a^2 + b^2 + c^2, \\ n = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2, \\ p = a^2b^2c^2. \end{array} \right.$$

Par la substitution des valeurs (30), les expressions de A, B, C prendront, eu égard aux notations (32), les valeurs suivantes :

$$(33) \left\{ \begin{array}{l} p^2A = D_1\lambda^2 + 2pC_1\lambda + p^2A_1, \\ p^2B = E_1\lambda^2 + 2p(mC_1 - pA_1)\lambda + p^2B_1, \\ p^2C = F_1\lambda^2 + 2pD_1\lambda + p^2C_1; \end{array} \right.$$

de là on déduit, après quelques transformations faciles,

$$(34) \quad p^2(A\lambda^2 + B\lambda + C) = (\lambda^3 + m\lambda^2 + n\lambda + p)(\lambda D_1 + pC_1).$$

Si l'on substitue les valeurs (30) dans l'équation (28 bis) et qu'on ait égard à la relation (34), il vient, après avoir supprimé un facteur différent de zéro,

$$(35) \quad p^2\rho = \lambda D_1 + pC_1.$$

En remplaçant  $x$ ,  $y$ ,  $z$  par leurs valeurs (30) dans les équations [(23), n° 8], et ayant égard pour cela aux relations (33), on trouve

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} D_1\lambda^2 + 2pC_1\lambda + p^2A = mp^2\rho^2, \\ (2\rho + 1)[F_1\lambda^2 + 2pD_1\lambda + p^2C_1] = 3p^3\rho^2, \\ (\rho + 1)[E_1\lambda^2 + 2p(mC_1 - pA_1)\lambda + p^2B_1] = 2np^2\rho^2. \end{array} \right.$$

Il s'agit maintenant d'éliminer  $\lambda$  et  $\rho$  entre les équations (35) et (36).

Tirons  $\lambda$  de l'équation (35), et substituons sa valeur

dans les équations (36), il vient après quelques réductions faciles

$$(37) \left\{ \begin{array}{l} \rho^2(mD_1 - p^2) = A_1 D_1 - C_1^2, \\ (p\rho - C_1)[2pF_1\rho^2 + (D_1^2 - C_1 F_1)(\rho + 1)] \\ = \rho(C_1 - p)(pF_1\rho + D_1^2 - C_1 F_1), \\ (mD_1 - pC_1)(p\rho - C_1)^2 \\ + 2D_1(mC_1 - pA_1)(p\rho - C_1) + B_1 D_1^2 = 2nD_1^2 \frac{\rho^2}{\rho + 1}. \end{array} \right.$$

14. Nous avons déjà trouvé (n° 12)

$$(38, 1^o) \quad b^2c^2X^2 + c^2a^2Y^2 + a^2b^2Z^2 = a^2b^2c^2, \text{ c'est-à-dire, } C_1 = p.$$

On simplifiera les calculs en introduisant immédiatement cette hypothèse dans les équations (37). Les deux premières donnent

$$(38, 2^o) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho^2 = \frac{A_1 D_1 - p^2}{mD_1 - p^2}, \\ 2 \frac{\rho^2}{\rho + 1} = \frac{pF_1 - D_1^2}{pF_1}; \end{array} \right.$$

d'où l'on conclut

$$(38, 3^o) \quad \rho - 1 = 2D_1 \frac{pF_1(A_1 - m) + D_1(mD_1 - p^2)}{(pF_1 - D_1^2)(mD_1 - p^2)}.$$

Eu égard à ces valeurs, la troisième des équations (37) devient, après avoir fait  $C_1 = p$ ,

$$\begin{aligned} & p^2(mD_1 - p^2)(\rho - 1)^2 - 2p^2D_1(A_1 - m)(\rho - 1) \\ & = D_1^2 \frac{2n\rho^2 - B_1(\rho + 1)}{\rho + 1}, \end{aligned}$$

ou, en chassant le dénominateur  $\rho + 1$ ,

$$\begin{aligned} & p^2(\rho^2 - 1)[(mD_1 - p^2)(\rho - 1) - 2D_1(A_1 - m)] \\ & = D_1^2[2n\rho^2 - B_1(\rho + 1)]; \end{aligned}$$

puis en remplaçant, dans la première parenthèse,  $(\rho - 1)$  par sa valeur (38, 3°), et, dans la deuxième parenthèse,  $(\rho + 1)$  par la valeur que fournissent les équations (38, 2°),

$$\rho^2(A_1 D_1 - p^2)(\rho^2 - 1) = \rho^2(n p F_1 - n D_1^2 - p B_1 F_1).$$

Substituons enfin à  $\rho^2$  et  $(\rho^2 - 1)$  les valeurs déduites de la première des équations (38, 2°), il vient, en supprimant des facteurs qui ne peuvent être nuls,

$$\rho^2 A_1 D_1 + n D_1^2 + p B_1 F_1 - m p^2 D_1 - n p F_1 = 0.$$

Or, à cause de  $C_1 = p$ , cette dernière équation peut s'écrire

$$\rho^2 A_1 D_1 + n D_1^2 + p B_1 F_1 - m p C_1 D - n C_1 F_1 = 0.$$

Si l'on remplace  $A_1, B_1, C_1, \dots$  par leurs valeurs (32), on constate immédiatement que cette dernière équation se réduit à une identité.

Par conséquent, la courbe cherchée est complètement définie par les équations (38, 1°) et (38, 2°), équations qu'on peut écrire

$$(39) \quad C_1 = p, \quad \rho^2 = \frac{A_1 D_1 - C_1^2}{m D_1 - p C_1}, \quad 2 \frac{\rho^2}{\rho + 1} = \frac{C_1 F_1 - D_1^2}{p F_1};$$

il reste à éliminer  $\rho$  entre les deux dernières équations (39).

15. On a

$$\rho^2 = \frac{A_1 D_1 - C_1^2}{m D_1 - p C_1}, \quad \rho + 1 = \frac{2 p F_1 (A_1 D_1 - C_1^2)}{(m D_1 - p C_1)(C_1 F_1 - D_1^2)},$$

d'où l'on conclut

$$\begin{aligned} & (A_1 D_1 - C_1^2)(C_1 F_1 - D_1^2)^2 (m D_1 - p C_1) \\ & = [2 p F_1 (A_1 D_1 - C_1^2) - (m D_1 - p C_1)(C_1 F_1 - D_1^2)]. \end{aligned}$$

Cette dernière équation peut s'écrire

$$\begin{aligned} & (C_1 F_1 - D_1^2)^2 (m D_1 - p C_1) (A_1 D_1 - C_1^2 - m D_1 + p C_1) \\ & = 4p F_1 (A_1 D_1 - C_1^2) [p F_1 (A_1 D_1 - C_1^2) \\ & \quad - (m D_1 - p C_1) (C_1 F_1 - D_1^2)], \end{aligned}$$

ou, en remplaçant  $p$  par  $C_1$ , quand il résulte une réduction,

$$(1^0) \left\{ \begin{aligned} & (C_1 F_1 - D_1^2)^2 (m D_1 - p C_1) (A_1 - m) \\ & = 4p F_1 (A_1 D_1 - C_1^2) (p A_1 F_1 - m C_1 F_1 + m D_1^2 - p C_1 D_1). \end{aligned} \right.$$

Or, si l'on pose

$$(2^0) \quad \left\{ \begin{aligned} & M_1 = A_1 D_1 - C_1^2, \quad p N_1 = C_1 F_1 - D_1^2, \\ & p P_1 = m C_1 F_1 - p A_1 F_1 + p C_1 D_1 - m D_1^2, \end{aligned} \right.$$

l'équation (1<sup>0</sup>) devient

$$N_1^2 (m D_1 - p C_1) (A_1 - m) + 4 F_1 M_1 P_1 = 0,$$

ou, en multipliant par  $p$ ,

$$(3^0) \quad (m D_1 - p C_1) (p A_1 - m C_1) N_1^2 + 4p F_1 M_1 P_1 = 0.$$

Il est d'ailleurs facile de voir que

$$(4^0) \quad \left\{ \begin{aligned} & M_1 = a^4 a_1^4 Y^2 Z^2 + b^4 b_1^4 Z^2 X^2 + c^4 c_1^4 X^2 Y^2, \\ & N_1 = a^6 a_1^4 Y^2 Z^2 + b^6 b_1^4 Z^2 X^2 + c^6 c_1^4 X^2 Y^2, \\ & P_1 = a^8 a_1^4 Y^2 Z^2 + b^8 b_1^4 Z^2 X^2 + c^8 c_1^4 X^2 Y^2, \\ & M_1 P_1 - N_1^2 = a_1^4 b_1^4 c_1^4 X^2 Y^2 Z^2 D_1. \end{aligned} \right.$$

En remplaçant  $M_1 P_1$  par la valeur que fournit la dernière des égalités (4<sup>0</sup>), l'équation (3<sup>0</sup>) deviendra

$$(5^0) \quad \left\{ \begin{aligned} & 4 a_1^4 b_1^4 c_1^4 X^2 Y^2 Z^2 C_1 F_1 D_1 \\ & + N_1^2 [4 C_1 F_1 + (m D_1 - p C_1) (p A_1 - m C_1)] = 0. \end{aligned} \right.$$

Mais si l'on pose

$$r = a_1^2 b^2 c^2 + b_1^2 c^2 a^2 + c_1^2 a^2 b^2,$$

$$r' = a_1^2 b^4 c^4 + b_1^2 c^4 a^4 + c_1^2 a^4 b^4,$$

$$r'' = a_1^2 b^2 c^2 (b^2 + c^2) + b_1^2 c^2 a^2 (c^2 + a^2) + c_1^2 a^2 b^2 (a^2 + b^2),$$

on a identiquement

$$(6^{\circ}) \quad p^2 r A_1 = r F_1 + p r'' C_1 - r' D_1,$$

et l'équation (5<sup>o</sup>) prend la forme définitive

$$(7^{\circ}) \quad \left\{ \begin{array}{l} 4p^3 r a_1^4 b_1^4 c_1^4 X^2 Y^2 Z^2 C_1 D_1 F_1 \\ + (C_1 F_1 - D_1^2)^2 [r' D_1 (p C_1 - m D_1) \\ + r F_1 (m D_1 + 3p C_1)] = 0. \end{array} \right.$$

16. Ainsi, en résumé :

*La courbe, lieu des pieds, sur l'ellipsoïde donné, des normales rectangulaires, est définie par les deux équations*

$$(40, 1^{\circ}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A} = p, \\ 4p^3 r a_1^4 b_1^4 c_1^4 X^2 Y^2 Z^2 \mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{C} \\ + (\mathfrak{A} \mathfrak{C} - \mathfrak{B}^2)^2 [(3pr \mathfrak{A} \mathfrak{C} - mr' \mathfrak{B}^2) \\ + \mathfrak{B} (pr' \mathfrak{A} + mr \mathfrak{C})] = 0; \end{array} \right.$$

dans ces équations, on a posé

$$(40, 2^{\circ}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A} = b^2 c^2 X^2 + c^2 a^2 Y^2 + a^2 b^2 Z^2, \\ \mathfrak{B} = b^4 c^4 X^2 + c^4 a^4 Y^2 + a^4 b^4 Z^2, \\ \mathfrak{C} = b^6 c^6 X^2 + c^6 a^6 Y^2 + a^6 b^6 Z^2; \\ \text{d'où} \\ \mathfrak{A} \mathfrak{C} - \mathfrak{B}^2 = p (a^6 a_1^4 Y^2 Z^2 + b^6 b_1^4 Z^2 X^2 + c^6 c_1^4 X^2 Y^2); \end{array} \right.$$

$$(40, 3^{\circ}) \quad \left\{ \begin{array}{l} m = a^2 + b^2 + c^2, \\ n = a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2, \\ p = a^2 b^2 c^2; \\ a_1^2 = b^2 - c^2, \\ b_1^2 = c^2 - a^2, \\ c_1^2 = a^2 - b^2; \\ r = a^2 b^2 c^2 + b_1^2 c^2 a^2 + c_1^2 a^2 b^2, \\ r' = a_1^2 b^4 c^4 + b_1^2 c^4 a^4 + c_1^2 a^4 b^4; \end{array} \right.$$

**X, Y, Z**, sont les coordonnées d'un point quelconque de la courbe.

La courbe (40, 1<sup>o</sup>) est du vingt-quatrième ordre ; la forme donnée aux équations qui la définissent permet d'en signaler un certain nombre de propriétés.