NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DÉSIRÉ ANDRÉ

Théorèmes d'arithmétique

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 10 (1871), p. 207-208

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__207_0>

THÉORÈMES D'ARITHMÉTIQUE;

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

THÉORÈME I. — *Le nombre n étant entier et supérieur à 1, l'équation*

$$x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)=y^n$$

est impossible en nombres entiers supérieurs à zéro.

Pour le démontrer, nous distinguerons deux cas, suivant que n est égal ou supérieur à 2.

1° $n=2$. L'équation

$$x(x+1)=y^2$$

est impossible en nombres entiers supérieurs à zéro. En effet, si elle admettait la solution $x=\alpha$, $y=\beta$, le nombre entier β serait compris entre α et $\alpha+1$, ce qui est impossible, puisque α et $\alpha+1$ sont deux entiers consécutifs.

2° $n>2$. L'équation

$$x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)=y^n$$

est encore impossible en nombres entiers supérieurs à zéro. En effet, si l'équation admettait la solution $x=\alpha$, $y=\beta$, le nombre entier β serait évidemment l'un des nombres $\alpha+1, \alpha+2, \ldots, \alpha+n-2$; alors le premier membre contiendrait $\beta-1$ en facteur, et β^n serait divisible par $\beta-1$, ce qui est impossible.

THÉORÈME II. — *Le nombre n étant entier et supérieur à 2, l'équation*

$$x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)=y^n+1$$

est impossible en nombres entiers supérieurs à zéro.

En effet, si cette équation admettait la solution $x = \alpha$, $y = \beta$, le nombre entier β serait évidemment l'un des nombres $\alpha + 1$, $\alpha + 2, \ldots, \alpha + n - 2$; alors le premier membre contiendrait $\beta + 1$ en facteur, et $\beta^n + 1$ serait divisible par $\beta - 1$, ce qui est impossible.

Remarque. — Dans le cas où $n = 2$, il est facile de démontrer que l'équation considérée n'admet que la solution unique $x = y = 1$.

THÉORÈME III. — *Le nombre n étant entier, impair et supérieur à* 1, *l'équation*

$$x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1) = y^n - 1$$

est impossible en nombres entiers supérieurs à zéro.

En effet, si elle admettait la solution $x = \alpha$, $y = \beta$, le nombre entier β serait évidemment l'un des nombres $\alpha + 1$, $\alpha + 2, \ldots, \alpha + n - 2$; alors le premier membre contiendrait $\beta + 1$ en facteur, et $\beta^n - 1$ serait divisible par $\beta + 1$, ce qui est impossible, puisque n est impair.