

SAMUEL ROBERTS

Note sur les podaires centrales des coniques

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 10
(1871), p. 208-211

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__208_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1871, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR LES PODAIRES CENTRALES DES CONIQUES;

PAR M. SAMUEL ROBERTS.

Je ne sache pas que les relations suivantes, malgré leur simplicité élémentaire, aient été remarquées. L'équation d'une ellipse étant $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, on sait que la podaire centrale, c'est-à-dire le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du centre sur les tangentes, se trouve représentée par

$$(a) \quad \rho^2 = a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha = \frac{a^2 - b^2}{2} \cos 2\alpha + \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Nous appellerons *cercle focal* d'une ellipse ou d'une hyperbole le cercle construit sur la droite limitée au centre et à un foyer réel comme diamètre. Donc, l'équation des deux cercles focaux de l'ellipse est

$$(b) \quad \rho^2 = (a^2 - b^2) \cos^2 \alpha = \frac{a^2 - b^2}{2} \cos 2\alpha + \frac{a^2 - b^2}{2}.$$

Le cercle dont le petit axe d'une ellipse est un diamètre peut être appelé le *cercle inscrit*, et le cercle dont le grand axe d'une conique est un diamètre peut être appelé le *cercle circonscrit*. En désignant par P l'aire de la podaire comprise entre les limites angulaires $\alpha = \omega_1$, $\alpha = \omega_2 < \omega_1$; par C l'aire des cercles focaux comprise entre les mêmes limites et par A l'aire du cercle inscrit entre les mêmes limites, on a, en vertu de la formule

$$\frac{1}{2} \int_{\omega_2}^{\omega_1} \rho^2 d\alpha,$$

$$P - A = C.$$

Il résulte de là qu'étant données une ellipse et sa podaire centrale, si l'on mène deux rayons vecteurs centraux, l'espace compris entre les rayons vecteurs, la podaire et le cercle inscrit est égal à l'espace compris entre les mêmes rayons vecteurs et les cercles focaux.

En effet, soient AB, CD (*) les axes de l'ellipse, O le centre, F, F' les foyers, OR₁, OR₂ deux rayons vecteurs centraux qui coupent un cercle focal en a, b; le cercle inscrit en c, d; la podaire en e, f; le cercle circonscrit en g, h: on aura

$$\text{aire } Oab = \text{aire } cdef.$$

Pour un système d'ellipses homofocales, les deux cercles focaux restent invariables. Par conséquent, étant

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

donné un système de podaires centrales d'ellipses homofocales, l'aire comprise entre deux rayons vecteurs centraux donnés, une podaire et le cercle inscrit correspondant, est constante pour tout le système.

Si l'on mène Or_1, Or_2 , deux rayons vecteurs, perpendiculaires à OR_1, OR_2 respectivement, il est facile de voir qu'on aura

$$\text{aire } Or_1 r_2 = \text{aire } efgh,$$

en supposant que Or_1, Or_2 coupent le cercle focal en r_1, r_2 .

Il est bon de remarquer que les deux cercles focaux forment une podaire centrale par rapport à la droite limitée aux foyers F, F' , c'est-à-dire par rapport à la conique infiniment aplatie FF' .

Passons à l'hyperbole. Il faut observer que le centre est un point double de la podaire centrale de l'hyperbole. Par conséquent, le rayon vecteur de la courbe s'évanouit en passant par ce point, et l'on doit prendre les aires entre des limites définies. Les équations correspondantes à (a), (b) sont

$$\rho^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} \cos 2\alpha + \frac{a^2 - b^2}{2},$$

$$\rho^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} \cos 2\alpha + \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Nous appellerons *cercle adjoint* de l'hyperbole le cercle concentrique dont le rayon est b . En désignant par P_1 l'aire de la podaire centrale comprise entre les limites angulaires $\alpha = \omega_1, \alpha = \omega_2 < \omega_1$; par C l'aire d'un cercle focal entre les mêmes limites et par A l'aire correspondante du cercle adjoint on aura

$$P_1 = C_1 - A_1.$$

On sait que les rayons vecteurs coupent la même branche de la podaire. Il résulte de là qu'étant données une hyperbole et sa podaire centrale, si l'on mène deux rayons vecteurs qui coupent la même branche de la podaire et un cercle focal correspondant, l'aire de la podaire comprise entre les rayons est égale à l'aire comprise entre les rayons, le cercle focal et le cercle adjoint.

En effet, soient AB (*) le grand axe de l'hyperbole; O le centre; F, F' les foyers; OF' un cercle focal; soient OR_1, OR_2 deux rayons vecteurs qui rencontrent la podaire en a, b ; le cercle circonscrit en c, d ; le cercle adjoint en e, f ; le cercle focal en g, h , on aura

$$\text{aire } Oab = \text{aire } efgh.$$

Soient Or_1, Or_2 deux rayons perpendiculaires à OR_1, OR_2 , respectivement. Il est aisé de voir qu'on aura

$$\text{aire } Or_1r_2 = \text{aire } abcd.$$

Lorsqu'il s'agit d'un système d'hyperboles homofocales, les cercles focaux restent les mêmes. Il suit de là qu'entre des limites convenables, la somme aire $Oab + \text{aire } Oef$ est constante pour les mêmes rayons vecteurs.

Pour la lemniscate, le cercle circonscrit et le cercle adjoint coïncident.

Ces relations simples entre les aires des podaires centrales et des cercles associés conduisent à plusieurs constructions particulières qui offrent de l'intérêt.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.