

J. CLERK MAXWELL

Sur la cyclide

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 10
(1871), p. 162-181

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__162_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1871, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LA CYCLIDE ;

PAR J. CLERK. MAXWELL,

du college de la Trinité, à Cambridge.

(Traduit de l'anglais de *The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics.*)

Dans les traités d'optique, les foyers primaire et secondaire d'un faisceau délié sont quelquefois représentés par deux lignes droites coupant l'axe du faisceau à angle droit et situées dans des plans à angle droit l'un sur l'autre. Chaque rayon de ce faisceau est supposé passer par ces deux lignes et former ainsi ce que M. Plucker a appelé une *congruence du premier ordre*.

Le système de rayons ainsi définis ne peut remplir la condition essentielle des faisceaux optiques, qui est que tous les rayons doivent avoir une surface d'onde commune, car on ne peut mener aucune surface qui coupe tous les rayons d'un pareil faisceau à angle droit.

Sir W.-R. Hamilton a prouvé que les foyers primaire et secondaire sont en général les points de contact du rayon avec la surface des centres de la surface d'onde, laquelle forme un double caustique. Si l'on prend un faisceau de rayons correspondant à une petite aire de la surface d'onde, leurs points de contact se trouvent sur

deux petites aires des deux nappes de la surface caustique. Les sections du faisceau par deux plans perpendiculaires à son axe apparaîtront, si le faisceau est suffisamment délié, comme deux petites droites situées dans des plans rectangulaires.

Je me propose de déterminer la forme de la surface d'onde telle, qu'il y ait une ou deux des lignes ainsi appelées *lignes focales* formant réellement une ligne et non plus seulement la projection d'une petite aire de surface courbe.

Déterminons d'abord la condition pour que toutes les normales d'une surface passent par une courbe fixe.

Soit R un point d'une surface, RP une normale en R rencontrant la courbe fixe en P, PT la tangente en P à la courbe fixe, et RPT un plan passant par R et PT.

Des deux lignes de courbure en R, l'une touche le plan RPT, et l'autre lui est perpendiculaire. Donc, si le plan RPT tourne autour de la tangente PT comme axe, il sera toujours normal à la seconde ligne de courbure; cette seconde ligne de courbure est donc un cercle, et PT passe sur son centre perpendiculairement à son plan. Toutes les normales le long de la seconde ligne de courbure sont égales et également inclinées sur PT, de sorte que l'on peut les considérer comme les génératrices d'un cône droit dont l'axe est la tangente à la courbe fixe, ou comme les rayons d'une sphère de centre P qui touche la surface tout le long de la ligne de courbure.

La surface peut donc être considérée comme l'enveloppe d'une série de sphères dont les centres sont sur une courbe fixe et dont les rayons varient suivant une certaine loi.

Si les normales passent par deux courbes fixes, la surface doit être aussi l'enveloppe d'une seconde série de sphères dont les centres sont sur la seconde courbe, et

telles que chacune d'entre elles touche toutes les sphères de la première série.

Si l'on prend trois quelconques des sphères de la première série, la surface peut être considérée comme l'enveloppe de toutes les sphères qui touchent continuellement les trois sphères données.

Telle est la définition donnée par Dupin, dans ses *Applications de Géométrie* (p. 200), de la surface du quatrième ordre appelé *cyclide*, parce que ses deux séries de lignes de courbure sont des cercles.

Si les trois sphères fixes sont données, elles peuvent être toutes les trois du même côté (à l'intérieur ou à l'extérieur) de la sphère tangente, ou bien l'une d'elles peut être située d'une manière opposée par rapport aux deux autres. Il y a donc quatre séries différentes de sphères que l'on peut mener tangentes aux trois mêmes sphères; mais on ne peut pas passer d'une manière continue de l'une à l'autre, et les normales aux cyclides correspondantes passent par des courbes fixes différentes.

Cherchons la nature des deux courbes fixes. Puisque toutes les normales passent par les deux courbes, et puisque toutes celles qui passent en un point P sont également inclinées sur la tangente en P , la seconde courbe doit être sur un cône droit. Si maintenant le point P est pris de telle sorte que sa distance à un point P de la seconde courbe soit un minimum, alors PQ sera perpendiculaire à PT , et le cône droit deviendra un plan. Donc la seconde courbe est une conique plane. On verrait de la même manière que la première courbe est une conique plane.

Les deux courbes sont donc deux coniques planes telles, que le cône dont la base est l'une de ces coniques et le sommet un point quelconque de l'autre soit de révolution. Ces courbes sont donc dans des plans rectangulaires,

et les foyers de l'une sont les sommets de l'arc transverse de l'autre. Nous appellerons ces courbes les *coniques focales* de la cyclide.

Soient

$$(1) \quad x = \cos \alpha, \quad y = (c^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} \sin \alpha, \quad z = 0$$

les équations d'un point de l'ellipse, α étant l'angle excentrique, et soient les équations d'un point de l'hyperbole

$$(2) \quad x = a \sec B, \quad y = 0, \quad z = (c^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} \tan B,$$

dans lesquelles B est un angle tel, que ces deux coniques remplissent les conditions proposées.

Pour l'uniformité, nous ferons usage quelquefois des fonctions hyperboliques

$$(3) \quad \cosh \beta = \frac{1}{2}(e^\beta + e^{-\beta}), \quad \sinh \beta = \frac{1}{2}(e^\beta - e^{-\beta}),$$

et l'on suppose que β et B sont liés par les relations

$$(4) \quad \begin{cases} \cosh \beta = \sec B, & \text{d'où} \quad \sinh \beta = \tan B, \\ \sec h \beta = \cos B, & \text{d'où} \quad \tanh \beta = \sin B. \end{cases}$$

Les équations d'un point de l'hyperbole peuvent donc s'écrire

$$(5) \quad x = b \cosh \beta, \quad y = 0, \quad z = (c^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} \sinh \beta.$$

Première construction de la cyclide par points. — Soient P un point de l'ellipse, O un point de l'hyperbole; alors

$$(6) \quad PQ = c \sec B - b \cos \alpha.$$

Prenons sur PQ un point R tel que

$$(7) \quad PR = r - b \cos \alpha,$$

ou

$$(8) \quad QR = r - c \sec B,$$

où r est une constante. Alors, si α et B varient, R donnera un système de points de la cyclide (bcr) .

Car, si P est fixe et Q variable, R décrit un cercle; si Q est fixe pendant que R varie, R décrit un autre cercle, et ces cercles se coupent à angle droit et sont perpendiculaires à PQR à leur intersection, et puisque P et Q sont des points des deux coniques, le système entier de cercles forme une cyclide.

Le cercle correspondant à un point fixe P sur l'ellipse est dans un plan qui coupe celui des xz le long de la ligne

$$(9) \quad x = \frac{br}{c}, \quad y = 0,$$

et fait avec lui un angle φ donné par la relation

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{c}{(c^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}} \operatorname{tang} \alpha.$$

Le cercle correspondant à un point fixe Q sur l'hyperbole a donc un plan qui coupe le plan des xy suivant la ligne

$$(10) \quad x = \frac{cr}{b}, \quad z = 0,$$

et fait avec lui un angle ψ tel que l'on ait

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{b^2}{(c^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}} \sin B.$$

Donc, tous les plans des cercles de chaque série passent par l'une de ces deux droites fixes, qui sont à angle droit l'une sur l'autre, et dont la plus courte distance est

$$r \frac{c^2 - b^2}{bc}.$$

La ligne d'intersection des plans des deux cercles qui

passent par le point R doit donc rencontrer ces deux lignes en des points S et T, et les coordonnées de S sont

$$(11) \quad x = \frac{cr}{b}, \quad y = \frac{(c^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}}{b} \operatorname{tang} \alpha, \quad z = 0,$$

et celles de T

$$(12) \quad x = \frac{br}{c}, \quad y = 0, \quad z = -\frac{(c^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}}{c} \sin B,$$

et il est facile de prouver que

$$(13) \quad \frac{SR}{TR} = \frac{1 - \frac{r}{b} \sec \alpha}{1 - \frac{r}{c} \cos B} = \rho.$$

On en déduit ce qui suit.

Seconde construction par points. — On trace les deux lignes fixes, on détermine les deux points S et T donnés par les équations (11) et (12), et l'on trace ST, que l'on partage en R de telle sorte que le rapport des segments soit celui donné par l'équation (13). R est un point de la cyclide.

Cette construction est très-convenable pour tracer une projection de la cyclide lorsque les distances sont mesurées sur les projections des lignes fixes, et cette ligne ST peut être divisée dans le rapport donné au moyen de la règle et du compas, en ne traçant sur le papier aucun autre point que la position du point R cherché.

Formes de la cyclide. — Nous supposons que b et c sont donnés, et nous allons chercher à déterminer la forme suivant les différentes valeurs de r . Puisque les cyclides correspondant aux valeurs négatives de r ne diffèrent de celles qui correspondent aux valeurs positives égales que parce que leurs limites positive et négative sur l'axe

des x sont renversées, nous étudierons seulement les valeurs positives.

1. Lorsque r est compris entre zéro et b , la section dans le plan de l'ellipse consiste en deux cercles, dont les centres sont les foyers, et qui se coupent en un point de l'ellipse. La section dans le plan de l'hyperbole consiste en deux cercles extérieurs l'un à l'autre, dont les centres sont les sommets de l'ellipse. La cyclide elle-même est formée de deux lobes extérieurs l'un à l'autre, dont le plus large est le négatif, et augmente avec r , tandis que le lobe positif décroît. Chaque lobe se termine en deux points coniques suivant lesquels il rencontre l'autre lobe. Le cône de contact en ces points singuliers est un cône droit, dont l'axe est tangent à l'ellipse, et dont le demi-angle au sommet est

$$\text{arc cos} \left(\frac{b^2 - r}{c^2 - r} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

La figure complète ressemble à deux paires de cornes, les cornes d'une paire étant réunies par la base et les deux paires se touchant par leurs sommets (*).

2. Lorsque r est compris entre b et c , la cyclide consiste en une seule nappe, en forme d'anneau, dont la section la plus grande est du côté négatif.

3. Lorsque r est plus grand que c , la cyclide se compose de deux nappes, l'une intérieure, l'autre extérieure,

(*) Nous regrettons de ne pouvoir donner ici les remarquables figures tracées par l'auteur et reproduites par le *Quarterly Journal*, figures qui ont surtout l'avantage de parfaitement faire comprendre les formes de la surface, puisqu'elles sont disposées pour être vues au moyen d'un stéréoscope

(Note du Traducteur)

qui se rencontrent en deux points coniques situés sur la branche positive de l'hyperbole. Le demi-angle au sommet pour ces points a pour mesure

$$\text{arc cos} \left(\frac{r^2 - c^2}{r^2 - b^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Il y a en outre dans toutes les formes de cyclides un plan tangent singulier, qui touche la cyclide le long du cercle correspondant à $B = \frac{\pi}{2}$.

Dans ce cas, la nappe extérieure avec ses cercles de contact et ses points coniques rentrants, et la nappe intérieure avec ses points coniques rencontrant ceux de la nappe extérieure, offre une certaine ressemblance avec les nappes extérieure et intérieure de la surface d'onde de Fresnel; et si l'on se rappelle que la surface d'onde a quatre points singuliers pareils, tandis que la cyclide n'en a que deux, on pourra se servir de la figure de cette dernière pour se faire une idée des points singuliers de la surface d'onde.

Si l'on donne à r toutes les valeurs entre $+\infty$ et $-\infty$, la cyclide prend successivement les formes (3), (2), (1), (-1), (-2), (-3), et chaque point est rencontré quatre fois par la surface. En effet, lorsque r est infini, un point quelconque R est dans le noyau ou nappe intérieure de (3). Si r diminue, le noyau se contracte, et, pour $r = c$, il est nul.

Donc, pour une certaine valeur $r_1 > c$, la surface du noyau passe par le point R. A ce moment, la nappe extérieure de la cyclide est encore au-delà de R, mais si r diminue la surface se contracte, et, finalement, s'évanouit pour $r = -b$. Donc r doit avoir passé par une valeur r_2 pour laquelle la surface contient le point R. A ce moment, la surface peut avoir l'une des formes de

la nappe extérieure de (3), ou de la cyclide en anneau à une nappe (2) ou du lobe négatif de (1).

Le lobe positif de (1) commence à paraître lorsque r devient inférieur à b , et augmente lorsque r diminue, de sorte que pour $r = -b$ il devient un anneau, et, pour $r = -c$, il devient la nappe extérieure de (-3) .

La surface, par suite, pour une certaine valeur r_3 de r , passe par le point R. Cette valeur est nécessairement inférieure à r_2 .

Lorsque r a atteint la valeur $(-c)$, la nappe intérieure de (-3) se développe et augmente indéfiniment lorsque r diminue, de telle sorte que, pour une certaine valeur r_4 de r , laquelle est inférieure à r_3 , le point R est sur la surface intérieure de cette nappe.

On voit ainsi que l'on peut dire que la cyclide a quatre nappes, mais que deux seulement au plus sont réelles simultanément. Ces quatre nappes se touchent en trois points coniques.

La première nappe, correspondant à r_1 , est la nappe intérieure de la cyclide (3) et touche toujours la seconde nappe en un point conique sur la branche positive de l'hyperbole.

La seconde nappe, correspondant à r_2 , a trois formes différentes, pouvant être la nappe extérieure de (3), la cyclide anneau à une nappe (2) ou le lobe négatif de (1). Si la première nappe existe, elle la rencontre en un point conique sur la branche positive de l'hyperbole, et, si la troisième nappe existe, elle la rencontre en un point conique sur l'ellipse.

La troisième nappe, correspondant à r_3 , a aussi trois formes différentes. Elle peut être le lobe positif de (1), la cyclide anneau (-2) ou la nappe extérieure de (-3) . Dans le premier cas, elle a un point conique sur l'ellipse, où elle rencontre la seconde nappe; dans le second cas,

elle n'a pas de point conique, et, dans le troisième, elle rencontre la quatrième nappe en un point situé sur la branche négative de l'hyperbole.

La quatrième nappe est la nappe intérieure de la cyclide (— 3) et rencontre toujours la troisième nappe en un point conique situé sur la branche négative de l'hyperbole.

Cyclides paraboliques. — Si les valeurs de b, c, r, x sont augmentées chacune de la même quantité et si cette quantité croît indéfiniment, les deux coniques deviennent, à la limite, deux paraboles dans des plans perpendiculaires, le foyer de l'une étant le sommet de l'autre, et la cyclide devient ce que l'on peut appeler *parabolique*.

Si r est compris entre b et c , la cyclide consiste en une nappe indéfinie, entièrement située entre les plans $x = 2b - r, x = 2c - r$. Les portions de l'espace situées sur les côtés positif et négatif de la nappe sont reliées entre elles, comme la terre et l'air sont reliés entre eux, par une surface de séparation, les terres, dont la surface fait partie, embrassant l'air par-dessous, pendant que l'air embrasse la surface par-dessus.

Lorsque r n'est pas compris entre b et c , la cyclide consiste en un lobe ayant deux points coniques, et une masse infinie avec deux points coniques rencontrant ceux du lobe.

Surfaces de révolution. — Lorsque $b = 0$, la cyclide est la surface formée par la révolution d'un cercle de rayon r autour d'une ligne de son plan située à une distance c du centre.

Si r est inférieur à c , la forme est celle d'un anneau régulier (tore); si $r > c$, la surface consiste en deux nappes, l'une intérieure, l'autre extérieure, se rencontrant en deux points coniques. Pour $b = c$, la cyclide se résout d'elle-même en deux sphères tangentes extérieu-

rement si $b > r$, et intérieurement si $r > b$. Si $b = c = 0$, les deux sphères se confondent.

Si l'origine est transférée en un point conique, et si les dimensions de la figure augmentent indéfiniment, la cyclide devient finalement un cône droit ayant le même angle conique que la cyclide originale. Si $b = c$, le cône devient un plan.

Lorsque b restant fini, les quantités c, r, x sont augmentées d'une même quantité infiniment grande, la cyclide devient finalement un cylindre droit dont le rayon est $r - c$.

Inversion de la cyclide. — Puisque toute sphère, lorsqu'on la transforme au moyen de l'inverse des rayons menés par un point fini, devient une autre sphère, toute cyclide transformée de cette manière devient une autre cyclide. Il y a cependant certaines relations entre les paramètres de l'une des cyclides et ceux de l'autre, à savoir :

$$(14) \quad \frac{r^2 - b^2}{r^2 - c^2} = \frac{r'^2 - b'^2}{r'^2 - c'^2},$$

ou

$$(15) \quad \frac{r^2 - b^2}{r^2 - c^2} = \frac{r'^2 - c'^2}{r'^2 - b'^2}.$$

Si le point d'inversion est pris sur l'un des cercles

$$(16) \quad x^2 + y^2 - \frac{2brx}{c} + b^2 + r^2 - c^2 = 0, \quad z = 0,$$

ou

$$(17) \quad x^2 + z^2 - \frac{2crz}{b} - b^2 - r^2 + c^2 = 0, \quad y = 0,$$

la cyclide devient une surface de révolution dans laquelle $b' = 0$, et

$$(18) \quad \frac{r'^2}{c'^2} = \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}$$

si le point d'inversion est sur le premier cercle, ou

$$(19) \quad \frac{r'^2}{c'^2} = \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2}$$

si le point d'inversion est sur le second cercle.

Lorsque r est inférieur à c , le premier cercle est réel ; si $r > b$, le second est réel. Dans la cyclide anneau, r est compris entre b et c , et, par suite, cette cyclide peut être transformée en tore de deux manières différentes.

Si la cyclide a des points coniques, et que l'on y prenne l'un d'eux pour point d'inversion, la cyclide devient un cône droit, dont le demi-angle au sommet a pour cosinus

$$\left(\frac{b^2 - r^2}{c^2 - r^2} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ si } r < b, \text{ ou } \left(\frac{r^2 - c^2}{r^2 - b^2} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ si } r > c.$$

Si le point d'inversion est

$$x = \frac{bc}{r}, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

la surface est inverse d'elle-même.

Fonctions isothermales conjuguées de la cyclide. Définition. — Si sur une surface on mène deux systèmes de courbes, chaque courbe individuelle étant définie par la valeur d'un paramètre qui lui correspond, et si les deux systèmes de courbes se coupent toujours à angle droit ; si enfin le rapport du segment compris sur une courbe du second système entre deux courbes consécutives du premier au segment compris sur une courbe du premier système entre deux courbes consécutives du second est égal à celui de la différence entre les paramètres des deux courbes du premier système à la différence des paramètres des deux courbes du second système ; on appelle alors ces deux systèmes de courbes des *lignes isothermales conjuguées*, et les deux paramètres sont des

fonctions isothermales conjuguées. Si la surface est supposée une lame conductrice uniforme placée entre deux milieux non conducteurs, l'une des séries de ces lignes sera les lignes isothermales pour la chaleur ou équipotentielles pour l'électricité, et l'autre série les lignes de conductibilité (voir LAMÉ, *Fonctions isothermales*).

Cette propriété des lignes de la surface n'est pas changée par l'inversion.

Dans la cyclide, on trouve que le segment ds_1 d'une ligne de courbure du premier système est

$$(20) \quad ds_1 = \frac{r + c \cosh \beta}{c \cosh \beta - b \cos \alpha} (c^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} d\alpha,$$

et le segment ds_2 d'une ligne de courbure du second système est

$$(21) \quad ds_2 = \frac{r - b \cos \alpha}{c \cosh \beta - b \cos \alpha} (c^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} d\beta.$$

Si maintenant θ est une fonction de α et φ de β , telles que

$$\frac{ds_1}{ds_2} = \frac{d\theta}{d\varphi},$$

θ et φ seront des fonctions isothermales conjuguées.

Si

$$(22) \quad \theta = K \int \frac{d\alpha}{r - b \cos \alpha}, \quad \varphi = K \int \frac{d\beta}{r - c \cosh \beta},$$

la condition est satisfaite. Si r est plus grand que b , on trouve :

$$(23) \quad \text{tang} \frac{\theta}{(r^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(r^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} \sin \alpha}{b - r \cos \alpha}.$$

Il est plus commode d'avoir α en fonction de θ de la

manière suivante :

$$\sin \alpha = \frac{(r^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\theta}{(r^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}}}{r + b \cos \frac{\theta}{(r^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}}},$$

$$(24) \quad \cos \alpha = \frac{b + r \cos \frac{\theta}{(r^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}}}{r + b \cos \frac{\theta}{(r^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}}}.$$

Si r est plus petit que b , on substituera $(b^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}$ à $(r^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}$, et on changera les fonctions circulaires en fonctions hyperboliques.

De même, on obtiendra pour les relations entre β et φ , lorsque r est plus grand que c ,

$$\operatorname{tang} B = \sinh \beta = \frac{(r^2 - c^2)^{\frac{1}{2}} \sinh \frac{\varphi}{(r^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}}}{r + c \cosh \frac{\varphi}{(r^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}}},$$

$$(25) \quad \operatorname{sec} B = \cosh \beta = \frac{c + r \cosh \frac{\varphi}{(r^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}}}{r + c \cosh \frac{\varphi}{(r^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}}}.$$

Si r est plus petit que c , on substituera $(c^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}$ à $(r^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}$, et l'on changera les fonctions hyperboliques en fonctions circulaires.

Ayant trouvé ces couples de fonctions isothermales conjuguées, on peut en déduire d'autres couples, comme

θ_1 et φ_1 , pour lesquels on a

$$(26) \quad \frac{d\theta_1}{d\theta} = \frac{d\varphi_1}{d\varphi}, \quad \frac{d\theta_1}{d\phi} = -\frac{d\varphi_1}{d\theta}.$$

Cyclides confocales. — Un système de cyclides dans lesquelles l'ellipse et l'hyperbole focales restent les mêmes, r étant une quantité variable, peut s'appeler un *système confocal*.

Ce système de cyclides et les deux systèmes de cônes droits qui ont leurs sommets sur l'une des coniques et passent par l'autre forment trois systèmes de surfaces orthogonales, qui, par conséquent, se coupent le long de leurs lignes de courbure. Par l'inversion on peut obtenir trois systèmes de cyclides se coupant orthogonalement.

Un système de cyclides confocales peut être considéré encore comme un système de surfaces d'onde dans un milieu isotrope, correspondant à un faisceau de rayons, dont chaque rayon coupe les deux coniques focales. Chaque cyclide correspond à une certaine valeur de r , que l'on peut appeler la *longueur du rayon de la cyclide*.

Considérons maintenant le système de surfaces confocales

$$(27) \quad \frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1.$$

En posant $\rho = c$, on trouve l'ellipse

$$(28) \quad \frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2 - b^2} = 1, \quad z = 0;$$

en faisant $\rho = b$, on a l'hyperbole

$$(29) \quad \frac{x^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2 - b^2} = 1, \quad y = 0.$$

Ces deux coniques font donc partie du système et peuvent être appelées ses *coniques focales*.

Si d'un point R, comme sommet, on mène deux cônes passant par l'ellipse et l'hyperbole, ces cônes seront des cônes confocaux, et leurs trois axes seront les normales aux trois systèmes de surfaces confocales passant par le point R. Ces cônes se couperont à angle droit le long des quatre génératrices r_1, r_2, r_3, r_4 , qui seront normales aux quatre cyclides passant par le point R.

La normale à l'ellipsoïde passant par le point R sera l'axe réel du cône passant par l'ellipse, lequel axe bissecte l'angle de r_1 et r_2 , ainsi que celui de r_3 et r_4 . Si l'ellipsoïde est une surface réfléchissante, un rayon incident de direction r_1 devra se réfléchir suivant la direction r_2 . Donc, d'après la théorie des ondes, $r_1 + r_2$ est constant pour l'ellipsoïde. Au point de l'ellipsoïde ($\rho = \text{const.}$) où il est coupé par l'axe des x , on a

$$x = \rho, \quad r_1 = x + c, \quad r_2 = x - c;$$

de sorte que l'équation de l'ellipsoïde ($\rho = \text{const.}$) peut être exprimée en fonction de ρ comme il suit :

$$(30) \quad r_1 + r_2 = 2\rho.$$

La normale à l'ellipsoïde bissecte en outre l'angle formé par r_3 et r_4 , d'où l'on déduit cette autre formule

$$(31) \quad r_3 + r_4 = -2\rho.$$

Par suite, la relation générale entre les valeurs de r est

$$(32) \quad r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 0.$$

La normale à l'hyperboloïde à une nappe ($\mu = \text{const.}$) bissecte l'angle des lignes r_1 et r_3 , ainsi que celui des lignes r_2 et r_4 , et l'on a les équations

$$(33) \quad r_1 + r_3 = 2\mu = -(r_2 + r_4).$$

La normale à l'hyperboloïde à deux nappes ($\nu = \text{const.}$)

bissecte les angles (r_2, r_3) et (r_1, r_4) ; d'où

$$(34) \quad r_2 + r_3 = 2\nu = -(r_1 + r_4).$$

Telles sont les équations des surfaces en fonction des quatre rayons du faisceau. Les équations des quatre cyclides en fonction des coordonnées elliptiques s'en déduisent facilement :

$$(35) \quad \begin{cases} r_1 = \rho + \mu - \nu, \\ r_2 = \rho - \mu + \nu, \\ r_3 = -\rho + \mu + \nu, \\ r_4 = -\rho - \mu - \nu. \end{cases}$$

Puisque les quantités

$$\rho, c, \mu, b, \nu, 0$$

sont rangées par ordre de grandeur décroissante, il est évident que

$$r_1, \rho, r_2, r_3, -\rho, r_4$$

sont aussi rangés par ordre de grandeur décroissante.

L'équation générale de la cyclide en coordonnées elliptiques est

$$(36) \quad (r - \rho - \mu + \nu)(r - \rho + \mu - \nu)(r + \rho - \mu - \nu)(r + \rho + \mu + \nu) = 0,$$

et peut être exprimée en coordonnées cartésiennes comme il suit :

$$(37) \quad \begin{cases} (x^2 + y^2 + z^2 - r^2)^2 - 2(x^2 + r^2)(b^2 + c^2) \\ - 2(y^2 - z^2)(c^2 - b^2) + 8bcrx + (c^2 - b^2)^2 = 0. \end{cases}$$

Lorsque $b = c$, il y a deux points focaux F et F' , et les valeurs des rayons sont

$$(38) \quad \begin{cases} r_1 = \mathbf{RF} + c, \\ r_2 = \mathbf{RF}' - c, \\ r_3 = -\mathbf{RF} + c, \\ r_4 = -\mathbf{RF} - c. \end{cases}$$

L'équation de l'ellipsoïde

$$(39) \quad r_1 + r_2 = 2\rho = \mathbf{RF} + \mathbf{RF}'$$

exprime dans ce cas la propriété de l'ellipsoïde allongé, que la somme des distances d'un point quelconque aux deux foyers est constante.

De la même manière, l'équation

$$r_2 + r_3 = 2\nu = \mathbf{RF}' - \mathbf{RF}$$

exprime la propriété de l'hyperboloïde de révolution à deux nappes, que la différence des distances focales est constante.

Dans le but d'étendre une propriété analogue aux autres surfaces confocales, concevons la construction mécanique suivante.

Supposons les courbes focales représentées par des fils déliés et polis, et une tige droite et indéfinie restant toujours sur les deux courbes, r étant compté sur cette tige à partir d'un de ses points. Un fil, dont la longueur est $(c + b)$, est attaché par l'une de ses extrémités au foyer négatif de l'ellipse, et par l'autre au point $(+ b)$ de la tige et glisse sur l'ellipse au point où cette courbe rencontre la tige. Pour le tenir toujours tendu, un autre fil égal passe par le foyer positif de l'ellipse, rencontre l'ellipse et se fixe au point $(- b)$ de la tige. Ce fil détermine le point de la tige qui reste sur un point donné de l'ellipse. Supposons que la tige reste aussi sur l'hyperbole, de sorte que la portion positive de la tige soit sur la branche positive de l'hyperbole, ou la portion négative sur la branche négative. Alors le point r de la tige est sur la surface de la cyclide de paramètre r ; et comme la tige glisse sur l'ellipse et l'hyperbole, le point r décrit toute la surface de la cyclide.

Considérons un point R de l'espace; la tige passera par

ce point dans quatre positions différentes, considérant aux quatre lignes d'intersection des cônes dont le sommet est R, et qui passent par l'ellipse et l'hyperbole.

La première position r_1 correspond à la première nappe de la cyclide qui passe par le point R. Si je désigne l'intersection de l'ellipse et de la tige par E, l'intersection avec les branches positive ou négative de l'hyperbole par $+H$ ou $-H$, l'ordre des intersections, dans ce cas, sera

$$E, +H, R.$$

La seconde position r_2 correspond à la seconde nappe, et l'ordre des intersections est

$$E, R, +H, \text{ ou } -H, E, R.$$

La position r_3 correspond à la troisième nappe, et donne pour l'ordre des intersections

$$R, E, +H, \text{ ou } -H, R, E.$$

La quatrième position r_4 correspond à la quatrième nappe, et l'ordre des intersections est

$$R, -H, E,$$

les lettres étant toujours disposées dans l'ordre de croissance de r .

Ce système complet de rayons est un exemple de congruence linéaire du quatrième ordre.

Maintenant, si deux tiges suivant les conditions précédentes se coupent en R en deux quelconques de leurs positions, et si un fil de longueur suffisante est fixé à un point suffisamment éloigné dans la région négative de la première tige, passe sur le point R et se fixe à un point suffisamment éloigné dans la région négative de l'autre fil, et si les deux tiges se déplacent en laissant toujours le fil

tendu en leur point d'intersection R, alors R trace une surface confocale.

Si les tiges sont dans la première et la deuxième position, ou dans la troisième et la quatrième, cette surface est un ellipsoïde.

Si elles sont dans la première et la troisième, ou dans la deuxième et la quatrième, c'est un hyperboloïde à une nappe.

Si elles sont dans la première et la quatrième, ou dans la deuxième et la troisième, c'est un hyperboloïde à deux nappes.

Dans le système confocal parabolique, la quatrième nappe de la cyclide est un plan, et r_4 est parallèle à l'axe des x .

Donc, si les rayons parallèles à l'axe d'un paraboloides sont réfléchis par la surface, ils passeront toujours par les deux paraboles focales du système, et la surface d'onde, après la réflexion, est une cyclide; et si les rayons sont réfléchis deux fois, ils redeviennent parallèles à l'axe.
