NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

AMIGUES

Note sur un procédé nouveau pour trouver les cubes de certaines sommes

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 10 (1871), p. 117-122

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__117_1>

NOTE SUR UN PROCÉDÉ NOUVEAU POUR TROUVER LES CUBES DE CERTAINES SOMMES;

PAR M. AMIGUES,
Professeur au lycée de Toulon.

J'ai indiqué dernièrement un procédé pour trouver les cubes de certaines sommes. Je me propose de l'appliquer à deux exemples.

1. Désignons par S_p la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des n premiers nombres entiers. Je vais démontrer la formule

$$S_2^3 = \frac{16S_6 - 5S_4 + S_2}{12}.$$

Imaginons pour cela qu'on écrive par ordre et sur une même ligne les carrés des n premiers nombres, puis au-dessous une seconde ligne formée en multipliant les nombres de la première par 2^2, puis encore une autre ligne obtenue en multipliant les nombres de la première par $3^2, \ldots$, jusqu'à ce qu'on ait un carré. Ce carré sera la tranche inférieure d'un cube, dont les tranches successives se déduiront de la première en multipliant les nombres de celle-ci par $2^2, 3^2, \ldots, n^2$.

La somme des nombres de ce cube sera évidemment S_2^3.

A l'un des sommets du cube se trouve le nombre n^6. Faisons la somme des nombres contenus dans les trois faces qui se coupent en ce sommet, en suivant l'ordre que j'ai indiqué. Nous trouverons

$$3\left[\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right]^2 + 3n^2\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + n^6,$$

c'est-à-dire

$$\frac{16n^6 - 5n^4 + n^2}{12}.$$

Il est clair alors qu'en opérant de même sur les cubes réduits successifs, nous aurons, pour la somme des nombres disposés en cube,

$$\frac{16S_6 - 5S_4 + S_2}{12};$$

d'où l'égalité

$$S_2^3 = \frac{16S_6 - 5S_4 + S_2}{12}.$$

2. Désignons par S_p la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des nombres

$$\frac{1}{1.2}, \quad \frac{1}{2.3}, \quad \frac{1}{3.4}, \ldots, \quad \frac{1}{n(n+1)}, \quad \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

On sait que $S_1 = \dfrac{n+1}{n+2}$; d'où

$$S_1^3 = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^3.$$

Proposons-nous de trouver S_1^3 sous une autre forme.

Écrivons pour cela, par ordre et sur une même ligne, les nombres qu'on obtient en multipliant les nombres proposés par $\dfrac{1}{1.2}$, puis au-dessous les nombres qu'on obtient en multipliant les proposés par $\frac{1}{2.3}, \ldots,$ jusqu'à ce que nous ayons un carré.

Multiplions tous les nombres de ce carré par $\frac{1}{1.2}$. Ces produits formeront la tranche inférieure du cube. Multiplions ces mêmes nombres par $\frac{1}{2.3}$. Ces produits formeront la deuxième tranche du cube, etc.

La somme des nombres disposés en cube est évidemment S_1^3.

Considérons le sommet du cube où se trouve le nombre $\frac{1}{(n+1)^3(n+2)^3}$, et faisons, en suivant l'ordre prescrit, la somme des nombres contenus dans les trois faces qui se coupent en ce point. Nous avons ainsi

$$3\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2$$
$$+3\frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2}\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^3(n+2)^3},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)}\frac{3n^3+6n^2+3n}{(n+1)^2(n+2)}$$
$$+\frac{1}{(n+1)^3(n+2)^3}\frac{1}{(n+1)(n+2)}\frac{3n}{n+2}$$
$$+\frac{1}{(n+1)^3(n+2)^3}.$$

Or, en posant l'identité suivante par rapport à n

$$\frac{3n}{(n+1)(n+2)^2}=\frac{A}{(n+1)(n+2)}+\frac{B}{(n+2)^2},$$

on trouve

$$A=-3,$$
$$B=6;$$

en sorte que la somme des nombres contenus dans les trois faces est

$$\frac{-3}{(n+1)(n+2)}+\frac{6}{(n+2)^2}+\frac{1}{(n+1)^3(n+2)^3}.$$

Si alors on opère de même pour les cubes réduits successifs, il est clair que l'on aura, pour la somme des nombres disposés en cube,

$$-3S_1+6\left[\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{2^2}\right]+S_3;$$

d'où l'égalité

$$S_1^3=-3S_1+6\left[\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{2^2}\right]+S_3,$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^3+3\,\frac{n+1}{n+2}=S_3+6\left[\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{2^2}\right].$$

Ajoutant 6 aux deux membres,

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^3+3\,\frac{n+1}{n+2}+6=S_3+6\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{(n+2)^2}\right].$$

Supposons $n=\infty$,

$$10=S_3+6\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\right),$$

$$10=S_3+\pi^2,$$

$$\pi^2=10-\left(\frac{1}{1^3.\,2^3}+\frac{1}{2^3.\,3^3}+\frac{1}{3^3.\,4^3}+\ldots\right).$$

Il est facile de voir que, si le premier terme négligé dans la série est $\frac{1}{p^3(p+1)^3}$, l'erreur commise est moindre que $\frac{1}{p^5}$.

3. On peut d'ailleurs arriver à ce résultat, sans considérer notre cube, et même dans le cas actuel, avec plus de simplicité.

Cherchons d'abord S_2.

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}.$$

Élevant au carré,

$$\frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} - 2\frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Écrivant les égalités analogues et faisant la somme,

$$S_2 = 2\left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{(n+2)^2}\right] - 1 - \frac{1}{(n+2)^2} - 2S_1;$$

d'où, en supposant $n = \infty$,

$$\frac{1}{1^2 . 2^2} + \frac{1}{2^2 . 3^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{3} - 3,$$

formule donnée par M. Lucas.

Connaissant S_2, il va être très-facile de trouver S_3.

Partons toujours de l'identité

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}.$$

Élevant au cube,

$$\frac{1}{(n+1)^3(n+2)^3}$$
$$= \frac{1}{(n+1)^3} - \frac{1}{(n+2)^3} - 3\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right),$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{(n+1)^3(n+2)^3} = \frac{1}{(n+1)^3} - \frac{1}{(n+2)^3} - 3\frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2}.$$

Écrivant les égalités analogues et faisant la somme,

$$S_3 = 1 - \frac{1}{(n+2)^3} - 3S_2.$$

Remplaçant S_2 par sa valeur trouvée plus haut,

$$S_3 = 1 - \frac{1}{(n+2)^3} - 6\left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{(n+2)^2}\right]$$
$$+ 3 + \frac{3}{(n+2)^2} + 6\frac{n+1}{n+2}.$$

Supposons $n = \infty$,

$$S_3 = 10 - 6\left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots\right],$$
$$S_3 = 10 - \pi^2.$$