Nouvelles annales de mathématiques

A. Morel

Problème de géométrie analytique

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 10 (1871), p. 107-110

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1871_2_10__107_1>

PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE;

PAR M. A. MOREL.

Soit un angle ayant son sommet en un point A *d'une conique, et tel que les côtés* AB *et* AC *soient également inclinés sur la tangente en* A. *La ligne* BC, *qui joint les points d'intersection des côtés de l'angle avec la conique coupe la tangente en* A *en un point* M *indépendant de la valeur de l'angle. On propose de trouver le lieu de ce point* M *quand le point* A *décrit la conique.*

Pour démontrer la première partie de ce théorème, je considère la tangente et la normale en A. Ces deux lignes étant les bissectrices de l'angle BAC et de son supplément, la ligne BC est partagée harmoniquement aux points M et N par la tangente et la normale. Donc le point M est le pôle de la normale, et par suite indépendant de la position sur la courbe des points B et C répondant à la question, c'est-à-dire indépendant de la valeur de l'angle. Nous pourrions par suite trouver immédiatement le lieu, en le considérant comme la polaire réciproque de la développée par rapport à la conique demandée. Nous pouvons déduire les propriétés de ce lieu de celles de la développée. Nous remarquons d'abord que, dans les courbes à centre, le lieu sera du quatrième degré, puisque la développée est de la quatrième classe. De plus, la courbe présentera quatre branches infinies, puisqu'il y a quatre normales passant par le centre, et cette courbe aura quatre asymptotes deux à deux parallèles aux axes; ces asymptotes seront les polaires des points de rencontre de la développée avec les axes. Dans l'ellipse, les quatre points de rencontre étant réels, il en sera de même des quatre asymptotes. Deux seulement existeront dans le cas de l'hyperbole, les autres étant imaginaires. Enfin, la courbe ne pourra jamais rencontrer la conique, car si P était un point commun aux deux courbes, R le point correspondant de la développée, la polaire de P devrait être tangente à la conique en P, et tangente à la développée en R, c'est-à-dire qu'elle devrait être à la fois tangente et normale à la courbe. Ce fait ne peut avoir lieu que pour les droites imaginaires qui vont du foyer aux points de rencontre imaginaires de la directrice avec la conique.

Dans le cas de la parabole, le lieu cherché sera du troisième degré, puisque la développée de la parabole est une courbe de la troisième classe. De plus, elle aura deux branches infinies, l'une ayant une asymptote parallèle à la tangente au sommet, et à une distance du sommet égale au demi-paramètre, mais à l'extérieur; l'autre sera le prolongement de l'axe au delà du sommet, car les points où la développée rencontre le second axe, rejeté à l'infini, étant eux-mêmes à une hauteur infinie au-dessus de l'axe, leur polaire, c'est-à-dire l'asymptote, devra passer par le centre, c'est-à-dire se confondre avec l'axe. Nous pourrions, d'après cela, trouver facilement l'équation du lieu, en partant de l'équation de la développée. Mais on peut la trouver directement, d'après la définition du lieu, et revenir de là à l'équation de la développée. Nous allons, par exemple, chercher cette équation dans le cas des courbes à centre, laissant au lecteur le soin d'opérer de même dans le cas de la parabole.

Prenons donc l'équation

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

de la courbe rapportée à son centre et à ses axes; nous supposons que b peut être réel ou imaginaire de la forme $b'\sqrt{-1}$, et qui nous donne simultanément le cas de l'ellipse et celui de l'hyperbole. Soit (α,β) un point du lieu; la polaire de ce point par rapport à la courbe a pour équation

$$(2)\qquad \frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}-1=0.$$

Cette ligne coïncidera avec la normale au point (x',y'), dont l'équation est

$$(3)\qquad a^2y'x-b^2x'y-c^2x'y'=0,$$

si l'on a les relations

$$(4)\qquad \frac{b^2\alpha}{a^2y'}=-\frac{a^2\beta}{b^2x'}=\frac{a^2b^2}{c^2x'y'},$$

x' et y' étant liés par la relation

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-1=0.$$

En éliminant x' et y' entre ces équations, nous aurons le lieu cherché. L'inspection des égalités (4) nous donne

$$\frac{x'}{a}=\frac{a^3}{c^2\alpha},\quad \frac{y'}{b}=\frac{-b^3}{c^2\beta}.$$

Donc, en portant ces valeurs dans l'équation de la courbe, nous aurons pour le lieu cherché

$$(5) \qquad \frac{a^6}{c^4 \alpha^2} + \frac{b^6}{c^4 \beta^2} - 1 = 0.$$

On pourrait facilement trouver, par la discussion de cette équation, que la courbe présente bien les particularités dont nous avons parlé.

Revenons maintenant à la développée de la conique. Pour prouver que cette courbe est la réciproque de la précédente, prenons un point (ξ, η) de la réciproque de la courbe représentée par l'équation (5). Si nous identifions l'équation de la polaire de ce point avec celle de la tangente à la courbe (5), nous trouvons comme équation de condition

$$\frac{\frac{-\xi}{a^2}}{\frac{a^6}{c^4 \alpha^3}} = \frac{\frac{-\eta}{b^2}}{\frac{b^6}{c^4 \beta^3}} = 1.$$

D'où

$$\alpha = -\frac{a^2}{c}\left(\frac{a^2}{c\xi}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \beta = -\frac{b^2}{c}\left(\frac{b^2}{c\eta}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Portant ces valeurs de α et de β dans l'équation (5) et réduisant, nous trouvons pour le lieu des points (ξ, η), c'est-à-dire pour la courbe réciproque de l'équation (5), la courbe représentée par l'équation

$$\left(\frac{a\xi}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b\eta}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 = 0,$$

ce qui est précisément la développée de la conique proposée, ainsi que nous l'avons démontré plus haut.