

CHASLES

**Propriétés des systèmes de coniques relatives,
toutes, à certaines séries de normales en
rapport avec d'autres lignes ou divers points**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 10
(1871), p. 145-162

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__145_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1871, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**PROPRIÉTÉS DES SYSTÈMES DE CONIQUES RELATIVES, TOUTES,
A CERTAINES SÉRIES DE NORMALES EN RAPPORT AVEC
D'AUTRES LIGNES OU DIVERS POINTS;**

PAR M. CHASLES.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXXII.)

Les systèmes de coniques donnent lieu à d'innombrables théorèmes concernant particulièrement leurs tangentes, leurs diamètres, leurs normales, les pôles de certaines droites, les polaires de certains points, etc. Il est fort difficile de classer de si nombreuses propositions, de manière à y recourir au besoin; d'autant plus que souvent dans une même proposition se trouvent diverses espèces de ces données principales à chacune desquelles on pourrait les rattacher.

Mais il en est dans lesquelles se trouve quelque condition générale de perpendicularité entre certaines séries de droites; et ce caractère spécial permet de les réunir. Il se subdivise même, à l'égard des propositions qui concernent particulièrement les normales aux coniques d'un système. Cette classe particulière, fort importante, suffit déjà pour donner lieu à de très-nombreuses propositions. Ce sont ces propositions qui font le sujet de ma Communication de ce jour.

Je les rangerai en trois paragraphes. Dans le premier sont des propositions diverses, c'est-à-dire qui ne présentent pas un caractère commun. Le deuxième renferme des propositions dans lesquelles une série de droites rencontrent une droite fixe en des points d'où partent d'autres droites dont on demande la courbe enveloppe, ou qui

déterminent certains points dont on cherche le lieu, ou se prêtent à diverses autres conditions. Dans le troisième paragraphe se trouvent des conditions de parallélisme et de perpendicularité, mais toutes relatives à quelque série de normales parallèles ou perpendiculaires à quelque autre série de droites.

Toutes les conditions qu'indique un énoncé de théorème concernent une même conique, mais s'étendent à toutes les coniques du système : d'après cela, on peut éviter le plus souvent de prononcer le mot *conique* dans les énoncés, ce qui les abrège et en facilite l'intelligence rapide.

Toutes les propositions dont je donne ici les énoncés ont été démontrées d'une manière générale par le *principe de correspondance*, bien qu'un certain nombre se puissent conclure de quelques cas particuliers, notamment quand il se trouve certains points ou droites fixes dans les conditions de la question. Ces cas particuliers peuvent être d'un secours très-utile, comme vérification, quand il se trouve, dans les démonstrations générales par le *principe de correspondance*, des solutions étrangères, parfois variées et difficiles à découvrir.

Un théorème donne lieu très-souvent à un ou à deux autres, dans lesquels la conclusion du premier devient le point de départ, c'est-à-dire une condition de la question.

Ces théorèmes se trouvent sous le même numéro que celui d'où ils découlent, et portent les lettres *a* et *b*. Mais j'en donnerai aussi la démonstration directe, qui exige généralement des considérations différentes de celles qui ont servi dans la démonstration du théorème primitif, et souvent aussi des difficultés différentes.

§ I. — *Théorèmes divers.*

1. Les droites menées d'un point Q aux pieds des normales abaissées d'un point N rencontrent les coniques en des points situés sur une courbe de l'ordre $6\mu + \nu$, qui a en Q un point multiple d'ordre 4μ .

a. Si d'un point Q on mène des droites aux points des coniques situés sur une droite D, et qu'aux points où ces droites rencontrent de nouveau les coniques on mène les normales, ces normales enveloppent une courbe de la classe $6\mu + \nu$.

b. Si des pieds des normales abaissées d'un point N on mène des droites aux points des coniques situés sur une droite D, ces droites enveloppent une courbe de la classe $6\mu + \nu$.

2. Par un point N, on mène les normales à chaque conique; chacune d'elles rencontre les autres en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $6\mu + 9\nu$, qui a en N un point multiple d'ordre $3\mu + 6\nu$.

La courbe a $6\mu + 9\nu$ points à l'infini; d'où l'on conclut que :

Un point N étant donné, il y a $6\mu + 9\nu$ coniques dans lesquelles deux des normales menées par ce point sont rectangulaires.

3. D'un point S on mène deux tangentes à chaque conique; la normale au point de contact de l'une rencontre l'autre en un point dont le lieu est une courbe d'ordre $\mu + 3\nu$ qui a en S un point multiple d'ordre $\mu + 2\nu$.

4. D'un point S, on mène à chaque conique des tangentes et le diamètre; les normales aux points de contact des tangentes rencontrent le diamètre en des points situés sur une courbe de l'ordre $\mu + 4\nu$, qui a en S un point multiple d'ordre $\mu + 2\nu$.

5. Si d'un point S on mène deux tangentes à chaque conique, les normales aux points de contact se coupent sur une courbe de l'ordre $\mu + 2\nu$.

6. Les normales aux points de contact des tangentes menées d'un point S ont leurs extrémités sur une courbe d'ordre $3\mu + 3\nu$.

a. Si des points de chaque conique sur une droite D on abaisse des normales, les tangentes aux pieds de ces normales enveloppent une courbe de la classe $3\mu + 3\nu$.

7. Les normales abaissées des points de contact des tangentes issues d'un point S ont leurs pieds sur une courbe de l'ordre $5\mu + 3\nu$.

Les points de la courbe situés à l'infini sont : 1^o deux points multiples imaginaires, d'ordre 2μ , aux points circulaires; 2^o les points de contact des $\mu + \nu$ asymptotes des coniques, qui passent par S ; et 3^o les points de contact des ν coniques tangentes à la droite de l'infini, dont chacun compte pour deux.

8. Si des points de contact des tangentes issues d'un point S on abaisse des normales sur les coniques, ces normales enveloppent une courbe de la classe $3\mu + 2\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre $\mu + \nu$ à l'infini.

a. Si d'un point N on abaisse des normales sur les coniques, les tangentes à leurs extrémités enveloppent une courbe de la classe $3\mu + 2\nu$.

9. Si des points de contact des tangentes issues d'un point S on abaisse des normales, les tangentes en leurs pieds enveloppent une courbe de la classe $2\mu + 3\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre 2ν à l'infini.

a. Si l'on mène les normales aux points de contact des tangentes issues d'un point S , les tangentes aux extrémités de ces normales enveloppent une courbe de la classe $2\mu + 3\nu$.

10. Si l'on mène les normales aux points de contact

des tangentes issues d'un point S , les tangentes aux extrémités de ces normales rencontrent les tangentes issues de S en des points dont le lieu est une courbe d'ordre $2\mu + 2\nu$, qui a en S un point multiple d'ordre $2\mu + \nu$.

11. Les normales aux deux points de chaque conique sur une droite D ont leurs points d'intersection sur une courbe d'ordre $\mu + \nu$.

12. La tangente en l'un des deux points de chaque conique sur une droite D rencontre la normale à l'autre point, sur une courbe de l'ordre $3\mu + 2\nu$.

13. Aux points a des coniques sur une droite D on mène les normales, et par des points a' d'une autre droite D' , qui correspondent anharmoniquement aux points a , on mène des parallèles à ces normales : ces parallèles enveloppent une courbe de la classe $3\mu + \nu$, qui a une tangente multiple d'ordre $2\mu + \nu$, coïncidante avec D' .

14. Par un point N on mène des normales et des tangentes à chaque conique, et aux points de contact de ces tangentes on mène d'autres normales : celles-ci rencontrent les premières en des points situés sur une courbe de l'ordre $6\mu + 10\nu$, qui a en N un point multiple d'ordre $2\mu + 2\nu$.

15. Les diamètres qui partent des pieds des normales abaissées d'un point N enveloppent une courbe de la classe $3\mu + 2\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre ν à l'infini.

a. Les normales aux extrémités des diamètres menés par un point P enveloppent une courbe de la classe $3\mu + 2\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre $\mu + 2\nu$ à l'infini.

16. Si d'un point N on mène les normales et les cordes qui leur sont perpendiculaires, les extrémités de ces cordes sont sur une courbe de l'ordre $6\mu + 2\nu$ qui a en N un point multiple d'ordre 4μ .

17. Si d'un point N on mène des normales, les droites qui joignent leurs pieds aux pôles d'une droite fixe enveloppent une courbe de la classe $3\mu + 3\nu$.

a. Si d'un point on mène des droites aux pôles d'une droite, les normales aux points où ces droites rencontrent les coniques enveloppent une courbe de la classe $3\mu + 3\nu$.

18. Si l'on mène d'un point N des normales et des tangentes à chaque conique, ces tangentes rencontrent les tangentes aux pieds des normales en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $\mu + 6\nu$, qui a un point multiple d'ordre $\mu + 2\nu$ en N.

19. Si par les pôles d'une droite on mène les normales, elles enveloppent une courbe de la classe $2\mu + 3\nu$.

a. Si d'un point N on mène des normales, il y a $2\mu + 3\nu$ coniques dans lesquelles une normale passe par le pôle d'une droite donnée.

20. Les normales abaissées d'un point N rencontrent les polaires d'un point P en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $5\mu + \nu$, qui a un point multiple d'ordre 4μ en N.

a. Si par les points où les polaires d'un point P rencontrent une droite D on mène des normales, ces normales enveloppent une courbe de la classe $5\mu + \nu$, qui a une tangente multiple d'ordre $\mu + \nu$, coïncidante avec D.

§ II. — *Théorèmes dans lesquels une série de droites rencontrent une droite fixe Δ en des points d'où partent d'autres droites.*

21. Si d'un point N on mène des normales, et que par les points où elles rencontrent une droite Δ on mène de nouvelles normales, celles-ci enveloppent une courbe

de la classe $7\mu + 7\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre $4\mu + 4\nu$ coïncidante avec Δ .

a. Si de deux points N, N' on mène des normales à chaque conique, les points d'intersection de ces normales sont sur une courbe de l'ordre $7\mu + 7\nu$, qui a deux points multiples d'ordre $3\mu + 3\nu$, en N et N' .

22. Si d'un point N on mène des normales, et que par les points où elles rencontrent une droite Δ on mène de nouvelles normales : celles-ci ont leurs pieds sur une courbe de l'ordre $8\mu + 5\nu$.

a. Si aux points des coniques sur une droite D on mène les normales, et que par les points où elles rencontrent une droite Δ on mène de nouvelles normales, celles-ci enveloppent une courbe de la classe $8\mu + 5\nu$.

b. Les normales menées par un point N rencontrent les normales aux points d'une droite D en des points situés sur une courbe de l'ordre $8\mu + 5\nu$, qui a en N un point multiple de l'ordre $6\mu + 3\nu$.

23. Les normales menées d'un point N rencontrent une droite Δ en des points d'où l'on mène de nouvelles normales : celles-ci rencontrent les tangentes aux pieds des premières, en des points situés sur une courbe de l'ordre $10\mu + 13\nu$.

24. Par un point N on mène les normales, et par les points où les tangentes en leurs pieds rencontrent une droite Δ on mène d'autres normales : celles-ci rencontrent les premières en des points dont le lieu est une courbe d'ordre $10\mu + 13\nu$, qui a en N un point multiple d'ordre $6\mu + 9\nu$.

25. D'un point N on mène des normales, et par les points où elles rencontrent une droite Δ on mène les diamètres : ces diamètres enveloppent une courbe de la classe $\mu + 5\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre 4ν coïncidante avec Δ .

a. Si d'un point P on mène les diamètres des coniques, les normales menées par les points où ils rencontrent une droite Δ enveloppent une courbe de la classe $\mu + 5\nu$.

b. Les normales menées par un point N rencontrent les diamètres menés par un point P en des points situés sur une courbe d'ordre $\mu + 5\nu$, qui a en N un point multiple d'ordre 4ν , et en P un point multiple d'ordre $\mu + \nu$.

26. D'un point N on mène des normales, et par les points où elles rencontrent une droite Δ on mène les diamètres des coniques : les conjuguées de ces diamètres enveloppent une courbe de la classe $5\mu + 5\nu$.

a. D'un point P on mène les diamètres des coniques, et par les points où les diamètres conjugués rencontrent une droite Δ on mène les normales : ces normales enveloppent une courbe de la classe $5\mu + 5\nu$.

b. D'un point N on mène des normales, et d'un point P les diamètres : les diamètres conjugués rencontrent les normales en des points situés sur une courbe de l'ordre $5\mu + 5\nu$, qui a un point multiple d'ordre $4\mu + 4\nu$ en N.

27. D'un point N on mène les normales, et par les points où elles rencontrent une droite Δ on mène les tangentes : ces tangentes enveloppent une courbe de la classe $2\mu + 6\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre 4ν coïncidante avec Δ .

a. Si d'un point S on mène des tangentes, et que par les points où elles rencontrent une droite Δ on mène des normales, ces normales enveloppent une courbe de la classe $2\mu + 6\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre $2\mu + 2\nu$ coïncidante avec Δ .

b. Si d'un point N on mène des normales, et d'un point S des tangentes, ces tangentes rencontrent les nor-

males en des points dont le lieu est une courbe d'ordre $2\mu + 6\nu$, qui a un point multiple d'ordre 4ν en N , et un point multiple d'ordre $2\mu + 2\nu$ en S .

28. Si d'un point N on mène les normales aux coniques, et que par les points où elles rencontrent une droite Δ on mène des tangentes, les normales aux points de contact de ces tangentes enveloppent une courbe de la classe $8\mu + 12\nu$.

a. Si d'un point N on mène des normales, et par leurs pieds des tangentes, et que par les points où ces tangentes rencontrent une droite Δ on mène d'autres normales, celles-ci enveloppent une courbe de la classe $8\mu + 12\nu$.

b. Si de deux points N, N' on mène des normales, les normales issues de N' rencontrent les tangentes aux pieds des normales issues de N , en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $8\mu + 12\nu$, qui a en N' un point multiple d'ordre $4\mu + 8\nu$.

29. D'un point N on mène des normales, et par leurs pieds on mène les tangentes; par les points où ces tangentes rencontrent une droite Δ on mène de nouvelles tangentes : celles-ci enveloppent une courbe de la classe $\mu + 6\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre 4ν coïncidante avec Δ .

a. Si d'un point S on mène des tangentes, et que par les points où elles rencontrent une droite Δ on mène de nouvelles tangentes, les normales en leurs points de contact enveloppent une courbe de la classe $\mu + 6\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre 4ν coïncidante avec Δ .

b. D'un point N on mène des normales, et d'un point S des tangentes : ces tangentes rencontrent les tangentes aux pieds des normales en des points situés sur une courbe de l'ordre $\mu + 6\nu$, qui a en S un point multiple de l'ordre $\mu + 2\nu$.

30. D'un point N on mène les normales, et par les

points où elles rencontrent une droite Δ on mène les tangentes : les points de contact de ces tangentes sont sur une courbe d'ordre $6\mu + 6\nu$.

a. Si l'on mène les tangentes aux coniques en leurs points sur une droite D , et que par les points où ces tangentes rencontrent une droite Δ on mène les normales, ces normales enveloppent une courbe de la classe $6\mu + 6\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre $2\mu + 2\nu$ coïncidante avec D .

b. Les normales menées par un point N rencontrent les tangentes aux points d'une droite en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $6\mu + 6\nu$, qui a un point multiple d'ordre $4\mu + 4\nu$ en N .

31. Si par les points où les normales aux points d'une droite D rencontrent une droite Δ on mène de nouvelles normales, les pieds de celles-ci sont sur une courbe de l'ordre $8\mu + 4\nu$.

a. Les coniques étant coupées par deux droites D, D' , les normales aux points de l'une rencontrent les normales aux points de l'autre en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $8\mu + 4\nu$, qui a un point multiple d'ordre μ en (D, D') .

32. Aux points des coniques sur une droite D on mène les normales, et par les points où elles rencontrent une droite Δ on mène des tangentes : ces tangentes enveloppent une courbe de la classe $4\mu + 4\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre 2ν coïncidante avec Δ .

a. Si d'un point S on mène des tangentes, et que par les points où elles rencontrent une droite Δ on mène des normales, les pieds de ces normales sont sur une courbe de l'ordre $4\mu + 4\nu$.

b. Si aux points des coniques sur une droite D on mène les normales, et que par un point S on mène des tangentes, ces tangentes rencontrent les normales en

des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $4\mu + 4\nu$, qui a en S un point multiple d'ordre $4\mu + 2\nu$.

33. Si par les points où les normales aux points d'une droite D rencontrent une droite Δ on mène des tangentes, les points de ces tangentes sont sur une courbe de l'ordre $6\mu + 4\nu$.

a. Si par les points où les tangentes aux points d'une droite rencontrent une droite Δ on mène des normales, les pieds de ces normales sont sur une courbe de l'ordre $6\mu + 4\nu$.

b. Les coniques étant coupées par deux droites D, D', aux points de D on mène les normales, et aux points de D' les tangentes : ces tangentes rencontrent les normales en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $6\mu + 4\nu$, qui a un point multiple d'ordre μ au point (D, D').

34. Au point *a* de chaque conique sur une droite D on mène la normale, et par le point où elle rencontre une droite Δ on mène des tangentes, lesquelles rencontrent la tangente du point *a* en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $3\mu + 4\nu$, qui a un point multiple d'ordre μ au point (D, Δ).

a. Si en chaque point *a* d'une droite D on mène la tangente et la normale, et que par le point où la tangente rencontre une droite Δ on mène une seconde tangente, celle-ci rencontre la normale en un point situé sur une courbe d'ordre $3\mu + 4\nu$, qui a un point multiple d'ordre μ en (D, Δ).

35. Aux points des coniques sur une droite D on mène les normales, et par les points où elles rencontrent une droite Δ on mène les diamètres : ces diamètres enveloppent une courbe de la classe $2\mu + 3\nu$.

a. Si par un point P on mène les diamètres des coniques, et que par les points où ils rencontrent une droite Δ on mène les normales, les pieds de ces normales sont sur une courbe de l'ordre $2\mu + 3\nu$.

b. Les normales aux points a des coniques sur une droite D rencontrent les diamètres menés par un point P en des points situés sur une courbe de l'ordre $2\mu + 3\nu$, qui a un point multiple d'ordre $2\mu + \nu$ en P .

36. Si des points des coniques sur une droite D on abaisse les normales, et que par les points où elles rencontrent une droite Δ on mène les diamètres, ces diamètres enveloppent une courbe de la classe $4\mu + 7\nu$.

a. Si d'un point P on mène les diamètres des coniques, et que par les points où ils rencontrent une droite Δ on mène les normales, les extrémités de ces normales sont sur une courbe de l'ordre $4\mu + 7\nu$.

b. Des points des coniques sur une droite D on abaisse les normales, et d'un point P on mène les diamètres : ces diamètres rencontrent les normales en des points situés sur une courbe de l'ordre $4\mu + 7\nu$, qui a un point multiple d'ordre μ en P , et $\mu + 2\nu$ points triples sur D .

37. Les normales aux points de contact des tangentes issues d'un point S rencontrent une droite Δ en des points par lesquels on mène des tangentes : ces tangentes enveloppent une courbe de la classe $2\mu + 6\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre 2ν coïncidante avec Δ .

a. Si d'un point S on mène des tangentes, et que des points où elles rencontrent une droite D on abaisse des normales, les tangentes menées par les pieds de ces normales enveloppent une courbe de la classe $2\mu + 6\nu$.

b. Si de deux points S, S' on mène des tangentes aux coniques, les normales aux points de contact des tangentes issues de S rencontrent les tangentes issues de S' en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $2\mu + 4\nu$ en S' .

38. D'un point S on mène des tangentes, et des points où elles rencontrent une droite Δ on mène d'autres tangentes : les normales aux points de contact de celles-ci

rencontrent les premières tangentes en des points situés sur une courbe de l'ordre $\mu + 7\nu$.

a. Si d'un point S on mène des tangentes, et que des points où elles rencontrent une droite Δ on mène des normales, les tangentes aux pieds de ces normales rencontrent les tangentes issues de S en des points situés sur une courbe de l'ordre $\mu + 7\nu$, qui a un point multiple d'ordre $\mu + 3\nu$ en S .

39. D'un point S on mène des tangentes; les normales aux points de contact rencontrent une droite Δ en des points d'où l'on mène d'autres tangentes : celles-ci rencontrent les premières en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $2\mu + 8\nu$, qui a un point multiple d'ordre $2\mu + 6\nu$ en S .

a. D'un point S on mène des tangentes, et par les points où elles rencontrent une droite Δ on mène d'autres tangentes : celles-ci rencontrent les normales aux points de contact des premières, en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $2\mu + 8\nu$.

40. Les normales aux points de contact des tangentes issues d'un point S rencontrent une droite Δ en des points par lesquels on mène les diamètres : ces diamètres enveloppent une courbe de la classe $\mu + 4\nu$.

a. Les diamètres menés d'un point P rencontrent une droite Δ en des points d'où l'on mène les normales : les tangentes aux pieds de ces normales enveloppent une courbe de la classe $\mu + 4\nu$.

b. Les normales aux points de contact des tangentes issues d'un point S rencontrent les diamètres menés d'un point P en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $\mu + 4\nu$, qui a en P un point multiple d'ordre $\mu + 2\nu$.

41. Des points de contact des tangentes issues d'un point S on abaisse des normales, et par les points où elles rencontrent une droite Δ on mène les diamètres : ces

diamètres enveloppent une courbe de la classe $3\mu + 8\nu$.

a. Si par les points où les diamètres issus d'un point P rencontrent une droite Δ on mène les normales, les tangentes aux extrémités de ces normales enveloppent une courbe de la classe $3\mu + 8\nu$.

b. Les normales abaissées des points de contact des tangentes issues d'un point S rencontrent les diamètres menés par un point P en des points situés sur une courbe de l'ordre $3\mu + 8\nu$, qui a un point multiple d'ordre $3\mu + 2\nu$ en P.

42. Par un point P on mène les diamètres des coniques; les normales à leurs extrémités rencontrent une droite Δ en des points par lesquels on mène d'autres diamètres: ceux-ci enveloppent une courbe de la classe $3\mu + 4\nu$.

a. On mène par un point P les diamètres des coniques, et par les points où ils rencontrent une droite Δ , les normales: les diamètres qui passent par les pieds de ces normales enveloppent une courbe de la classe $3\mu + 4\nu$.

b. De deux points P, P', on mène les diamètres de chaque conique: les normales aux extrémités du premier rencontrent le deuxième en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $3\mu + 4\nu$, qui a un point multiple d'ordre $3\mu + 2\nu$ en P'.

43. Par les points où les tangentes aux pieds des normales abaissées d'un point N rencontrent une droite Δ on mène de nouvelles tangentes: celles-ci rencontrent les normales en des points situés sur une courbe de l'ordre $2\mu + 7\nu$.

a. Si par les points où les normales abaissées d'un point N rencontrent une droite Δ on mène des tangentes: ces tangentes rencontrent les normales aux pieds des normales en des points situés sur une courbe d'ordre $2\mu + 7\nu$.

44. Si par les points où les polaires d'un point P ren-

contrent une droite Δ on mène les normales, ces normales enveloppent une courbe de la classe $5\mu + \nu$, qui a une tangente multiple d'ordre $\mu + \nu$ coïncidante avec Δ .

a. Les normales abaissées d'un point N rencontrent les polaires d'un point P en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $5\mu + \nu$, qui a en N un point multiple d'ordre 4μ .

45. Si par les points où les polaires d'un point P rencontrent une droite Δ on mène des normales, leurs pieds sont sur une courbe de l'ordre $4\mu + \nu$.

a. Les normales aux points des coniques sur une droite D rencontrent les polaires d'un point P en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $4\mu + \nu$.

46. Les normales menées par les points où les axes des coniques rencontrent une droite Δ enveloppent une courbe de la classe $2\mu + 2\nu$.

a. Les normales menées d'un point N rencontrent les axes des coniques ou des points situés sur une courbe de l'ordre $2\mu + 2\nu$.

47. Les normales menées par les points où les directrices des coniques rencontrent une droite Δ enveloppent une courbe de la classe $12\mu + 8\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre $4\mu + 4\nu$ coïncidante avec Δ .

a. Les normales menées d'un point N rencontrent les directrices en des points situés sur une courbe de l'ordre $12\mu + 8\nu$, qui a en N un point multiple d'ordre $8\mu + 4\nu$.

§ III. — *Théorèmes dans lesquels se trouvent des conditions de parallélisme ou de perpendicularité de certaines séries de Normales.*

48. Les normales parallèles aux normales menées par un point N enveloppent une courbe de la classe $\mu + 4\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre 3ν à l'infini.

49. Les normales parallèles aux tangentes issues d'un point S enveloppent une courbe de la classe $2\mu + 6\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre $2\mu + 4\nu$ à l'infini.

a. Les tangentes parallèles aux normales abaissées d'un point N enveloppent une courbe de la classe $2\mu + 6\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre 4ν à l'infini.

50. Les tangentes parallèles aux normales abaissées d'un point N rencontrent les tangentes aux pieds de ces normales en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $2\mu + 7\nu$.

51. Si aux points des coniques sur une droite D on mène les normales, les tangentes parallèles à ces normales enveloppent une courbe de la classe $2\mu + 4\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre 2ν à l'infini.

a. Les normales parallèles aux tangentes menées d'un même point ont leurs pieds sur une courbe de l'ordre $2\mu + 4\nu$.

52. Les normales parallèles aux diamètres des coniques menés d'un même point enveloppent une courbe de la classe $\mu + 4\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre $\mu + 2\nu$ à l'infini.

a. Les diamètres parallèles aux normales abaissées d'un point N enveloppent une courbe de la classe $\mu + 4\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre 3ν à l'infini.

53. Les normales parallèles aux diamètres qui partent des points des coniques sur une droite D enveloppent une courbe de la classe $6\mu + 8\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre $4(\mu + \nu)$ à l'infini.

a. Les diamètres parallèles aux normales abaissées d'un point N ont leurs extrémités sur une courbe de l'ordre $6\mu + 8\nu$.

54. Les normales parallèles aux tangentes aux points des coniques sur une droite D enveloppent une courbe

de la classe $6\mu + 6\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre $4\mu + 4\nu$ à l'infini.

a. Les tangentes parallèles aux normales abaissées d'un point N ont leurs points de contact sur une courbe de l'ordre $6\mu + 6\nu$.

55. Les normales parallèles aux normales aux points des coniques sur une droite D enveloppent une courbe de la classe $2\mu + 3\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre $\mu + 2\nu$ à l'infini.

a. Si d'un point N on abaisse des normales sur les coniques, les normales parallèles ont leurs pieds sur une courbe de l'ordre $2\mu + 3\nu$.

56. Les normales parallèles aux normales aux points de contact des tangentes issues d'un point S enveloppent une courbe de la classe $\mu + 4\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre $\mu + 3\nu$ à l'infini.

a. Les tangentes parallèles aux tangentes aux pieds des normales abaissées d'un point N enveloppent une courbe de la classe $\mu + 4\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre 3ν à l'infini.

57. Les normales parallèles aux asymptotes des coniques enveloppent une courbe de la classe $4\mu + \nu$, qui a une tangente multiple d'ordre $2\mu + \nu$ à l'infini.

58. Les normales parallèles aux asymptotes des coniques ont leurs pieds sur une courbe de l'ordre $4\mu + 2\nu$.

a. Le lieu des points de contact des tangentes perpendiculaires aux asymptotes des coniques est une courbe de l'ordre $4\mu + 2\nu$.

59. Les normales perpendiculaires aux diamètres qui passent par un même point enveloppent une courbe de la classe $\mu + 4\nu$.

a. Les diamètres perpendiculaires aux normales abaissées d'un point N enveloppent une courbe de la classe $\mu + 4\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre 4ν à l'infini.

60. Les normales perpendiculaires aux diamètres qui partent des points d'une droite D enveloppent une courbe de la classe $3\mu + 6\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre $\mu + 2\nu$ à l'infini.

a. Les diamètres perpendiculaires aux normales abaissées d'un point N ont leurs extrémités sur une courbe de l'ordre $3\mu + 6\nu$.
