J. Graindorge

Questions de licence

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 10 (1871), p. 111-117
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__111_0>

QUESTIONS DE LICENCE;

PAR M. J. GRAINDORGE,

Docteur ès sciences, à Liége.

I. *Trouver l'intégrale générale de l'équation*

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 2\frac{d^2y}{dx^2} + y = Ae^x + Be^{-x} + C\sin x + D\cos x;$$

A, B, C, D *sont des constantes.*

On trouve facilement que l'équation privée de second membre

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 2\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

a pour intégrale

$$y = e^x(\alpha + \beta x) + e^{-x}(\alpha' + \beta' x).$$

Nous obtiendrons l'intégrale cherchée par la méthode de la *variation des constantes arbitraires*, et nous trouverons que α, β, α' et β' sont déterminés par les quatre équations

$$e^x\frac{d\alpha}{dx} + xe^x\frac{d\beta}{dx} + e^{-x}\frac{d\alpha'}{dx} + xe^{-x}\frac{d\beta'}{dx} = 0,$$

$$e^x\frac{d\alpha}{dx} + (e^x + xe^x)\frac{d\beta}{dx} - e^{-x}\frac{d\alpha'}{dx} + (e^{-x} - xe^{-x})\frac{d\beta'}{dx} = 0,$$

$$e^x\frac{d\alpha}{dx} + (2e^x + xe^x)\frac{d\beta}{dx} + e^{-x}\frac{d\alpha'}{dx} - (2e^{-x} - xe^{-x})\frac{d\beta'}{dx} = 0,$$

$$e^x\frac{d\alpha}{dx} + (3e^x + xe^x)\frac{d\beta}{dx} - e^{-x}\frac{d\alpha'}{dx} + (3e^{-x} - xe^{-x})\frac{d\beta'}{dx} = V,$$

en posant

$$V = Ae^x + Be^{-x} + C\sin x + D\cos x.$$

Ces équations nous donnent immédiatement

$$\frac{d\beta}{dx} = \tfrac{1}{4} V e^{-x}, \qquad \frac{d\beta'}{dx} = \tfrac{1}{4} V e^{x},$$

$$\frac{d\alpha}{dx} = -\frac{x+1}{4} V e^{-x}, \quad \frac{d\alpha'}{dx} = -\frac{x-1}{4} V e^{x}.$$

Les équations qui serviront à déterminer les quantités α, β, α' et β' seront donc

$$\begin{aligned}
4\,d\beta &= A\,dx + B e^{-2x}dx + C e^{-x}\sin x\,dx + D e^{-x}\cos x\,dx,\\
4\,d\beta' &= A e^{2x}dx + B\,dx + C e^{x}\sin x\,dx + D e^{x}\cos x\,dx,\\
-4\,d\alpha &= A(x+1)\,dx + B(x+1)e^{-2x}dx\\
&\quad + C(x+1)e^{-x}\sin x\,dx + D(x+1)e^{-x}\cos x\,dx,\\
-4\,d\alpha' &= A(x-1)e^{2x}dx + B(x-1)\,dx\\
&\quad + C(x-1)e^{x}\sin x\,dx + D(x-1)e^{x}\cos x\,dx.
\end{aligned}$$

Nous voyons donc que nous aurons besoin de calculer les intégrales suivantes, que nous écrivons en faisant abstraction des constantes :

$$\int e^{2x}dx = \frac{e^{2x}}{2},$$

$$\int e^{-2x}dx = -\frac{e^{-2x}}{2},$$

$$\int x e^{2x}dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x},$$

$$\int x e^{-2x}dx = -\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x},$$

$$\int e^{x}\sin x\,dx = e^{x}\,\frac{\sin x - \cos x}{2},$$

$$\int e^{x}\cos x\,dx = e^{x}\,\frac{\sin x + \cos x}{2},$$

$$\int e^{-x}\sin x\,dx = -e^{-x}\,\frac{\sin x + \cos x}{2},$$

$$\int e^{-x}\cos x\,dx = e^{-x}\,\frac{\sin x - \cos x}{2},$$

$$\int x e^x \sin x\, dx = \frac{xe^x(\sin x - \cos x)}{2} + \frac{e^x \cos x}{2},$$

$$\int x e^x \cos x\, dx = \frac{xe^x(\sin x + \cos x)}{2} - \frac{e^x \sin x}{2},$$

$$\int x e^{-x} \sin x\, dx = -\frac{xe^{-x}(\sin x + \cos x)}{2} - \frac{e^{-x} \cos x}{2},$$

$$\int x e^{-x} \cos x\, dx = \frac{xe^{-x}(\sin x - \cos x)}{2} + \frac{e^{-x} \sin x}{2}.$$

Nous aurons alors très-facilement

$$4\beta = \beta_1 + Ax - \frac{B}{2}e^{-2x} - Ce^{-x}\frac{\sin x + \cos x}{2} + De^{-x}\frac{\sin x - \cos x}{2},$$

$$4\beta' = \beta'_1 + \frac{A}{2}e^{2x} + Bx + Ce^x\frac{\sin x - \cos x}{2} + De^x\frac{\sin x + \cos x}{2},$$

$$\begin{aligned}4\alpha = \alpha_1 &- \frac{A(x+1)^2}{2} + \frac{Bxe^{-2x}}{2} + \frac{3Be^{-2x}}{4}\\ &+ Cxe^x\frac{\sin x + \cos x}{2} + Ce^{-x}\cos x + \frac{Ce^{-x}\sin x}{2}\\ &- Dxe^{-x}\frac{\sin x - \cos x}{2} - De^{-x}\sin x + \frac{De^{-x}\cos x}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4\alpha' = \alpha'_1 &- \frac{Axe^{2x}}{2} + \frac{3}{4}Ae^{2x} - \frac{B(x-1)^2}{2}\\ &- Cxe^x\frac{\sin x - \cos x}{2} - Ce^x\cos x + \frac{Ce^x\sin x}{2}\\ &- Dxe^x\frac{\sin x + \cos x}{2} + De^x\sin x + \frac{De^x\cos x}{2}.\end{aligned}$$

En substituant ces valeurs dans l'expression de y, on trouve, tous calculs faits,

$$\begin{aligned}4y = \alpha_1 e^x + \beta_1 xe^x + \alpha'_1 e^{-x} + \beta'_1 xe^{-x} + Ae^x\left(\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{4}\right)\\ + Be^{-x}\left(\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{4}\right) + C\sin x + D\cos x,\end{aligned}$$

qui sera l'intégrale de l'équation proposée.

Cette intégrale peut encore être mise sous la forme suivante :

$$y = \frac{Ax^2e^x}{8} + \frac{Bx^2e^{-x}}{8} + \lambda e^x + \mu x e^x + \lambda' e^{-x} + \mu' x e^{-x}$$
$$+ \frac{C}{4}\sin x + \frac{D}{4}\cos x,$$

ou bien

$$y = e^x\left(\frac{Ax^2}{8} + \mu x + \lambda\right) + e^{-x}\left(\frac{Bx^2}{8} + \mu' x + \lambda'\right)$$
$$+ \frac{C}{4}\sin x + \frac{D}{4}\cos x.$$

II. *Un point matériel* P *est sollicité par une force dirigée vers un centre fixe* O, *et qui dépend de la distance* r *du point* P *au point* O. *L'action de la force sur l'unité de masse s'exprime par la formule*

$$\varphi = \frac{2k^2(a^2+b^2)}{r^5} - \frac{3k^2a^2b^2}{r^7}.$$

On suppose le point P *placé d'abord en* C *à une distance* a *du centre* O. *On imprime à ce point une vitesse perpendiculaire au rayon* OC *et égale à* $\frac{k}{a}$. *Déterminer son mouvement.*

Prenons pour pôle le point fixe O, pour axe polaire le rayon vecteur initial, et appliquons les formules connues (Sturm, *Mécanique*, t. I, p. 227, 228 et 229),

$$(1) \qquad \varphi = \frac{c^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\right),$$

$$(2) \qquad v^2 = c^2\left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2\right],$$

$$(3) \qquad v = \frac{c}{p},$$

dans lesquelles c est une constante, p la longueur de la perpendiculaire abaissée du point O sur la tangente au point P, v la vitesse en ce point P.

La vitesse initiale au point C étant $\frac{k}{a}$, et a étant la perpendiculaire abaissée du centre O sur la direction de la vitesse en C, nous aurons, d'après la formule (3),

$$\frac{k}{a} = \frac{c}{a},$$

et, par suite,

$$c = k.$$

La formule (1) nous donne alors, en remplaçant φ par sa valeur, et divisant les deux membres par $k^2 = c^2$,

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\right) = \frac{2(a^2+b^2)}{r^5} - \frac{3a^2b^2}{r^7};$$

d'où

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} = \frac{2(a^2+b^2)}{r^3} - \frac{3a^2b^2}{r^5} - \frac{1}{r};$$

en multipliant par $2d\frac{1}{r}$, et intégrant, il vient

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{r^4} - \frac{a^2b^2}{r^6} - \frac{1}{r^2} + \mathrm{C}.$$

Pour déterminer C, nous nous reporterons à l'origine du mouvement; en faisant $r = a$, dans cette dernière formule, il vient

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)_0^2 = \mathrm{C};$$

mais la formule (2) nous donne, en faisant $r = a$ et $v = \frac{k}{a}$,

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)_0 = 0;$$

donc

$$C = 0,$$

et nous aurons, pour l'équation de la trajectoire,

$$\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{r^4} - \frac{a^2 b^2}{r^6} - \frac{1}{r^2}};$$

d'où

$$d\theta = \frac{d\frac{1}{r}}{\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{r^4} - \frac{a^2 b^2}{r^6} - \frac{1}{r^2}}} = -\frac{r\,dr}{\sqrt{(a^2 + b^2) r^2 - a^2 b^2 - r^4}}.$$

Si l'on pose $r^2 = z$, il vient

$$2\,d\theta = -\frac{dz}{\sqrt{(a^2 + b^2) z - a^2 b^2 - z^2}},$$

d'où l'on tire, en intégrant et désignant par ω une constante,

$$2(\theta - \omega) = arc \cos \frac{2z - (a^2 + b^2)}{a^2 - b^2},$$

ou

$$2z = (a^2 + b^2) + (a^2 - b^2) \cos 2(\theta - \omega),$$

ou enfin, en remplaçant z par sa valeur r^2,

$$2r^2 = (a^2 + b^2) + (a^2 - b^2) \cos 2(\theta - \omega).$$

Pour déterminer ω, nous remarquerons que, pour $\theta = 0$, on a $r = a$; par conséquent, $\omega = 0$, et il vient, pour l'équation de la trajectoire,

$$2r^2 = (a^2 + b^2) + (a^2 - b^2) \cos 2\theta,$$

ou

$$r^2 = a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta.$$

Cette équation est celle de la podaire du centre de l'ellipse dont a et b sont les deux axes : en coordonnées rectangulaires, elle a pour équation

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2.$$