

L. LINDELÖF

**Quelques problèmes relatifs à l'ellipse  
et à l'ellipsoïde**

*Nouvelles annales de mathématiques 2<sup>e</sup> série*, tome 10  
(1871), p. 212-221

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1871\\_2\\_10\\_212\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10_212_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1871, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

**QUELQUES PROBLÈMES RELATIFS A L'ELLIPSE  
ET A L'ELLIPSOÏDE ;**

**PAR M. L. LINDELÖF.**

---

(Extrait des *Comptes rendus de la Société des Sciences de Finlande*  
pour l'année 1868-1869.)

---

Les problèmes concernant les maxima et les minima des polygones inscrits ou circonscrits à une ellipse se résolvent très-simplement en considérant l'ellipse comme projection d'un cercle. Les polygones en question doivent être alors considérés comme les projections de polygones de même espèce inscrits ou circonscrits au cercle. Le rapport entre la surface d'une figure quelconque et celle de sa projection ayant, dans ce cas, une valeur constante, savoir : la sécante de l'angle des deux plans, une figure donnée sera donc maximum ou minimum en même temps que sa projection. De cette simple considération, il s'ensuit immédiatement que le polygone d'espèce donnée (c'est-à-dire d'un nombre donné de côtés) et de surface maximum ou minimum, parmi ceux que l'on peut inscrire ou circonscrire à une ellipse, n'est autre chose que la projection du polygone maximum ou minimum de même espèce, inscrit ou circonscrit au cercle. Nous allons développer rapidement quelques conséquences de ce théorème général.

1. *Trouver le plus grand triangle inscriptible à une ellipse donnée.*

La figure cherchée est la projection du plus grand triangle qui puisse être inscrit dans un cercle. Or celui-ci

est le triangle équilatéral. Mais dans le cercle il existe une infinité de pareils triangles, et ils sont, à leur tour, circonscrits à un cercle moindre, concentrique au premier, et dont le rayon est à celui du premier comme  $\cos 60^\circ : 1$ , ou comme  $1 : 2$ . Les triangles maxima inscrits dans une ellipse sont donc aussi en nombre infini, et ils sont tous, à leur tour, circonscrits à une ellipse concentrique et semblable à la première, et de dimensions moitié moindres, et cela de telle manière que chaque côté touche en son milieu la petite ellipse. La surface de chacun de ces triangles est  $\frac{3\sqrt{3}}{4} ab$ ,  $a$  et  $b$  désignant les demi-axes de l'ellipse donnée.

On peut construire le triangle cherché en déterminant à volonté, sur la circonférence du cercle circonscrit à l'ellipse, trois points distants les uns des autres de  $120$  degrés, et abaissant de ces points des perpendiculaires sur le grand axe. Les points où ces perpendiculaires rencontrent la périphérie de l'ellipse seront les sommets du triangle cherché.

2. *Trouver le plus grand quadrilatère inscrit à une ellipse donnée.*

La figure cherchée est la projection d'un carré inscrit dans le cercle. Ses diagonales forment un système de diamètres conjugués, puisqu'elles sont les projections de deux diamètres du cercle rectangulaires entre eux.

Les quadrilatères de cette nature inscrits dans l'ellipse sont en nombre infini, et sont, à leur tour, circonscrits à une autre ellipse, dont les axes sont à ceux de l'ellipse donnée dans le rapport de  $\cos 45^\circ : 1$ , ou de  $1 : \sqrt{2}$ . La surface de chacun de ces quadrilatères est  $2ab$ .

3. *Trouver le plus grand polygone d'un nombre*

*donné de côtés, qui soit inscriptible dans une ellipse donnée.*

La figure correspondante inscrite dans le cercle est un polygone régulier, qui, à son tour, est circonscrit à un cercle plus petit. Si  $n$  est le nombre des côtés, le rayon du petit cercle est à celui du grand comme  $\cos \frac{\pi}{n} : 1$ .

La figure cherchée est donc pareillement circonscrite à une ellipse concentrique et semblable à l'ellipse donnée, et dont les axes sont moindres dans le rapport ci-dessus que ceux de l'ellipse donnée.

La construction s'effectue très-simplement en partageant la circonférence du cercle circonscrit à l'ellipse en  $n$  parties égales, et abaissant des perpendiculaires des points de division sur le grand axe. Les points où ces perpendiculaires rencontrent la périphérie de l'ellipse seront les sommets du polygone cherché.

On peut encore parvenir au même but de la manière suivante. Construisons une ellipse dont les axes coïncident avec ceux de l'ellipse donnée, mais soient moindres que ces derniers dans le rapport de  $\cos \frac{\pi}{n} : 1$ . Par un point pris à volonté sur l'ellipse extérieure, menons une corde qui soit en même temps tangente à l'ellipse intérieure; par l'autre extrémité de cette corde, menons une nouvelle corde tangente, et ainsi de suite. En continuant cette construction, on revient finalement au point de départ, et l'on obtient un polygone fermé, jouissant de la propriété de maximum demandée.

Les côtés du polygone sont partagés en leurs milieux par les points de contact. Chaque côté partage le diamètre qui lui est conjugué en deux segments qui sont entre eux dans le rapport de  $1 - \cos \frac{\pi}{n}$  à  $1 + \cos \frac{\pi}{n}$ , ou,

plus simplement, de  $\tan^2 \frac{\pi}{n}$  à 1. On obtient ainsi cette proposition réciproque : *Si l'on partage un diamètre d'une ellipse, par une corde conjuguée, en deux segments qui soient entre eux comme  $\tan^2 \frac{\pi}{n} : 1$ , l'enveloppe de cette corde est une ellipse concentrique à la première, et dont les axes sont moindres que ceux de l'ellipse donnée dans le rapport de  $\cos \frac{\pi}{n} : 1$ .* Il faut remarquer qu'ici  $n$  peut être un nombre quelconque, entier, fractionnaire, ou même irrationnel.

4. *Trouver le plus petit polygone d'un nombre donné de côtés, qui soit circonscriptible à une ellipse donnée.*

Ce problème se résout de la même manière que le précédent. On trouve que le polygone est pareillement inscrit dans l'ellipse que l'on obtient en augmentant les dimensions de l'ellipse donnée dans le rapport de  $\cos \frac{\pi}{n} : 1$ ,  $n$  désignant le nombre des côtés. La construction peut se faire en partageant la circonférence du cercle circonscrit à l'ellipse en  $n$  parties égales, et abaissant des points de division des perpendiculaires sur le grand axe de l'ellipse. Les points de l'ellipse ainsi déterminés seront les points de contact des côtés du polygone cherché.

La méthode suivie dans la solution des problèmes précédents consiste proprement en ceci : que l'on conçoit un cercle, avec les figures régulières correspondantes, inscrites ou circonscrites, qui soit contracté suivant une certaine direction, ou qui soit transformé de telle manière, que toutes ses ordonnées soient diminuées dans un certain rapport, sans que les abscisses soient altérées.

Une transformation de cette espèce, appliquée aux figures dans l'espace, est ce qu'on appelle la *transformation homographique*, laquelle consiste en ce que la figure est dilatée ou contractée suivant les directions des trois axes coordonnés, mais d'après une échelle différente pour chacune de ces directions. Ces échelles peuvent, par exemple, être choisies de manière qu'un ellipsoïde donné à trois axes se change par là en une sphère.

Considérée au point de vue de la géométrie analytique, la transformation en question consiste à faire correspondre à un point  $(x, y, z)$  de l'une des figures un point  $(\xi, \eta, \zeta)$  de l'autre, en supposant  $\xi$  proportionnelle à  $x$ ,  $\eta$  proportionnelle à  $y$ , et  $\zeta$  proportionnelle à  $z$ . En posant

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad \zeta = \frac{z}{c},$$

alors, à un ellipsoïde ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

correspondra une sphère dont l'équation sera

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1.$$

Une équation du premier degré entre  $x, y, z$  se transforme en une équation de même degré entre  $\xi, \eta, \zeta$ , d'où résulte qu'à un plan dans l'une des figures correspond un plan dans l'autre. De plus, on voit facilement que les plans diamétraux et les diamètres conjugués se correspondent dans les deux figures.

Considérons un élément de volume  $dx dy dz$  dans l'une des figures; il aura pour correspondant un élément de volume  $abc d\xi d\eta d\zeta$  dans l'autre figure. Les éléments de volume correspondants, et par suite aussi les volumes finis correspondants, sont donc proportionnels dans l'el-

lipsoïde et dans la sphère, et sont entre eux dans le rapport de  $abc : 1$ . Une telle proportionnalité n'a pas lieu entre les lignes ou les surfaces correspondantes en général, mais elle a lieu entre les *parties* correspondantes de deux lignes droites homologues ou de deux plans homologues. De là résulte, en particulier, que les centres de gravité, tant des lignes droites que des surfaces planes et des volumes, conservent leur propriété caractéristique dans la transformation dont il s'agit.

Si l'on compare de cette manière l'ellipsoïde avec une sphère, et que l'on considère l'un d'eux comme une transformation homographique de l'autre; si l'on imagine en même temps des figures inscrites ou circonscrites à la sphère, à ces figures correspondront des figures de même espèce, inscrites ou circonscrites à l'ellipsoïde. Or, le rapport entre les volumes n'étant pas altéré par la transformation, la propriété de maximum ou de minimum subsistera encore pour le volume que peut prendre une figure. Une telle comparaison donne le moyen d'établir très-simplement une multitude de propositions relatives à l'ellipsoïde, et en particulier de résoudre les problèmes suivants.

5. *Trouver le plus grand tétraèdre que l'on puisse inscrire dans un ellipsoïde.*

La figure cherchée est homologue au tétraèdre régulier inscrit dans la sphère. Elle est donc également circonscrite à un ellipsoïde moindre, concentrique et semblable au proposé. Le point de contact de chaque face coïncide avec son centre de gravité.

Ces tétraèdres maxima sont en nombre infini. Pour en construire un, on peut prendre à volonté un diamètre de l'ellipsoïde, et au tiers de sa longueur mener un plan conjugué à ce diamètre. Dans la section ainsi obtenue,

on inscrira un triangle d'aire maximum. Ce triangle sera la base du tétraèdre cherché, et l'extrémité du diamètre la plus éloignée en sera le sommet.

Si par les sommets de la figure ainsi déterminée on mène des plans tangents à l'ellipsoïde, on obtient un tétraèdre circonscrit de volume minimum, lequel, à son tour, est inscrit dans un ellipsoïde semblable au proposé.

On résoudra d'une manière analogue les problèmes relatifs à l'hexaèdre, à l'octaèdre, au dodécaèdre et à l'icosaèdre.

*6. Le polyèdre minimum d'un nombre donné de faces, que l'on puisse circonscrire à un ellipsoïde, est tel, que toutes ses faces touchent l'ellipsoïde en leurs centres de gravité respectifs.*

On peut se convaincre, par un raisonnement très-simple, de la nécessité de la condition que nous venons d'énoncer. Car si le centre de gravité d'une face ne coïncide pas avec son point de contact, et que l'on fasse tourner la face infiniment peu autour d'une droite menée dans son plan par son centre de gravité, on voit, en vertu du théorème de Guldin, que le volume du polyèdre n'a pas varié, bien que la face, dans sa nouvelle position, tombe en dehors de l'ellipsoïde. Si l'on transporte ensuite cette face parallèlement à elle-même vers l'ellipsoïde, jusqu'à ce qu'elle lui redevienne tangente, on obtiendra un nouveau polyèdre circonscrit, moindre que le polyèdre donné, lequel par conséquent ne saurait être un minimum.

Du reste, on voit facilement que le dernier théorème énoncé a généralement lieu pour les polyèdres circonscrits à une surface convexe et fermée, quelle que soit d'ailleurs sa forme.

En renversant les propositions que nous venons de dé-



montrer, on en peut déduire de nouveaux résultats. A ce point de vue, nous allons encore traiter quelques problèmes.

7. *Trouver l'ellipse minimum, circonscrite à un triangle donné.*

Le rapport entre les surfaces de l'ellipse et du triangle doit être un minimum, et cela a lieu si le triangle, de son côté, est un des triangles maxima que l'on puisse inscrire dans l'ellipse, auquel cas le rapport en question devient égal à sa limite, qui est  $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$ . Cette dernière condition peut toujours se réaliser. En effet, le triangle donné peut être considéré comme la projection d'un certain triangle équilatéral, et l'ellipse cherchée sera alors la projection d'un cercle circonscrit à ce triangle.

De là résulte, d'après le n° 1, que le centre de gravité du triangle donné doit être le centre de l'ellipse cherchée, et qu'ainsi chacun des côtés du triangle est conjugué au diamètre mené par le sommet opposé. Comme on connaît de cette manière un diamètre et une corde conjuguée à ce diamètre, l'ellipse est déterminée et peut facilement se construire par points.

8. *Trouver l'ellipse maximum, inscrite à un triangle donné.*

Le rapport entre les surfaces de l'ellipse et du triangle doit être un maximum, et cela a lieu lorsque le triangle, de son côté, est un triangle d'aire minimum circonscrit à l'ellipse. Il s'ensuit donc, d'après le n° 2, que le centre de gravité du triangle est le centre de l'ellipse, et que celle-ci touche chacun des côtés en son milieu.

9. *Trouver l'ellipsoïde minimum, circonscrit à un tétraèdre donné.*

Le tétraèdre donné peut toujours être considéré comme une transformation homographique d'un tétraèdre régulier. Pour s'en assurer, le plus simple est de rapporter les deux tétraèdres à un système particulier de coordonnées obliques, en prenant le sommet du tétraèdre pour origine et les trois arêtes qui y aboutissent pour axes coordonnés. Si l'on désigne ces trois arêtes par  $a, b, c$  pour le tétraèdre donné, et par  $\mathbf{r}$  pour le tétraèdre régulier, on voit qu'entre les coordonnées  $x, y, z$  du premier système et les coordonnées  $\xi, \eta, \zeta$  du second, il faudra poser les relations

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad \zeta = \frac{z}{c}.$$

Il est clair que, dans cette transformation, comme dans la transformation avec des coordonnées rectangulaires, les éléments de volume correspondants dans les deux figures sont proportionnels, et aussi que les lignes droites, les plans et les surfaces du second degré conservent leur caractère général, etc.

Maintenant, le rapport entre les volumes de l'ellipsoïde et du tétraèdre devant être un minimum, et la plus petite valeur dont ce rapport soit susceptible s'obtenant lorsque le tétraèdre de son côté est un maximum parmi tous ceux que l'on peut inscrire dans l'ellipsoïde, il est clair que, dans la transformation homographique en question, l'ellipsoïde doit avoir pour figure correspondante la sphère circonscrite au tétraèdre régulier. De là on déduit facilement que le centre de gravité du tétraèdre donné doit être le centre de l'ellipsoïde; que chacune des faces est conjuguée au diamètre mené par le sommet opposé, lequel rencontre la face en son centre de gravité, en même temps que la section faite par le plan d'une face est l'ellipse la plus petite qui puisse être circonscrite à cette face.

Connaissant ainsi un diamètre et une section conjuguée à ce diamètre, l'ellipsoïde sera complètement déterminé.

10. *Trouver l'ellipsoïde maximum, inscrit dans un tétraèdre déterminé.*

On démontre, comme dans le problème précédent, que le centre de l'ellipsoïde coïncide avec le centre de gravité du tétraèdre, en même temps que l'ellipsoïde touche chaque face en son centre de gravité.

Le problème traité au n° 7 a été proposé pour la première fois par Euler, et résolu par lui analytiquement; il a été repris, depuis, d'une manière différente, par Liouville, par Bertrand et par d'autres géomètres. Relativement à une autre solution géométrique du problème 9, on trouve une courte indication de Liouville dans le tome VII de son *Journal de Mathématiques*.

---