

AUGIER

Solution de la question proposée au concours général de 1870

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 10
(1871), p. 138-144

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__138_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1871, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL
DE 1870;**

PAR M. AUGIER,

Élève de Mathématiques spéciales au lycée de Lyon.

On donne dans un plan deux ellipses ayant leurs axes dirigés suivant les mêmes droites; on considère deux cônes égaux, de même sommet, et ayant respectivement pour directrices les deux coniques données. On demande le lieu des sommets de ces cônes.

Je prends pour origine le centre commun des deux ellipses, pour axes des x et des y les axes communs aux deux courbes, et pour axe des z une perpendiculaire à leur plan.

Les équations des deux ellipses données sont dans le plan des x, y :

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

$$(2) \quad \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} - 1 = 0.$$

Soit M un point du lieu; soient (α, β, γ) ses coordonnées.

Je cherche l'équation du cône ayant pour sommet le point M et pour directrice l'ellipse (1).

Soit P(x', y') un point de l'ellipse (1); soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque de MP, k étant le rapport dans lequel ce point divise le segment MP : on aura

$$x' = \frac{\alpha + kx}{1+k}, \quad y' = \frac{\beta + ky}{1+k}, \quad 0 = \frac{\gamma + kz}{1+k},$$

et l'équation du cône s'obtiendra en éliminant k entre les deux équations :

$$\frac{(\alpha + kx)^2}{a^2(1+k)^2} + \frac{(\beta + ky)^2}{b^2(1+k)^2} - 1 = 0,$$

$$\gamma + kz = 0.$$

Il vient ainsi

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{\gamma^2}{a^2}x^2 + \frac{\gamma^2}{b^2}y^2 + \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1\right)z^2 \\ - 2\frac{\beta\gamma}{b^2}yz - 2\frac{\alpha\gamma}{a^2}xz + 2\gamma z - \gamma^2 = 0. \end{cases}$$

L'équation du second cône, ayant son sommet en M et pour directrice l'ellipse (2), s'obtiendra en changeant, dans cette équation, a en a_1 , b en b_1 :

$$(II) \quad \begin{cases} \frac{\gamma^2}{a_1^2}x^2 + \frac{\gamma^2}{b_1^2}y^2 + \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1\right)z^2 \\ - 2\frac{\beta\gamma}{b_1^2}yz - 2\frac{\alpha\gamma}{a_1^2}xz + \gamma z - \gamma^2 = 0. \end{cases}$$

Soient

$$(3) \quad \begin{cases} S^3 - mS^2 + nS + p = 0, \\ S^3 - m_1S_2 + n_1S + p_1 = 0 \end{cases}$$

les deux équations en S relatives aux cônes (I) et (II).

Soient S, S', S'' les racines de la première équation.

Soient S_1, S'_1, S''_1 les racines de la seconde.

Si l'on rapporte *respectivement* à leurs plans principaux les cônes (I) et (II), ils auront pour équations :

$$Sx^2 + S'y^2 + S''z^2 = 0,$$

$$S_1x^2 + S'_1y^2 + S''_1z^2 = 0.$$

Ces deux cônes devant être égaux :

$$\frac{S}{S_1} = \frac{S'}{S'_1} = \frac{S''}{S''_1},$$

j'exprime que les équations (3) ont leurs racines proportionnelles, il vient, k étant une constante arbitraire,

$$(4) \quad k = \frac{m_1}{m}, \quad k^2 = \frac{n_1}{n}, \quad k^3 = \frac{p_1}{p}.$$

Je forme les quantités $(m, n, p), (m_1, n_1, p_1)$; il vient :

$$\begin{aligned} m &= \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \gamma^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) - 1, \\ n &= \frac{\gamma^2}{a^2 b^2} [\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - (a^2 + b^2)], \\ p &= \frac{\gamma^4}{a^2 b^2}; \\ m_1 &= \frac{\alpha^2}{a_1^2} + \frac{\beta^2}{b_1^2} + \gamma^2 \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{b_1^2} \right) - 1, \\ n_1 &= \frac{\gamma^2}{a_1^2 b_1^2} [\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - (a_1^2 + b_1^2)], \\ p_1 &= \frac{\gamma^4}{a_1^2 b_1^2}. \end{aligned}$$

Je remplace ces valeurs dans la relation (4) :

$$\begin{aligned} k &= \frac{\frac{\alpha^2}{a_1^2} + \frac{\beta^2}{b_1^2} + \gamma^2 \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{b_1^2} \right) - 1}{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \gamma^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) - 1}, \\ k^2 &= \frac{\frac{a^2 b^2}{a_1^2 b_1^2} [\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - (a_1^2 + b_1^2)]}{[\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - (a^2 + b^2)]}, \\ k^3 &= \frac{a^2 b^2}{a_1^2 b_1^2}. \end{aligned}$$

J'aurai les équations du lieu des points M, en éliminant k entre ces trois dernières relations, et remplaçant (α, β, γ) par (x, y, z) .

Il vient ainsi, après avoir posé

$$\frac{ab}{a_1 b_1} = H,$$

H représentant le rapport des aires des deux ellipses données

$$\frac{\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} + z^2 \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{b_1^2} \right) - 1}{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + z^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) - 1} = H^{\frac{2}{3}},$$

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2 - (a_1^2 + b_1^2)}{x^2 + y^2 + z^2 - (a^2 + b^2)} = \frac{1}{H^{\frac{2}{3}}}.$$

Ces deux équations peuvent s'écrire

$$(III) \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 - \frac{a^2 + b^2 - H^{\frac{2}{3}}(a_1^2 + b_1^2)}{1 - H^{\frac{2}{3}}} = 0, \\ x^2 \frac{\frac{1}{a_1^2} - \frac{H^{\frac{2}{3}}}{a^2}}{1 - H^{\frac{2}{3}}} + y^2 \frac{\frac{1}{b_1^2} - \frac{H^{\frac{2}{3}}}{b^2}}{1 - H^{\frac{2}{3}}} \\ + z^2 \frac{\left(\frac{1}{a_1^2} - \frac{H^{\frac{2}{3}}}{a^2} \right) + \left(\frac{1}{b_1^2} - \frac{H^{\frac{2}{3}}}{b^2} \right)}{1 - H^{\frac{2}{3}}} - 1 = 0. \end{array} \right.$$

Ce sont les deux équations du lieu.

La première représente une sphère ayant son centre à l'origine; la seconde, une surface du second ordre, ayant pour plans principaux les trois plans de coordonnées.

Le lieu est donc une courbe *gauche sphérique*, symétrique par rapport aux trois plans de coordonnées.

En éliminant successivement x , y , z entre les deux équations (3), on obtient les équations de trois cylindres du second degré parallèles aux axes et passant par la courbe gauche.

Ceci pouvait se voir *à priori*, car, les deux sur-

faces (III) ayant trois plans principaux communs, les projections de leur intersection sur ces trois plans principaux sont trois coniques.

Si l'on élimine les termes constants entre les deux équations (3), on obtient un cône du second degré rapporté à ses trois plans principaux et passant par la courbe gauche sphérique.

Je cherche les conditions pour que la courbe (III) soit plane. Le lieu se composera alors de deux cercles.

Pour abrégér, j'écris sous la forme suivante les deux équations (III) :

$$(III \text{ bis}) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0, \\ Mx^2 + Ny^2 + (M + N)z^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

L'équation générale des surfaces du second ordre passant par l'intersection des deux surfaces (III bis), est

$$(M + \lambda)x^2 + (N + \lambda)y^2 + (M + N + \lambda)z^2 - (\lambda R^2 + 1) = 0.$$

Pour que la courbe soit plane, il faut et il suffit que cette équation représente deux plans. Or cette équation peut représenter deux plans de *six manières différentes*, ce qui donne successivement les six conditions :

1° $M - N = 0$, ou bien, en remplaçant M et N par leurs valeurs, c et c_1 désignant les distances focales des deux ellipses,

$$\frac{c}{c_1} = H^{\frac{2}{3}};$$

2° $M = 0$, ou, en remplaçant M par sa valeur,

$$\frac{a}{a_1} = H^{\frac{1}{3}};$$

3° $N = 0$,

$$\frac{b}{b_1} = H^{\frac{1}{3}};$$

4° $MR^2 = 1$, ou, en remplaçant M et R^2 par leurs valeurs,

$$\left(1 - H^{\frac{2}{3}}\right)^2 = \left(\frac{1}{a_1^2} - \frac{H^{\frac{2}{3}}}{a^2}\right) \left[a^2 + b^2 - H^{\frac{2}{3}}(a_1^2 + b_1^2)\right];$$

5° $NR^2 = 1$,

$$\left(1 - H^{\frac{2}{3}}\right)^2 = \left(\frac{1}{b_1^2} - \frac{H^{\frac{2}{3}}}{b^2}\right) \left[a^2 + b^2 - H^{\frac{2}{3}}(a_1^2 + b_1^2)\right];$$

6° $(M + N)R^2 = 1$,

$$\left(1 - H^{\frac{2}{3}}\right)^2 = \left(\frac{a_1^2 + b_1^2}{a_1^2 b_1^2} - H^{\frac{2}{3}} \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}\right) \left[a^2 + b^2 - H^{\frac{2}{3}}(a_1^2 + b_1^2)\right].$$

Suivant ces différentes conditions, les cercles seront réels ou imaginaires.

On peut remarquer que, si $H^{\frac{3}{3}} = 1$, ce qui donne $ab = a_1 b_1$, c'est-à-dire si les aires des deux ellipses sont égales, ce qui comprend le cas particulier où les deux ellipses seraient égales, la courbe s'éloigne à l'infini sur le cône :

$$x^2 \left(\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a^2}\right) + y^2 \left(\frac{1}{b_1^2} - \frac{1}{b^2}\right) + z^2 \left(\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b_1^2} - \frac{1}{b^2}\right) = 0,$$

ce cône pouvant d'ailleurs être réel ou imaginaire.

La condition pour que la sphère soit réelle est

$$(5) \quad H^{\frac{2}{3}} < \frac{a^2 + b^2}{a_1^2 + b_1^2};$$

car on peut supposer $1 - H^{\frac{2}{3}} > 0$.

En effet, $H = \frac{ab}{a_1 b_1}$, et l'on peut toujours supposer que a et b désignent les axes de l'ellipse qui a la plus petite surface.

La relation (5) peut s'interpréter géométriquement.

$\frac{a^2 + b^2}{a_1^2 + b_1^2}$ représente le rapport des aires des deux cercles concentriques, lieux des sommets des angles droits circonscrits à chacune des deux ellipses; il faut que ce rapport soit supérieur à la puissance $\frac{2}{3}$ du rapport des aires des deux ellipses correspondantes.

La condition (5) est une condition *nécessaire* de réalité de la courbe; mais elle n'est pas suffisante.

Il faut, de plus, que la seconde surface (III) soit réelle, et qu'elle coupe la sphère. On aura ces conditions de réalité en exprimant que le plus petit des axes réels des différentes surfaces représentées par la seconde équation (III) est inférieur au rayon de la sphère.

Les conditions pour que la seconde surface (III bis) soit réelle sont que M et N doivent être simultanément positifs ou de signes contraires, en se rappelant que

$$1 - H^{\frac{2}{3}} > 0.$$

D'ailleurs ces conditions de réalité ne présentent point d'intérêt.