

CHASLES

**Propriétés des systèmes de coniques,
dans lesquels se trouvent des conditions
de perpendicularité entre diverses
séries de droites**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 10
(1871), p. 193-204

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__193_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1871, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**PROPRIÉTÉS DES SYSTÈMES DE CONIQUES, DANS LESQUELS SE
TROUVENT DES CONDITIONS DE PERPENDICULARITÉ ENTRE
DIVERSES SÉRIES DE DROITES ;**

PAR M. CHASLES.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXII.)

Une série de droites perpendiculaires à d'autres droites donne lieu généralement à trois questions principales : la recherche de la courbe enveloppe de ces droites, celle de la courbe sur laquelle se trouvent leurs pieds de perpendicularité, et celle de la courbe lieu des points de rencontre de ces droites et des coniques auxquelles elles appartiennent.

Lorsque les perpendiculaires sont des tangentes aux coniques, la troisième question se change en celle du lieu de leurs points de contact.

Je réunirai sous un même numéro ces trois questions, bien qu'elles soient différentes, pour éviter de répéter dans les énoncés des théorèmes l'hypothèse qui leur est commune.

61. Les diamètres perpendiculaires aux tangentes des coniques en leurs points sur une droite D :

1° Enveloppent une courbe de la classe $\mu + 8\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre 2ν à l'infini ;

2° Rencontrent les tangentes en des points situés sur une courbe de la classe $2\mu + 4\nu$, ayant deux points multiples d'ordre $\mu + \nu$ aux deux points circulaires à l'infini ;

3° Ont leurs extrémités sur une courbe de l'ordre $4\mu + 6\nu$.

62. Les diamètres perpendiculaires aux tangentes issues d'un point S :

1° Enveloppent une courbe de la classe 3ν , qui a une tangente multiple d'ordre 2ν à l'infini ;

2° Rencontrent les tangentes en des points situés sur une courbe de l'ordre 4ν , qui a en S un point multiple d'ordre 3ν ;

3° Ont leurs extrémités sur une courbe d'ordre $2\mu + 6\nu$.

63. Les diamètres perpendiculaires aux droites qui vont d'un point Q aux points des coniques sur une droite D :

1° Enveloppent une courbe de la classe $\mu + 2\nu$;

2° Rencontrent les droites auxquelles ils sont perpendiculaires en des points situés sur une courbe de l'ordre $2\mu + 2\nu$, qui a deux points multiples d'ordre μ aux points circulaires de l'infini ;

3° Ont leurs extrémités sur une courbe de l'ordre $4\mu + 4\nu$.

64. Les diamètres perpendiculaires aux droites menées d'un point Q aux points de contact des tangentes issues d'un point S :

1° Enveloppent une courbe de la classe $\mu + 3\nu$.

2° Rencontrent les droites auxquelles elles sont perpendiculaires sur une courbe de l'ordre $2\mu + 4\nu$, qui a deux points multiples d'ordre $\mu + \nu$ aux deux points circulaires de l'infini ;

3° Ont leurs extrémités sur une courbe de l'ordre $4\mu + 6\nu$.

65. Les diamètres perpendiculaires d'un point P :

1° Enveloppent une courbe de la classe $\mu + \nu$, qui a une tangente multiple d'ordre ν à l'infini ;

2° Rencontrent les polaires en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $2\mu + \nu$, qui a deux points

multiples d'ordre μ aux deux points circulaires à l'infini;

3° Ont leurs extrémités sur une courbe de l'ordre $3\mu + 2\nu$.

66. Les tangentes perpendiculaires aux points d'une droite D :

1° Enveloppent une courbe de la classe $2\mu + 4\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre 3ν à l'infini;

2° Rencontrent les tangentes auxquelles elles sont perpendiculaires sur une courbe de l'ordre $2\mu + 4\nu$, qui a deux points multiples d'ordre $\mu + \nu$ aux deux points circulaires à l'infini;

3° Ont leurs points de contact sur une courbe de l'ordre $4\mu + 4\nu$.

67. Les tangentes perpendiculaires aux tangentes issues d'un point S :

1° Enveloppent une courbe de la classe 4ν , qui a une tangente multiple d'ordre 2ν à l'infini;

2° Rencontrent les tangentes issues du point S, sur une courbe d'ordre 4ν , qui a un point multiple d'ordre 2ν en S, et deux points multiples d'ordre ν aux deux points circulaires à l'infini;

3° Ont leurs points de contact sur une courbe de l'ordre $2\mu + 4\nu$.

68. Les tangentes perpendiculaires aux droites menées d'un point Q aux points des coniques sur une droite D :

1° Enveloppent une courbe de l'ordre $2\mu + 2\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre 2ν à l'infini;

2° Rencontrent les droites auxquelles elles sont perpendiculaires en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $2\mu + 6\nu$, qui a un point multiple d'ordre $2\mu + 2\nu$ en Q, et deux points multiples d'ordre 4ν aux deux points circulaires de l'infini :

3° Ont leurs points de contact sur une courbe de l'ordre $4\mu + 2\nu$.

69. Les tangentes perpendiculaires aux diamètres qui partent des coniques sur une droite D :

1° Enveloppent une courbe de la classe $2\mu + 6\nu$;

2° Rencontrent les diamètres sur une courbe de l'ordre $4\mu + 10\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre $2\mu + 4\nu$ aux points circulaires de l'infini ;

3° Ont leurs points de contact sur une courbe de l'ordre $4\mu + 6\nu$.

70. Les tangentes perpendiculaires aux diamètres qui partent des points de contact des tangentes issues d'un point S :

1° Enveloppent une courbe de la classe $4\mu + 4\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre 2ν à l'infini ;

2° Rencontrent les diamètres en des points situés sur une courbe de l'ordre $8\mu + 6\nu$, qui a deux points multiples d'ordre $4\mu + 2\nu$ aux deux points circulaires de l'infini ;

4° Ont leurs points de contact sur une courbe de l'ordre $6\mu + 4\nu$.

71. Les tangentes perpendiculaires aux asymptotes des coniques :

1° Enveloppent une courbe de la classe $2\mu + 2\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre 2ν à l'infini ;

2° Rencontrent les asymptotes en des points situés sur une courbe de l'ordre $2\mu + 3\nu$;

3° Ont leurs points de contact sur une courbe de l'ordre $4\mu + 2\nu$.

72. Les tangentes perpendiculaires aux polaires d'un point P :

1° Enveloppent une courbe de la classe $2\mu + \nu$, qui a une tangente multiple d'ordre ν à l'infini ;

2° Rencontrent les polaires sur une courbe de l'ordre

$4\mu + \nu$, qui a deux points multiples d'ordre 2ν aux deux points circulaires à l'infini ;

3° Ont leurs points de contact sur une courbe de l'ordre $3\mu + \nu$.

73. Des points des coniques sur une droite D, on abaisse des perpendiculaires sur les diamètres qui passent par un point P :

1° Ces perpendiculaires enveloppent une courbe de la classe $\mu + 2\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre 2ν coïncidante avec D, et une tangente multiple d'ordre μ à l'infini ;

2° Les pieds des perpendiculaires sont sur une courbe de l'ordre $\mu + 4\nu$, qui a en P un point multiple de l'ordre $\mu + 2\nu$;

3° Les perpendiculaires rencontrent les coniques en des points situés sur une courbe de l'ordre $3\mu + 4\nu$.

74. Si des points des coniques sur une droite D on abaisse des perpendiculaires sur les tangentes issues d'un point S :

1° Ces perpendiculaires enveloppent une courbe de la classe $2\mu + 2\nu$;

2° Leurs pieds sont sur une courbe de l'ordre $2\mu + 4\nu$, qui a un point multiple d'ordre $2\mu + 2\nu$ en S, et deux points multiples d'ordre 2ν aux deux points circulaires de l'infini ;

3° Les points où elles rencontrent les coniques sont sur une courbe de l'ordre $6\mu + 4\nu$.

75. Des points des coniques sur une droite D, on abaisse des perpendiculaires sur les diamètres qui passent par les points d'une autre droite D' :

1° Ces perpendiculaires enveloppent une courbe de la classe $4\mu + 4\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre μ à l'infini ;

2° Leurs pieds sur les diamètres sont sur une courbe

de l'ordre $6\mu + 8\nu$, qui a deux points multiples d'ordre $2\mu + 4\nu$ aux deux points circulaires de l'infini, et un point multiple d'ordre μ au point de rencontre de D et D' ;

3° Les points où les perpendiculaires rencontrent les coniques sont sur une courbe de l'ordre $10\mu + 8\nu$.

76. Si d'un point de chaque conique sur une droite D on mène une perpendiculaire sur la tangente en l'autre point :

1° Ces perpendiculaires enveloppent une courbe de la classe $2\mu + \nu$, qui a une tangente multiple d'ordre $\mu + \nu$ coïncidante avec D , et une tangente multiple d'ordre μ à l'infini ;

2° Les pieds des perpendiculaires sont sur une courbe de la classe $3\mu + 2\nu$, qui a deux points multiples d'ordre $(\mu + \nu)$ aux deux points circulaires à l'infini ;

3° Les perpendiculaires rencontrent les coniques en des points situés sur une courbe de l'ordre $5\mu + 2\nu$.

77. D'un point de chaque conique sur une droite D on abaisse une perpendiculaire sur le diamètre qui passe par l'autre point :

1° Ces perpendiculaires enveloppent une courbe de la classe $2\mu + 2\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre $\mu + 2\nu$ coïncidante avec D , et une tangente multiple d'ordre μ à l'infini ;

2° Leurs pieds sont sur une courbe de l'ordre $3\mu + 4\nu$;

3° Les points où elles rencontrent les coniques sont sur une courbe de l'ordre $5\mu + 4\nu$.

78. Si les coniques sont coupées par deux droites D, D' :

1° Les diamètres perpendiculaires aux cordes interceptées entre ces droites enveloppent une courbe de la classe $3\mu + 4\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre 4ν à l'infini ;

2° Ces diamètres rencontrent les cordes en des points

dont le lieu est une courbe de l'ordre $6\mu + 4\nu$, qui a deux points multiples d'ordre 3μ aux deux points circulaires de l'infini ;

3° Les extrémités des diamètres sont sur une courbe de l'ordre $10\mu + 8\nu$.

79. Les perpendiculaires abaissées d'un point Q sur les diamètres qui passent par un point P rencontrent les coniques en des points situés sur une courbe de l'ordre $\mu + 2\nu$, qui a un point multiple d'ordre μ en Q.

80. Si d'un point Q on mène des perpendiculaires aux diamètres qui partent des points des coniques sur une droite D :

1° Ces perpendiculaires ont leurs pieds sur une courbe de l'ordre $2\mu + 4\nu$, qui a trois points multiples d'ordre $\mu + 2\nu$, l'un en Q et les deux autres aux points circulaires à l'infini ;

2° Elles rencontrent les coniques sur une courbe de l'ordre $4\mu + 4\nu$, qui a un point multiple d'ordre 2μ en Q.

81. Les perpendiculaires abaissées d'un point Q sur les diamètres qui partent des points de contact des tangentes issues d'un point S :

1° Ont leurs pieds sur une courbe de l'ordre $4\mu + 2\nu$, qui a un point multiple d'ordre $2\mu + \nu$ en Q ;

2° Rencontrent les coniques en des points situés sur une courbe de l'ordre $4\mu + 2\nu$, qui a un point multiple d'ordre $2\mu + \nu$ en Q.

82. Les perpendiculaires abaissées d'un point Q sur les tangentes aux points d'une droite :

1° Ont leurs pieds sur une courbe de l'ordre $2\mu + 2\nu$, qui a en Q un point multiple d'ordre $\mu + \nu$;

2° Rencontrent les coniques en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $4\mu + 2\nu$, qui a en Q un point multiple d'ordre 2μ .

83. Les perpendiculaires abaissées d'un point sur les

tangentes issues d'un point S rencontrent les coniques en des points situés sur une courbe de l'ordre $2\mu + 2\nu$, qui a un point multiple d'ordre 2μ en Q .

84. Les perpendiculaires abaissées d'un point Q sur les polaires d'un point P :

1° Ont leurs pieds sur une courbe de l'ordre 2μ , qui a trois points multiples d'ordre μ , l'un en P et les deux autres aux points circulaires à l'infini;

2° Rencontrent les coniques en des points situés sur une courbe de l'ordre 3μ , qui a en Q un point multiple d'ordre μ .

85. Les perpendiculaires abaissées d'un point Q sur les polaires d'un point P rencontrent les diamètres menés d'un point P_1 en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $\mu + \nu$, qui a deux points multiples, l'un d'ordre μ en P_1 , et l'autre d'ordre ν en Q .

86. Les perpendiculaires abaissées d'un point Q sur les polaires d'un point P rencontrent les diamètres qui partent des points des coniques sur une droite D , en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $3\mu + 2\nu$, qui a en Q un point multiple d'ordre $\mu + 2\nu$.

87. Les perpendiculaires abaissées d'un point Q sur les polaires d'un point P rencontrent les tangentes issues d'un point S , en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $2\mu + \nu$, qui a en S un point multiple d'ordre 2μ , et en Q un point multiple d'ordre ν .

88. Les perpendiculaires abaissées d'un point Q sur les polaires d'un point P rencontrent les tangentes aux points d'une droite D en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $3\mu + \nu$, qui a un point multiple d'ordre $\mu + \nu$ en Q .

89. Par le pôle d'une droite D dans chaque conique, on mène les deux droites rectangulaires conjuguées par rapport à la conique :

1° Ces droites enveloppent une courbe de la classe $\mu + 2\nu$, qui a deux tangentes multiples d'ordre ν , l'une coïncidante avec D, et l'autre à l'infini;

2° Le lieu des points où elles rencontrent les coniques est une courbe d'ordre $2\mu + 5\nu$.

90. Si par un point Q on mène dans chaque conique les deux droites conjuguées rectangulaires, ces droites rencontrent les coniques en des points situés sur une courbe d'ordre $2\mu + 2\nu$, qui a un point multiple d'ordre 2μ en Q.

91. Si des points où les diamètres menés d'un point P, rencontrent une droite Δ , on abaisse des perpendiculaires sur les polaires d'un point P :

1° Ces perpendiculaires enveloppent une courbe de la classe $\mu + \nu$;

2° Leurs pieds sur les polaires sont sur une courbe d'ordre $2\mu + \nu$, qui a deux points multiples d'ordre μ aux deux points circulaires de l'infini;

3° Les points où elles rencontrent les coniques sont sur une courbe de l'ordre $3\mu + 2\nu$.

92. Si aux points où les diamètres issus d'un point P rencontrent une droite Δ on mène les perpendiculaires à ces diamètres, ces perpendiculaires rencontrent les coniques en des points situés sur une courbe d'ordre $\mu + 4\nu$.

93. Si par les points où les diamètres qui partent d'une droite D rencontrent une droite Δ on mène des perpendiculaires à ces diamètres :

1° Ces perpendiculaires enveloppent une courbe de la classe $2\mu + 4\nu$;

2° Les points où elles rencontrent les coniques sont sur une courbe de l'ordre $6\mu + 8\nu$.

94. Si par les points où les diamètres qui partent des points des coniques sur une droite D rencontrent une

droite Δ on mène des perpendiculaires aux polaires d'un point P :

1° Ces perpendiculaires enveloppent une courbe de la classe $3\mu + 2\nu$;

2° Rencontrent les coniques en des points situés sur une courbe de l'ordre $8\mu + 4\nu$.

95. Si des points où les tangentes aux coniques en leurs points sur une droite D rencontrent une droite Δ on abaisse des perpendiculaires sur les polaires d'un point P :

1° Ces perpendiculaires enveloppent une courbe de la classe $3\mu + \nu$, qui a une tangente multiple d'ordre 2μ coïncidante avec Δ ;

2° Leurs pieds sur les polaires ont pour lieu une courbe de l'ordre $5\mu + \nu$, qui a deux points multiples d'ordre 2ν aux points circulaires de l'infini ;

3° Les points où elles rencontrent les coniques sont sur une courbe de l'ordre $8\mu + 2\nu$.

96. Si des points où les tangentes issues d'un point S rencontrent une droite Δ on abaisse des perpendiculaires sur les polaires d'un point P :

1° Ces perpendiculaires enveloppent une courbe de la classe $2\mu + \nu$;

2° Leurs pieds sur les polaires de P sont sur une courbe de l'ordre $4\mu + \nu$, qui a deux points multiples d'ordre 2μ aux deux points circulaires de l'infini ;

3° Les points où elles rencontrent les coniques sont sur une courbe d'ordre $6\mu + 2\nu$.

97. Si par les points où les perpendiculaires abaissées d'un point Q sur les polaires d'un point P rencontrent une droite Δ on mène les diamètres des coniques :

1° Ces diamètres enveloppent une courbe de la classe $\mu + 2\nu$;

2° Leurs extrémités sont sur une courbe de l'ordre $3\mu + 2\nu$.

98. Si par les points où les perpendiculaires abaissées d'un point Q sur les polaires d'un point P rencontrent une droite Δ on mène des tangentes :

1° Ces tangentes enveloppent une courbe de la classe $2\mu + \nu$;

2° Leurs points de contact sont sur une courbe d'ordre $3\mu + \nu$.

99. Par chaque point d'une conique sur une droite D on mène la perpendiculaire au diamètre qui passe par ce point :

1° Ces perpendiculaires enveloppent une courbe de la classe $2\mu + 2\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre $\mu + 2\nu$ coïncidante avec D, et une tangente multiple d'ordre μ à l'infini;

2° Elles coupent les coniques en des points dont le lieu est une courbe d'ordre $5\mu + 4\nu$.

100. Les tangentes perpendiculaires aux diamètres menés d'un point P :

1° Enveloppent une courbe de la classe 3ν ;

2° Rencontrent les diamètres en des points situés sur une courbe d'ordre 5ν , qui a en P un point multiple d'ordre 3ν ;

3° Ont leurs points de contact sur une courbe d'ordre $\mu + 3\nu$.

101. Les perpendiculaires abaissées d'un point Q sur les diamètres passant par un point P rencontrent les coniques en des points situés sur une courbe d'ordre 3ν ; et les tangentes en ces points enveloppent une courbe de la classe $\mu + 3\nu$.

102. Les perpendiculaires abaissées d'un point P sur les polaires de ce point rencontrent les coniques en des points situés sur une courbe d'ordre 2μ ; et les tangentes

en ces points enveloppent une courbe de la classe 5μ .

103. Si des points de contact des tangentes issues d'un point S on mène des perpendiculaires aux cordes comprises entre deux droites D, D' :

1° Ces perpendiculaires enveloppent une courbe de la classe $10\mu + 4\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre $4\mu + 4\nu$ à l'infini ;

2° Leurs pieds sur les cordes sont sur une courbe de l'ordre $16\mu + 4\nu$, qui a deux points multiples d'ordre 6μ aux deux points circulaires de l'infini ;

3° Leurs points de rencontre avec les coniques auxquelles elles se rapportent sont sur une courbe de l'ordre $24\mu + 4\nu$.

104. Si les coniques sont coupées par trois droites D, D', D'' , et que de leurs points D'' on abaisse des perpendiculaires sur les cordes comprises entre D et D' :

1° Ces perpendiculaires enveloppent une courbe de la classe 10μ , qui a une tangente multiple d'ordre 6μ coïncidante avec D'' , et une d'ordre 4μ à l'infini ;

2° Les pieds des perpendiculaires sont sur une courbe de l'ordre 16μ , qui a deux points multiples d'ordre 6μ aux deux points circulaires de l'infini ;

3° Les perpendiculaires coupent les coniques en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre 24μ .
