

AUGUSTE MACÉ

**Solution de la question proposée au
concours pour les deux académies de
Montpellier et d'Aix (année 1870)**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 10
(1871), p. 17-26

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__17_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1871, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS POUR
LES DEUX ACADÉMIES DE MONTPELLIER ET D'AIX
(ANNÉE 1870);**

PAR M. AUGUSTE MACÉ,

Élève de Mathématiques spéciales au lycée de Grenoble.

I. Étant donné un ellipsoïde, on détermine les points de contact des plans tangents parallèles aux plans des sections circulaires; on mène deux sphères tangentes chacune en deux de ces points symétriques par rapport au grand axe : trouver l'équation des surfaces de révolution du second degré circonscrites à ces deux sphères. Classification et discussion de ces surfaces.

II. *Lignes d'intersection de ces surfaces et de l'ellipsoïde; leurs propriétés géométriques par rapport aux deux sphères. Construction de la tangente.*

III. *Ces lignes forment sur la surface de l'ellipsoïde un réseau complet de courbes se coupant orthogonalement.*

I. Soit l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

on sait que les plans des sections cycliques sont parallèles au plan

$$x = z \sqrt{\frac{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}}}.$$

Si x_1, y_1, z_1 est l'ombilic, le plan tangent en ce point sera

$$\frac{rx_1}{a^2} + \frac{y_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} = 1,$$

et, comme ce plan doit être parallèle au plan des sections circulaires, on devra avoir

$$y_1 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{x_1}{a\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{z_1}{c\sqrt{b^2 - c^2}};$$

on a, de plus, la relation

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1;$$

d'où l'on déduit

$$x_1 = a \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = c \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}.$$

Considérons maintenant l'ellipse ayant pour demi-axes a et c ; cette ellipse contient les ombilics C, D, C', D'. Si nous considérons un cercle passant par C et D et tangent en ces points à l'ellipse, et si nous faisons tourner ce cercle autour de l'axe des x , ce cercle engendrera une sphère tangente à l'ellipsoïde aux points C et D. Du reste, le centre de cette sphère est sur l'axe des x au point où la normale en C coupe cet axe. On voit, d'autre part, que, si l'on a décrit l'autre sphère, la ligne des centres de ces sphères, c'est-à-dire l'axe des x , sera l'axe des surfaces de révolution circonscrites aux deux sphères; pour avoir la nature des surfaces, il suffit de connaître la courbe méridienne dans le plan des xz . On a donc à mener dans ce plan deux cercles tangents en C et D, C' et D' à une ellipse donnée, et à chercher l'équation générale des coniques tangentes à ces deux cercles.

L'ellipse aura pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

toute conique tangente à celle-ci en C et D sera de la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 + k \left(x - a \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}} \right)^2 = 0.$$

Pour que cette équation représente un cercle, il faut que l'on ait

$$\frac{1}{a^2} + k = \frac{1}{c^2};$$

d'où

$$k = \frac{a^2 - c^2}{a^2 c^2}.$$

Remplaçons : l'équation du premier cercle sera donc

$$x^2 + z^2 - \frac{2x}{a} \sqrt{a^2 - b^2} (a^2 - c^2) + a^2 - b^2 - c^2 = 0,$$

et celle du deuxième

$$x^2 + z^2 + \frac{2x}{a} \sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} + a^2 - b^2 - c^2 = 0.$$

Une courbe du deuxième degré tangente au premier cercle sera

$$x^2 + z^2 - \frac{2x}{a} \sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} + a^2 - b^2 - c^2 + M(x - \alpha)^2 = 0,$$

et, si elle est tangente au deuxième cercle, elle sera aussi

$$x^2 + z^2 + \frac{2x}{a} \sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} + a^2 - b^2 - c^2 + M(x + \alpha)^2 = 0.$$

Ces deux équations doivent être identiques; on doit donc avoir

$$M\alpha z = -\sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)};$$

d'où

$$\alpha^2 = \frac{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}{M^2 a^2};$$

donc l'équation de la conique cherchée sera

$$(1 + M)x^2 + z^2 + a^2 - b^2 - c^2 + \frac{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}{M a^2} = 0.$$

On voit que c'est une conique à centre, ce à quoi, du reste, on devait s'attendre. Discutons cette courbe méridienne, et par suite la nature de la surface cherchée.

Le binôme $B^2 - 4AC$ est égal à $-(1 + M)$. Or on peut exprimer M en fonction d'un des axes de la conique; si, en effet, on fait $x = 0$, on a

$$C^2 = -a^2 + b^2 + c^2 - \frac{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}{M a^2};$$

d'où

$$M = \frac{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}{a^2(b^2 + c^2 - a^2 - C^2)},$$

et l'équation de la méridienne devient

$$(b^2c^2 - a^2C^2)x^2 + a^2(b^2 + c^2 - a^2 - C^2)z^2 = a^2C^2(b^2 + c^2 - a^2 - C^2).$$

Nous distinguerons trois cas :

$$a^2 > b^2 + c^2, \quad a^2 = b^2 + c^2, \quad a^2 < b^2 + c^2.$$

1° C^2 variant de $-\infty$ à $b^2 + c^2 - a^2$, on obtient des ellipsoïdes imaginaires; de $b^2 + c^2 - a^2$ à zéro, on obtient des hyperboloïdes à deux nappes qui, réduits pour $C^2 = b^2 + c^2 - a^2$ à deux plans confondus, dégèrent en un cône pour $C^2 = 0$. C^2 variant de zéro à $\frac{b^2c^2}{a^2}$, on obtient des hyperboloïdes à une nappe; de $\frac{b^2c^2}{a^2}$ à $+\infty$, on obtient des ellipsoïdes. Le passage des hyperboloïdes aux ellipsoïdes a lieu par l'intermédiaire d'un cylindre et correspond à l'hypothèse $C^2 = \frac{b^2c^2}{a^2}$.

2° C^2 variant de $-\infty$ à zéro, on obtient des ellipsoïdes imaginaires; de zéro à $\frac{b^2c^2}{a^2}$, on obtient des hyperboloïdes à une nappe qui, réduits pour $C^2 = 0$ à deux plans confondus, dégèrent en un cylindre pour $C^2 = \frac{b^2c^2}{a^2}$. C^2 variant de $\frac{b^2c^2}{a^2}$ à $+\infty$, on a des ellipsoïdes.

3° C^2 variant de $-\infty$ à zéro, on obtient des ellipsoïdes imaginaires; de zéro à $b^2 + c^2 - a^2$, on a des ellipsoïdes qui, réduits pour $C^2 = 0$ à un point, dégèrent en deux plans confondus pour $C^2 = b^2 + c^2 - a^2$.

C^2 variant de $b^2 + c^2 - a^2$ à $\frac{b^2c^2}{a^2}$, on obtient des hyperboloïdes à une nappe; de $\frac{b^2c^2}{a^2}$ à $+\infty$, on obtient des

ellipsoïdes. Le passage des hyperboloïdes aux ellipsoïdes a lieu par l'intermédiaire d'un cylindre et correspond à l'hypothèse $C^2 = \frac{b^2 c^2}{a^2}$.

On peut donc résumer la discussion dans le tableau suivant :

$a^2 > b^2 + c^2$	{	$-\infty < C^2 < b^2 + c^2 - a^2$	ellipsoïd. imaginaires.
		$C^2 = b^2 + c^2 - a^2$	deux plans confondus.
		$b^2 + c^2 - a^2 < C^2 < 0$	hyp. à deux nappes.
		$C^2 = 0$	cône.
		$0 < C^2 < \frac{b^2 c^2}{a^2}$	hyperb. à une nappe.
		$C^2 = \frac{b^2 c^2}{a^2}$	cylindre.
$a^2 = b^2 + c^2$	{	$\frac{b^2 c^2}{a^2} < C^2 < +\infty$	ellipsoïdes.
		$-\infty < C^2 < 0$	ellipsoïd. imaginaires.
		$C^2 = 0$	deux plans confondus.
		$0 < C^2 < \frac{b^2 c^2}{a^2}$	hyperb. à une nappe.
		$C^2 = \frac{b^2 c^2}{a^2}$	cylindre.
		$\frac{b^2 c^2}{a^2} < C^2 < +\infty$	ellipsoïdes.
$a^2 < b^2 + c^2$	{	$-\infty < C^2 < 0$	ellipsoïd. imaginaires.
		$C^2 = 0$	point.
		$0 < C^2 < b^2 + c^2 - a^2$	ellipsoïdes.
		$C^2 = b^2 + c^2 - a^2$	deux plans confondus.
		$b^2 + c^2 - a^2 < C^2 < \frac{b^2 c^2}{a^2}$	hyperb. à une nappe.
		$C^2 = \frac{b^2 c^2}{a^2}$	cylindre.
		$\frac{b^2 c^2}{a^2} < C^2 < +\infty$	ellipsoïdes.

II. Si nous voulons maintenant l'équation générale de ces surfaces de révolution, nous aurons

$$(1) \quad (1 + M)x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - b^2 - c^2 + \frac{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}{Ma^2} = 0.$$

En effet, si $x = k$, on a bien un cercle, et si ou y ou z sont nuls, on a la courbe méridienne obtenue. Cherchons l'intersection de ces surfaces avec l'ellipsoïde; elle sera donnée par l'équation (1) et par

$$(2) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

La courbe d'intersection ne sera donc pas plane; mais elle jouit de certaines propriétés; la projection de cette courbe sur les plans de coordonnées est une conique. En effet, on sait que, si deux surfaces admettent le même plan diamétral pour une série de cordes parallèles, la projection de la courbe d'intersection sur ce plan parallèlement aux cordes est une conique. Or, ici, les trois plans diamétraux sont communs, et les courbes sont rapportées à leur centre et à leurs axes.

A l'aide de cette remarque, on peut construire la tangente en un point de la courbe; en effet, connaissant le point, on aura la valeur particulière de la variable M ; on a donc sur le plan des yz , par exemple, une conique dont on connaît les axes, et l'on pourra construire la tangente à la projection m de M par le procédé ordinaire. La tangente cherchée sera dans un plan passant par cette tangente mt parallèlement à l'axe des x ; de même, si l'on projette l'intersection sur le plan des xz , et si l'on mène la tangente $m't'$ au point m' projection de M sur ce plan, la tangente cherchée sera également dans un plan mené par $m't'$ parallèlement à l'axe des y ; donc la tangente, étant dans deux plans, sera leur intersection; donc la tangente est l'intersection des plans tangents aux

deux cylindres qui projettent la courbe sur deux des plans de coordonnées.

III. Démontrons maintenant que ces lignes forment sur la surface de l'ellipsoïde un réseau complet de courbes se coupant orthogonalement. Prenons les surfaces

$$(1) \quad (1+M)x^2+y^2+z^2+a^2-b^2-c^2+\frac{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}{Ma^2}=0,$$

$$(2) \quad (1+M')x^2+y^2+z^2+a^2-b^2-c^2+\frac{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}{M'a^2}=0,$$

et l'ellipsoïde

$$(3) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

L'équation (3) avec chacune des deux premières détermine une courbe. Or on sait que, si l'on a la courbe

$$f(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0,$$

les coefficients angulaires m et n d'une tangente à la courbe au point (x, y, z) sont

$$m = \frac{f'_z F'_y - f'_y F'_z}{f'_x F'_y - f'_y F'_x}, \quad n = \frac{f'_z F'_x - f'_x F'_z}{f'_x F'_y - f'_y F'_x}.$$

On sait, de plus, que, si m' et n' sont les coefficients angulaires d'une autre tangente, pour que ces deux droites soient rectangulaires, il faut que l'on ait

$$mm' + nn' + 1 = 0.$$

Or, ici, on a

$$m = \frac{z}{x} \frac{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}}{1+M - \frac{1}{a^2}}, \quad n = \frac{z}{y} \frac{\frac{1}{a^2} - \frac{1+M}{c^2}}{1+M - \frac{1}{a^2}},$$

$$m' = \frac{z}{x} \frac{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}}{1+M' - \frac{1}{a^2}}, \quad n' = \frac{z}{y} \frac{\frac{1}{a^2} - \frac{1+M'}{c^2}}{1+M' - \frac{1}{a^2}}.$$

Exprimons que ces courbes sont orthogonales, et pour cela que les tangentes sont rectangulaires, nous devons retomber sur une identité. Or on a alors

$$\frac{z^2 a^4}{x^2 c^4} \frac{(b^2 - c^2)^2}{[a^2(1 + M) - b^2][a^2(1 + M') - b^2]} + \frac{z^2 b^4 [a^2(1 + M) - c^2][a^2(1 + M') - c^2]}{y^2 c^4 [a^2(1 + M) - b^2][a^2(1 + M') - b^2]} + 1 = 0,$$

ou bien

$$(4) \left\{ \begin{aligned} & \frac{a^4}{x^2} (b^2 - c^2)^2 + \frac{b^4}{y^2} [a^2(1 + M) - c^2][a^2(1 + M') - c^2] \\ & + \frac{c^4}{z^2} [a^2(1 + M) - b^2][a^2(1 + M') - b^2] = 0. \end{aligned} \right.$$

Soit k le coefficient de $\frac{b^4}{y^2}$; on a

$$\begin{aligned} k &= (a^2 - c^2 + a^2 M)(a^2 - c^2 + a^2 M') \\ &= (a^2 - c^2)^2 + (a^2 - c^2)a^2(M + M') + a^4 MM'. \end{aligned}$$

Or, en vertu de (1)

$$M^2 a^2 x^2 + a^2 M(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - b^2 - c^2) + (a^2 - b^2)(a^2 - c^2) = 0,$$

on a

$$MM' = \frac{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}{a^2 x^2},$$

$$M + M' = -1 - \frac{y^2 + z^2 + a^2 - b^2 - c^2}{x^2};$$

donc on aura, en remplaçant,

$$\begin{aligned} k &= (a^2 - c^2)^2 - a^2(a^2 - c^2) \left(1 + \frac{y^2 + z^2 + a^2 - b^2 - c^2}{x^2} \right) \\ &+ \frac{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)a^2}{x^2} \\ &= -c^2(a^2 - c^2) - \frac{(a^2 - c^2)a^2(y^2 + z^2)}{x^2} + \frac{c^2 a^2(a^2 - c^2)}{x^2} \\ &= \frac{a^2 - c^2}{x^2} (a^2 c^2 - c^2 x^2 - a^2 y^2 - a^2 z^2). \end{aligned}$$

Mais, en vertu de l'équation (3),

$$a^2c^2 - c^2x^2 - a^2z^2 = \frac{a^2c^2y^2}{b^2};$$

donc

$$k = \frac{a^2 - c^2}{x^2} \left(\frac{a^2c^2y^2}{b^2} - a^2y^2 \right) = \frac{a^2(a^2 - c^2)(c^2 - b^2)y^2}{b^2x^2}.$$

De même on aurait, pour le coefficient k' de $\frac{c^4}{z^2}$ de l'équation (4),

$$k' = \frac{a^2(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)z^2}{c^2x^2};$$

donc, en substituant dans (4), on aura

$$\frac{a^4}{x^2}(b^2 - c^2)^2 + \frac{a^2b^2(a^2 - c^2)(c^2 - b^2)}{x^2} + \frac{a^2c^2(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}{x^2} = 0,$$

ou bien

$$a^2(b^2 - c^2) - a^2(b^2 - c^2) = 0,$$

ce qui est une identité; donc toutes ces courbes se coupent orthogonalement sur la surface de l'ellipsoïde.
