

DÉSIRÉ ANDRÉ

Sur les combinaisons simples

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 10
(1871), p. 221-223

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__221_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1871, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES COMBINAISONS SIMPLES ;

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

I.

PROBLÈME. — *On forme tous les produits différents de $n + p$ lettres n à n ; on considère les fractions qui ont pour numérateurs ces produits et pour dénominateur commun l'un quelconque d'entre eux ; on réduit chacune d'elles à sa plus simple expression, et l'on demande combien il y a, après cette réduction, de fractions conservant k lettres à chaque terme.*

Évidemment, les k lettres qui restent au numérateur sont différentes des k lettres qui restent au dénominateur. Ces dernières sont l'une quelconque des combinai-

sons k à k des n lettres du dénominateur primitif; les premières sont l'une quelconque des combinaisons k à k des p lettres qui n'entraient pas dans ce dénominateur primitif. Le nombre cherché est donc $C_n^k C_p^k$.

Ainsi, il y a une fraction qui se réduit à un; il y en a $C_n^1 C_p^1$ qui conservent une seule lettre à chaque terme; il y en a $C_n^2 C_p^2$ qui en conservent deux; et ainsi de suite.

Remarque. — Il convient, dans cette question et les suivantes, comme dans toutes celles qui concernent les combinaisons simples, de regarder comme égaux à 1 les nombres de combinaisons dont l'indice supérieur est zéro, et comme nuls ceux dont l'indice supérieur surpasse l'inférieur.

II.

PROBLÈME. — *Étant données toutes les combinaisons simples de $n + p$ lettres n à n , on demande combien il y en a qui aient k lettres communes avec l'une de ces combinaisons.*

Si l'on divise toutes les combinaisons qui répondent à la question par celle à laquelle on les compare, les fractions obtenues, réduites à leur plus simple expression, ne conserveront plus que $n - k$ lettres à chaque terme. D'après le problème précédent, le nombre cherché est donc $C_n^{n-k} C_p^{n-k}$.

Remarque. — Il est évident que ce problème et le précédent conduisent à un même mode de classification pour les combinaisons de $n + p$ lettres n à n .

III.

THÉORÈME. — *Quels que soient les nombres entiers positifs n et p , on a identiquement*

$$C_{n+p}^n = C_n^1 C_p^1 + C_n^2 C_p^2 + C_n^3 C_p^3 + \dots$$

Si nous nous reportons, en effet, à la solution du premier problème, nous voyons que cette égalité exprime simplement que le nombre total des fractions considérées est égal au nombre de celles qui se réduisent à 1, plus le nombre de celles qui ne conservent qu'une lettre à chaque terme, plus le nombre de celles qui en conservent deux, et ainsi de suite.

La solution du second problème suffirait de même à rendre évidente l'identité qui précède.

Remarque. — Le second membre de l'identité précédente est symétrique par rapport aux deux lettres n et p : il en résulte immédiatement ce théorème si connu

$$C_{n+p}^n = C_{n+p}^p.$$

IV.

THÉORÈME. — *La somme des carrés des coefficients du développement de $(a + b)^n$ est égale au plus grand coefficient, c'est-à-dire au coefficient du milieu, dans le développement de $(a + b)^{2n}$.*

En effet, si, dans l'identité précédente, on fait $p = n$, on a immédiatement

$$C_{2n}^n = 1^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + (C_n^3)^2 + \dots + (C_n^n)^2.$$
