NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

DEUXIÈME SÉRIE.

1871.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

NOUVELLES ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES.

JOURNAL DES CANDIDATS
AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ

PAR MM. GERONO,
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES,

ET

J. BOURGET,
ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE,
AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ, DOCTEUR ÈS SCIENCES.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME DIXIÈME.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM;
CONTINUÉE, A PARTIR DE 1863, PAR MM. GERONO ET PROUHET.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, n° 55.

1871.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

CORDES PRINCIPALES ET PLANS PRINCIPAUX D'UNE SURFACE DU SECOND ORDRE;

Par M. E. VAZEILLE.

Prenons une surface quelconque du second ordre représentée en coordonnées rectangles par l'équation cartésienne

$$\begin{gathered}Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy \\ + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0.\end{gathered}$$

L'on sait qu'à toute direction de cordes correspond un plan diamétral; et si l'on nomme α, β, γ les cosinus des angles que la direction de ces cordes fait avec les axes des coordonnées, l'équation du plan diamétral est

$$\begin{gathered}(A\alpha + B''\beta + B'\gamma)x + (B''\alpha + A'\beta + B\gamma)y \\ + (B'\alpha + B\beta + A''\gamma)z + C\alpha + C'\beta + C''\gamma = 0;\end{gathered}$$

l'on nomme *corde principale* toute direction perpendiculaire à son plan diamétral; une telle direction doit donc être assujettie aux deux conditions suivantes :

$$\frac{A\alpha + B''\beta + B'\gamma}{\alpha} = \frac{B''\alpha + A'\beta + B\gamma}{\beta} = \frac{B'\alpha + B\beta + A''\gamma}{\gamma}.$$

Ces deux conditions, jointes à la relation connue

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

montrent d'abord que les directions cherchées, étant tracées à partir de l'origine et désignées chacune par le point où elle perce une sphère décrite autour de l'origine comme centre avec un rayon égal à l'unité de longueur, sont les génératrices communes aux trois cônes de même sommet, dont les équations sont

$$\frac{A\alpha + B''\beta + B'\gamma}{\alpha} = \frac{B''\alpha + A'\beta + B\gamma}{\beta},$$

$$\frac{B''\alpha + A'\beta + B\gamma}{\beta} = \frac{B'\alpha + B\beta + A''\gamma}{\gamma},$$

$$\frac{B'\alpha + B\beta + A''\gamma}{\gamma} = \frac{A\alpha + B''\beta + B'\gamma}{\alpha},$$

et l'on arriverait facilement à démontrer que ces trois cônes du second ordre ont trois génératrices en commun; la démonstration serait au fond la même, mais moins claire dans la forme, que celles dont l'exposition va suivre.

Si nous désignons par S la valeur commune des trois rapports dont l'égalité caractérise toute direction de cordes principales, et si nous prenons S comme inconnue auxiliaire, nous dirons :

A toute direction principale correspond une valeur de S qui rend compatibles, par rapport aux inconnues α, β, γ, le système linéaire et homogène

$$(1) \quad \begin{cases} A\alpha + B''\beta + B'\gamma = S\alpha, \\ B''\alpha + A'\beta + B\gamma = S\beta, \\ B'\alpha + B\beta + A''\gamma = S\gamma, \end{cases}$$

ou, ce qui revient au même, le système

$$(2)\quad \begin{cases} (A-S)\alpha + B''\beta + B'\gamma = 0, \\ B''\alpha + (A'-S)\beta + B\gamma = 0, \\ B'\alpha + B\beta + (A''-S)\gamma = 0; \end{cases}$$

donc S est déterminé par l'équation suivante :

$$(3)\quad \begin{vmatrix} A-S & B'' & B' \\ B'' & A'-S & B \\ B' & B & A''-S \end{vmatrix} = 0,$$

laquelle peut s'écrire

$$(4)\quad \begin{cases} (S-A)(S-A')(S-A'') - B^2(S-A) \\ \quad - B'^2(S-A') - B''^2(S-A'') - 2BB'B'' = 0, \end{cases}$$

ou bien encore

$$(5)\quad \begin{cases} S^3 - (A + A' + A'')S^2 \\ \quad + (A'A'' - B^2 + A''A - B'^2 + AA' - B''^2)S \\ \quad - (AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2) = 0. \end{cases}$$

Cette équation est susceptible, du moins tant que les coefficients B, B′, B″ sont essentiellement différents de zéro, de prendre une autre forme remarquable, ainsi que nous allons le prouver en suivant une marche indiquée par M. Lamé dans ses *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité*.

Les équations (1), en ajoutant à leurs deux membres des expressions convenablement choisies, après les avoir multipliées respectivement par B, B′, B″, deviennent

$$B'B''\alpha + B''B\beta + BB'\gamma = B\alpha\left(S - A + \frac{B'B''}{B}\right),$$

$$B'B''\alpha + B''B\beta + BB'\gamma = B'\beta\left(S - A' + \frac{B''B}{B'}\right),$$

$$B'B''\alpha + B''B\beta + BB'\gamma = B''\gamma\left(S - A'' + \frac{BB'}{B''}\right),$$

ou, en désignant par V le premier membre qui est commun à toutes, et par h, h', h'' les expressions $A - \frac{B'B''}{B}$, $A' - \frac{B''B}{B'}$, $A'' - \frac{BB'}{B''}$,

$$\frac{1}{B(S-h)} = \frac{\alpha}{V}, \quad \frac{1}{B'(S-h')} = \frac{\beta}{V}, \quad \frac{1}{B''(S-h'')} = \frac{\gamma}{V}.$$

Si l'on multiplie ces trois équations respectivement par les facteurs $B'B''$, $B''B$, BB', et si on les ajoute ensuite, il vient

$$(6) \qquad \frac{B'B''}{B(S-h)} + \frac{B''B}{B'(S-h')} + \frac{BB'}{B''(S-h'')} = 1,$$

comme résultat de l'élimination de α, β, γ entre les équations du groupe (1); c'est donc là une forme nouvelle de l'équation (3). Mais, ainsi que nous l'avons dit déjà, cette forme ne subsiste que si les coefficients B, B′, B″ sont tous différents de zéro; le calcul qui précède le démontre clairement.

En résumé, l'inconnue auxiliaire S est déterminée par une équation du troisième degré; S aura donc, en général, trois valeurs distinctes; chacune de ces valeurs, portée dans les équations (2), les rendra compatibles, c'est-à-dire les réduira à deux équations distinctes, d'où l'on déduira un système de valeurs proportionnelles pour α, β, γ; ainsi toute valeur de S produit une direction principale; on peut donc déjà dire, au point de vue algébrique, que le problème a trois solutions; mais il est indispensable d'entrer dans le détail, d'étudier soigneusement l'équation auxiliaire du troisième degré, et de montrer les conséquences de cette étude pour les sufaces du second ordre.

C'est dans cette étude détaillée que nous rencontrerons les noms de nos plus grands géomètres, Lagrange, Cauchy, Lamé, Chasles parmi les Français, Jacobi parmi les Allemands; d'ailleurs l'ordre que nous suivrons ne concordera que bien rarement avec l'ordre historique.

Nous démontrerons d'abord que l'équation du troisième degré a ses trois racines réelles et généralement distinctes; nous donnerons de ce fait plusieurs démonstrations différentes, parce que chacune d'elles aura des conséquences nouvelles.

Première méthode. — La compatibilité des équations qui forment le système (1) ou (2) étant exprimée, on a, par cela même, exprimé que la courbe

$$Ax^2+A'y^2+A''+2By+2B'x+2B''xy-S(x^2+y^2+1)=0,$$

menée par l'intersection des deux coniques

$$Ax^2+A'y^2+A''+2By+2B'x+2B''xy=0$$

et

$$x^2+y^2+1=0,$$

est un système de deux droites; or l'une des deux coniques au moins, celle dont l'équation est $x^2+y^2+1=0$, est une conique imaginaire; donc l'équation du troisième degré, qui sert à déterminer les systèmes de cordes communes, c'est-à-dire l'équation (3), a ses trois racines réelles; et ces trois racines sont en général distinctes, car l'autre conique est absolument quelconque en vertu des valeurs absolument quelconques des coefficients A, A', A'', B, B', B''.

Cette méthode est, au fond, très-indirecte, car elle suppose connu, sur l'intersection de deux coniques, un théorème fondamental; néanmoins nous avons dû la mentionner d'abord à cause de son origine géométrique; car nous pouvons la rattacher à un procédé de M. Chasles, procédé dont elle est en quelque sorte la traduction analytique.

Pour expliquer commodément cette interprétation, nous rappellerons :

1° Que, dans toute conique, on peut construire un nombre illimité de triangles polaires conjugués relativement à cette conique;

2° Que, si cette conique sert de base à un cône ayant son sommet en un point quelconque de l'espace, les trois droites allant du sommet du cône aux trois sommets d'un triangle polaire conjugué forment un système de diamètres conjugués de la surface conique; cela résulte immédiatement de ce que toute section dont le plan est parallèle à deux des trois droites a son centre sur la troisième.

Cela posé, les deux courbes dont les équations sont

$$Ax^2 + A'y^2 + A'' + 2By + 2B'x + 2B''xy = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

sont les intersections, par un même plan dont l'équation est $z = 1$, des deux cônes représentés par

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0$$

et

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

Ces deux cônes, qui ont pour sommet commun l'origine, sont asymptotiques, le premier à la surface du second ordre, l'autre à une sphère quelconque; et la résolution de l'équation en S détermine en réalité les systèmes de directions conjuguées communs à la surface quelconque du second ordre et à une sphère; donc

Toute surface du second ordre a un système de diamètres conjugués qui lui est commun (en direction) avec une sphère; en d'autres termes, *une surface quelconque du second ordre a trois directions distinctes de cordes* *principales, et ces directions sont perpendiculaires entre elles deux à deux; en outre, ces directions sont les mêmes pour toutes les surfaces du second ordre qui ont le même cône asymptotique.*

On voit que notre premier mode de démonstration nous conduit immédiatement à une proposition importante, à savoir : la rectangularité des cordes principales entre elles; or il est utile, il est facile aussi d'établir cette proposition par le calcul.

Désignons en effet par S_1 et S_2 deux racines distinctes de l'équation (3); désignons ensuite par $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, et par $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ les solutions qui leur correspondent respectivement par les équations (1); on aura identiquement les relations

$$\begin{aligned} A\alpha_1 + B''\beta_1 + B'\gamma_1 &= S_1\alpha_1, & A\alpha_2 + B''\beta_2 + B'\gamma_2 &= S_2\alpha_2, \\ B''\alpha_1 + A'\beta_1 + B\gamma_1 &= S_1\beta_1, & B''\alpha_2 + A'\beta_2 + B\gamma_2 &= S_2\beta_2, \\ B'\alpha_1 + B\beta_1 + A''\gamma_1 &= S_1\gamma_1, & B'\alpha_2 + B\beta_2 + A''\gamma_2 &= S_2\gamma_2. \end{aligned}$$

Multiplions les trois premières respectivement par α_2, β_2, γ_2; multiplions les trois autres respectivement par $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, et de la somme des unes retranchons la somme des autres; il restera

$$(S_1 - S_2)(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2) = 0.$$

Or, par hypothèse, S_1 et S_2 sont des racines distinctes; on a donc la simple condition

$$(7) \qquad \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0.$$

On peut remarquer que cette relation (7) vient d'être démontrée par un procédé purement algébrique, et qu'elle ne suppose en rien la réalité démontrée des expressions S_1 et S_2; il est même possible, et très-simplement, par voie de réduction à l'absurde, de montrer que la relation (7) entraîne la réalité des racines de l'équation (3); mais nous ne croyons pas devoir insister sur ce détail. Revenant donc à la méthode qui fait l'objet de ce paragraphe, nous dirons qu'elle a été exposée sous la forme purement géométrique par M. Chasles dans un Mémoire intitulé : *Sur les lignes conjointes dans les coniques* (*); le lecteur y trouvera, en effet, la solution de ce problème : *Étant donné un cône du second degré dont on connaît la base et le sommet, on demande de déterminer ses axes principaux;* et l'auteur ramène la question à la recherche des points de concours des lignes conjointes relatives à une conique et à un cercle imaginaire, de telle sorte que notre première méthode peut et doit être considérée comme une traduction algébrique des raisonnements géométriques de M. Chasles. Il se trouve ainsi prouvé, une fois de plus, que les plus illustres propagateurs de la Géométrie pure ont fait et font encore souvent de l'Algèbre à leur manière; la forme ne fait rien à l'affaire; d'ailleurs la possibilité de reproduire leurs raisonnements sous des formes algébriquement élégantes et simples est un moyen aussi de montrer la haute valeur scientifique des hommes qui, comme Poncelet et M. Chasles, font la gloire de la France sans rien emprunter aux étrangers.

DEUXIÈME MÉTHODE. — Elle consiste à se servir de l'équation du troisième degré sous la forme (6), et porte le nom de *méthode de Jacobi*; elle est donc restreinte au cas où les coefficients B, B′, B″ sont tous différents de zéro; elle n'en a pas moins une grande importance et une généralité suffisante, car nous verrons bientôt que l'une des conséquences pratiques de la résolution de notre équation du troisième degré est de faire disparaître, par

(*) *Journal de Mathématiques*, 1re série, t. III, p. 427.

un choix convenable d'axes, les trois rectangles des variables de l'équation générale des surfaces du second ordre.

Cela dit, remarquons que les trois quantités

$$\frac{B'B''}{B}, \quad \frac{B''B}{B'}, \quad \frac{BB'}{B''}$$

ont le même signe; de sorte qu'en appelant m^2, n^2, p^2 leurs valeurs absolues, et en supposant que les quantités h, h', h'' soient différentes et rangées dans l'ordre de grandeur croissante, l'équation s'écrit

$$\frac{m^2}{S-h}+\frac{n^2}{S-h'}+\frac{p^2}{S-h''}\mp 1=0.$$

Dès lors, si l'on fait dans le premier membre les substitutions successives

$$-\infty \quad h-\varepsilon \mid h+\varepsilon \quad h'-\varepsilon \mid h'+\varepsilon \quad h''-\varepsilon \mid h''+\varepsilon \quad +\infty,$$

on trouvera les signes

$$\mp \quad -\infty \mid +\infty \quad -\infty \mid +\infty \quad -\infty \mid +\infty \quad \mp;$$

donc il y a une racine réelle entre h et h', une autre entre h' et h''; la troisième est antérieure à h si le produit $BB'B''$ est négatif; elle vient au contraire après h'' si le produit $BB'B''$ est positif.

Cette démonstration suppose que les quantités h, h', h'', c'est-à-dire

$$A-\frac{B'B''}{B}, \quad A'-\frac{BB''}{B'}, \quad A''-\frac{BB'}{B''},$$

sont différentes les unes des autres; or cette supposition est légitime, puisque, dans le cas général, les coefficients A, A', A'' sont indépendants les uns les autres.

Comme la première démonstration, la seconde montre d'une manière évidente que les trois racines de l'équation (6) sont distinctes; comme la première aussi, elle fait voir que les directions de cordes principales qui en résultent sont bien déterminées, et au nombre de *trois* seulement. Pour établir ce dernier fait, il faut démontrer que chacune des valeurs de S, qui réduit les équations (2) à un système homogène de deux équations seulement, laisse ces deux équations fournir des valeurs bien déterminées pour les rapports $(\alpha : \gamma)$ et $(\beta : \gamma)$.

Or des deux premières, par exemple, on tire

$$\frac{\alpha}{B''B - B'(A' - S)} = \frac{\beta}{B'B'' - B(A - S)} = \ldots,$$

ou bien

$$\frac{\alpha}{B'(S - h')} = \frac{\beta}{B(S - h)} = \ldots.$$

Or, d'après la séparation établie plus haut, aucune valeur de S, dans le cas général, n'est égale ni à h, ni à h', ni à h''; donc les rapports $\frac{\alpha}{\beta}, \ldots$, qui proviennent de chaque valeur de S, sont bien déterminés.

La démonstration algébrique, pour établir que les directions principales sont rectangulaires entre elles deux à deux, se ferait comme nous l'avons vu en exposant la première méthode, et nous ne devons pas y revenir.

Troisième méthode. — Cette méthode, dite *méthode de Cauchy*, démontre, comme la seconde, la réalité des racines au moyen de substitutions convenablement choisies; mais elle a l'avantage de n'être pas soumise aux mêmes restrictions que la méthode de Jacobi, de s'adapter très-naturellement aux divers cas particuliers, et d'être spécialement commode dans certaines applications.

Prenons l'équation du troisième degré sous la forme (4), et écrivons-la comme ci-dessous :

$$\begin{aligned}(S-A)&[(S-A')(S-A'')-B^2]\\ &-[B'^2(S-A')+B''^2(S-A'')+2BB'B'']=0,\end{aligned}$$

et cherchons les valeurs de S qui annulent la fonction du second degré

$$(S-A')(S-A'')-B^2.$$

Il existe deux valeurs réelles et distinctes de S qui annulent cette quantité, et si l'on suppose, par exemple, $A'<A''$, ces deux valeurs sont l'une inférieure à A', l'autre supérieure à A''. Tout cela est très-facile à voir à l'aide de quelques substitutions. Nommons θ' et θ'' ces deux valeurs, et soit $\theta'<\theta''$; puis remarquons que chacune de ces valeurs, qui annule

$$(S-A')(S-A'')-B^2,$$

fait un carré parfait, au signe près, de l'expression

$$B'^2(S-A')+B''^2(S-A'')+2BB'B''.$$

D'après cela, si nous faisons, dans le premier membre de l'équation (4), les substitutions

$$-\infty \qquad \theta' \qquad \theta'' \qquad +\infty,$$

nous trouverons les signes

$$- \qquad + \qquad - \qquad +;$$

donc l'équation (4) a trois racines réelles, et ces racines sont par cela même séparées.

Il nous semble utile d'adjoindre à l'exposé général de cette troisième méthode la discussion des cas particuliers qui échappent à la seconde.

Premier cas : $B=0$, l'équation (4) devient alors

$$(S-A)(S-A')(S-A'')-B'^2(S-A')-B''^2(S-A'')=0,$$

et peut s'écrire

$$S - A - \frac{B'^2}{S - A''} - \frac{B''^2}{S - A'} = 0. \tag{8}$$

Dès lors, si nous supposons, par exemple, $A' < A''$, le tableau des substitutions suivantes et des signes qu'elles donnent au premier membre de l'équation (8)

$-\infty$	$A' - \varepsilon$	$A' + \varepsilon$	$A'' - \varepsilon$	$A'' + \varepsilon$	$+\infty$
$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

suffit à démontrer la réalité des trois racines et à séparer ces racines.

Deuxième cas : $B = 0$ avec $B' = 0$, l'équation (4) devient alors

$$(S - A)(S - A')(S - A'') - B''^2(S - A'') = 0,$$

ou bien

$$(S - A'')[(S - A)(S - A') - B''^2] = 0,$$

et l'on voit qu'elle a ses trois racines réelles et généralement distinctes

Troisième cas : $B = 0$, $B' = 0$, $B'' = 0$, l'équation (4) devient alors

$$(S - A)(S - A')(S - A'') = 0,$$

et l'on voit immédiatement qu'elle a trois racines réelles et généralement distinctes, qui sont A, A', A''.

Ces trois cas particuliers ne présentent donc pas d'exception relativement à la réalité des racines de l'équation auxiliaire du troisième degré; mais ils offrent cela de remarquable : dans le second cas, la racine $S = A''$, transportée dans les équations (2), donne

$$(A - A'')\alpha + B''\beta = 0,$$
$$B''\alpha + (A' - A'')\beta = 0;$$

d'où l'on conclut $\alpha = 0$, $\beta = 0$, et par suite $\gamma = 1$; en d'autres termes, toute surface du second ordre dont l'équation ne contient aucun des deux rectangles yz et zx a une direction de cordes principales parallèle à l'axe des z. Dans le troisième cas, on verra de même que les trois directions de cordes principales coïncident avec les directions des axes des coordonnées rectangulaires.

D'ailleurs, dans ces divers cas particuliers, subsiste, ainsi qu'on le voit facilement, la perpendicularité des directions principales entre elles.

Ici se trouve donc terminée l'exposition des faits relatifs aux racines de l'équation auxiliaire du troisième degré, tant que cette équation reste suffisamment générale, c'est-à-dire tant que les trois racines de cette équation sont différentes les unes des autres.

Il nous reste à examiner sous quelles conditions ces racines peuvent cesser d'être distinctes.

(*La suite prochainement.*)

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS POUR LES DEUX ACADÉMIES DE MONTPELLIER ET D'AIX (ANNÉE 1870);

PAR M. AUGUSTE MACÉ,
Élève de Mathématiques spéciales au lycée de Grenoble.

I. *Étant donné un ellipsoïde, on détermine les points de contact des plans tangents parallèles aux plans des sections circulaires; on mène deux sphères tangentes chacune en deux de ces points symétriques par rapport au grand axe: trouver l'équation des surfaces de révolution du second degré circonscrites à ces deux sphères. Classification et discussion de ces surfaces.*

II. *Lignes d'intersection de ces surfaces et de l'ellipsoïde; leurs propriétés géométriques par rapport aux deux sphères. Construction de la tangente.*

III. *Ces lignes forment sur la surface de l'ellipsoïde un réseau complet de courbes se coupant orthogonalement.*

I. Soit l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$$

on sait que les plans des sections cycliques sont parallèles au plan

$$x=z\sqrt{\frac{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}}.$$

Si $x_1 y_1 z_1$ est l'ombilic, le plan tangent en ce point sera

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}+\frac{zz_1}{c^2}=1,$$

et, comme ce plan doit être parallèle au plan des sections circulaires, on devra avoir

$$y_1=0 \quad \text{et} \quad \frac{x_1}{a\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{z_1}{c\sqrt{b^2-c^2}};$$

on a, de plus, la relation

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}=1;$$

d'où l'on déduit

$$x_1=a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}},\quad y_1=0,\quad z_1=c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}.$$

Considérons maintenant l'ellipse ayant pour demi-axes a et c; cette ellipse contient les ombilics C, D, C', D'. Si nous considérons un cercle passant par C et D et tangent en ces points à l'ellipse, et si nous faisons tourner ce cercle autour de l'axe des x, ce cercle engendrera une sphère tangente à l'ellipsoïde aux points C et D. Du reste, le centre de cette sphère est sur l'axe des x au point où la normale en C coupe cet axe. On voit, d'autre part, que, si l'on a décrit l'autre sphère, la ligne des centres de ces sphères, c'est-à-dire l'axe des x, sera l'axe des surfaces de révolution circonscrites aux deux sphères; pour avoir la nature des surfaces, il suffit de connaître la courbe méridienne dans le plan des xz. On a donc à mener dans ce plan deux cercles tangents en C et D, C' et D' à une ellipse donnée, et à chercher l'équation générale des coniques tangentes à ces deux cercles.

L'ellipse aura pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

toute conique tangente à celle-ci en C et D sera de la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 + k\left(x - a\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}\right)^2 = 0.$$

Pour que cette équation représente un cercle, il faut que l'on ait

$$\frac{1}{a^2} + k = \frac{1}{c^2};$$

d'où

$$k = \frac{a^2 - c^2}{a^2 c^2}.$$

Remplaçons : l'équation du premier cercle sera donc

$$x^2 + z^2 - \frac{2x}{a}\sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} + a^2 - b^2 - c^2 = 0,$$

et celle du deuxième

$$x^2 + z^2 + \frac{2x}{a}\sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} + a^2 - b^2 - c^2 = 0.$$

Une courbe du deuxième degré tangente au premier cercle sera

$$x^2 + z^2 - \frac{2x}{a}\sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} + a^2 - b^2 - c^2 + M(x - \alpha)^2 = 0,$$

et, si elle est tangente au deuxième cercle, elle sera aussi

$$x^2 + z^2 + \frac{2x}{a}\sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} + a^2 - b^2 - c^2 + M(x + \alpha)^2 = 0.$$

Ces deux équations doivent être identiques; on doit donc avoir

$$Ma\alpha = -\sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)};$$

d'où

$$\alpha^2 = \frac{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}{M^2 a^2};$$

donc l'équation de la conique cherchée sera

$$(1 + M)x^2 + z^2 + a^2 - b^2 - c^2 + \frac{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}{Ma^2} = 0.$$

On voit que c'est une conique à centre, ce à quoi, du reste, on devait s'attendre. Discutons cette courbe méridienne, et par suite la nature de la surface cherchée.

Le binôme $B^2 - 4AC$ est égal à $-(1 + M)$. Or on peut exprimer M en fonction d'un des axes de la conique; si, en effet, on fait $x = 0$, on a

$$C^2 = -a^2 + b^2 + c^2 - \frac{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}{Ma^2};$$

d'où

$$M = \frac{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}{a^2(b^2 + c^2 - a^2 - C^2)},$$

et l'équation de la méridienne devient

$$(b^2c^2 - a^2C^2)x^2 + a^2(b^2 + c^2 - a^2 - C^2)z^2 = a^2C^2(b^2 + c^2 - a^2 - C^2).$$

Nous distinguerons trois cas :

$$a^2 > b^2 + c^2, \quad a^2 = b^2 + c^2, \quad a^2 < b^2 + c^2.$$

1° C^2 variant de $-\infty$ à $b^2 + c^2 - a^2$, on obtient des ellipsoïdes imaginaires; de $b^2 + c^2 - a^2$ à zéro, on obtient des hyperboloïdes à deux nappes qui, réduits pour $C^2 = b^2 + c^2 - a^2$ à deux plans confondus, dégénèrent en un cône pour $C^2 = 0$. C^2 variant de zéro à $\frac{b^2c^2}{a^2}$, on obtient des hyperboloïdes à une nappe; de $\frac{b^2c^2}{a^2}$ à $+\infty$, on obtient des ellipsoïdes. Le passage des hyperboloïdes aux ellipsoïdes a lieu par l'intermédiaire d'un cylindre et correspond à l'hypothèse $C^2 = \frac{b^2c^2}{a^2}$.

2° C^2 variant de $-\infty$ à zéro, on obtient des ellipsoïdes imaginaires; de zéro à $\frac{b^2c^2}{a^2}$, on obtient des hyperboloïdes à une nappe qui, réduits pour $C^2 = 0$ à deux plans confondus, dégénèrent en un cylindre pour $C^2 = \frac{b^2c^2}{a^2}$. C^2 variant de $\frac{b^2c^2}{a^2}$ à $+\infty$, on a des ellipsoïdes.

3° C^2 variant de $-\infty$ à zéro, on obtient des ellipsoïdes imaginaires; de zéro à $b^2 + c^2 - a^2$, on a des ellipsoïdes qui, réduits pour $C^2 = 0$ à un point, dégénèrent en deux plans confondus pour $C^2 = b^2 + c^2 - a^2$. C^2 variant de $b^2 + c^2 - a^2$ à $\frac{b^2c^2}{a^2}$, on obtient des hyperboloïdes à une nappe; de $\frac{b^2c^2}{a^2}$ à $+\infty$, on obtient des ellipsoïdes. Le passage des hyperboloïdes aux ellipsoïdes a lieu par l'intermédiaire d'un cylindre et correspond à l'hypothèse $C^2 = \frac{b^2c^2}{a^2}$.

On peut donc résumer la discussion dans le tableau suivant :

$a^2 > b^2 + c^2$	$-\infty < C^2 < b^2 + c^2 - a^2$	ellipsoïd. imaginaires.
	$C^2 = b^2 + c^2 - a^2$	deux plans confondus.
	$b^2 + c^2 - a^2 < C^2 < 0$	hyp. à deux nappes.
	$C^2 = 0$	cône.
	$0 < C^2 < \frac{b^2c^2}{a^2}$	hyperb. à une nappe.
	$C^2 = \frac{b^2c^2}{a^2}$	cylindre.
	$\frac{b^2c^2}{a^2} < C^2 < +\infty$	ellipsoïdes.
$a^2 = b^2 + c^2$	$-\infty < C^2 < 0$	ellipsoïd. imaginaires.
	$C^2 = 0$	deux plans confondus.
	$0 < C^2 < \frac{b^2c^2}{a^2}$	hyperb. à une nappe.
	$C^2 = \frac{b^2c^2}{a^2}$	cylindre.
	$\frac{b^2c^2}{a^2} < C^2 < +\infty$	ellipsoïdes.
$a^2 < b^2 + c^2$	$-\infty < C^2 < 0$	ellipsoïd. imaginaires.
	$C^2 = 0$	point.
	$0 < C^2 < b^2 + c^2 - a^2$	ellipsoïdes.
	$C^2 = b^2 + c^2 - a^2$	deux plans confondus.
	$b^2 + c^2 - a^2 < C^2 < \frac{b^2c^2}{a^2}$	hyperb. à une nappe.
	$C^2 = \frac{b^2c^2}{a^2}$	cylindre.
	$\frac{b^2c^2}{a^2} < C^2 < +\infty$	ellipsoïdes.

II. Si nous voulons maintenant l'équation générale de ces surfaces de révolution, nous aurons

$$(1)\quad (1+M)x^2+y^2+z^2+a^2-b^2-c^2+\frac{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}{Ma^2}=0.$$

En effet, si $x=k$, on a bien un cercle, et si ou y ou z sont nuls, on a la courbe méridienne obtenue. Cherchons l'intersection de ces surfaces avec l'ellipsoïde; elle sera donnée par l'équation (1) et par

$$(2)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

La courbe d'intersection ne sera donc pas plane; mais elle jouit de certaines propriétés; la projection de cette courbe sur les plans de coordonnées est une conique. En effet, on sait que, si deux surfaces admettent le même plan diamétral pour une série de cordes parallèles, la projection de la courbe d'intersection sur ce plan parallèlement aux cordes est une conique. Or, ici, les trois plans diamétraux sont communs, et les courbes sont rapportées à leur centre et à leurs axes.

A l'aide de cette remarque, on peut construire la tangente en un point de la courbe; en effet, connaissant le point, on aura la valeur particulière de la variable M; on a donc sur le plan des yz, par exemple, une conique dont on connaît les axes, et l'on pourra construire la tangente à la projection m de M par le procédé ordinaire. La tangente cherchée sera dans un plan passant par cette tangente mt parallèlement à l'axe des x; de même, si l'on projette l'intersection sur le plan des xz, et si l'on mène la tangente $m't'$ au point m' projection de M sur ce plan, la tangente cherchée sera également dans un plan mené par $m't'$ parallèlement à l'axe des y; donc la tangente, étant dans deux plans, sera leur intersection; donc la tangente est l'intersection des plans tangents aux deux cylindres qui projettent la courbe sur deux des plans de coordonnées.

III. Démontrons maintenant que ces lignes forment sur la surface de l'ellipsoïde un réseau complet de courbes se coupant orthogonalement. Prenons les surfaces

$$(1)\quad (1+M)x^2+y^2+z^2+a^2-b^2-c^2+\frac{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}{Ma^2}=0,$$

$$(2)\quad (1+M')x^2+y^2+z^2+a^2-b^2-c^2+\frac{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}{M'a^2}=0,$$

et l'ellipsoïde

$$(3)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

L'équation (3) avec chacune des deux premières détermine une courbe. Or on sait que, si l'on a la courbe

$$f(x, y, z)=0,\quad F(x, y, z)=0,$$

les coefficients angulaires m et n d'une tangente à la courbe au point (x, y, z) sont

$$m=\frac{f'_z F'_y - f'_y F'_z}{f'_x F'_y - f'_y F'_x},\quad n=\frac{f'_z F'_x - f'_x F'_z}{f'_x F'_y - f'_y F'_x}.$$

On sait, de plus, que, si m' et n' sont les coefficients angulaires d'une autre tangente, pour que ces deux droites soient rectangulaires, il faut que l'on ait

$$mm'+nn'+1=0.$$

Or, ici, on a

$$m=\frac{z}{x}\,\frac{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}}{\frac{1+M}{b^2}-\frac{1}{a^2}},\quad n=\frac{z}{y}\,\frac{\frac{1}{a^2}-\frac{1+M}{c^2}}{\frac{1+M}{b^2}-\frac{1}{a^2}},$$

$$m'=\frac{z}{x}\,\frac{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}}{\frac{1+M'}{b^2}-\frac{1}{a^2}},\quad n'=\frac{z}{y}\,\frac{\frac{1}{a^2}-\frac{1+M'}{c^2}}{\frac{1+M'}{b^2}-\frac{1}{a^2}}.$$

Exprimons que ces courbes sont orthogonales, et pour cela que les tangentes sont rectangulaires, nous devons retomber sur une identité. Or on a alors

$$\frac{z^2}{x^2}\frac{a^4}{c^4}\frac{(b^2-c^2)^2}{[a^2(1+\mathrm{M})-b^2][a^2(1+\mathrm{M}')-b^2]}$$
$$+\frac{z^2}{y^2}\frac{b^4}{c^4}\frac{[a^2(1+\mathrm{M})-c^2][a^2(1+\mathrm{M}')-c^2]}{[a^2(1+\mathrm{M})-b^2][a^2(1+\mathrm{M}')-b^2]}+1=0,$$

ou bien

$$(4)\left\{\begin{aligned}&\frac{a^4}{x^2}(b^2-c^2)^2+\frac{b^4}{y^2}[a^2(1+\mathrm{M})-c^2][a^2(1+\mathrm{M}')-c^2]\\&\qquad+\frac{c^4}{z^2}[a^2(1+\mathrm{M})-b^2][a^2(1+\mathrm{M}')-b^2]=0.\end{aligned}\right.$$

Soit k le coefficient de $\dfrac{b^4}{y^2}$; on a

$$\begin{aligned}k&=(a^2-c^2+a^2\mathrm{M})(a^2-c^2+a^2\mathrm{M}')\\&=(a^2-c^2)^2+(a^2-c^2)a^2(\mathrm{M}+\mathrm{M}')+a^4\mathrm{MM}'.\end{aligned}$$

Or, en vertu de (1)

$$\mathrm{M}^2a^2x^2+a^2\mathrm{M}(x^2+y^2+z^2+a^2-b^2-c^2)+(a^2-b^2)(a^2-c^2)=0,$$

on a

$$\mathrm{MM}'=\frac{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}{a^2x^2},$$

$$\mathrm{M}+\mathrm{M}'=-1-\frac{y^2+z^2+a^2-b^2-c^2}{x^2};$$

donc on aura, en remplaçant,

$$\begin{aligned}k&=(a^2-c^2)^2-a^2(a^2-c^2)\left(1+\frac{y^2+z^2+a^2-b^2-c^2}{x^2}\right)\\&\quad+\frac{(a^2-b^2)(a^2-c^2)a^2}{x^2}\\&=-c^2(a^2-c^2)-\frac{(a^2-c^2)a^2(y^2+z^2)}{x^2}+\frac{c^2a^2(a^2-c^2)}{x^2}\\&=\frac{a^2-c^2}{x^2}(a^2c^2-c^2x^2-a^2y^2-a^2z^2).\end{aligned}$$

Mais, en vertu de l'équation (3),

$$a^2c^2 - c^2x^2 - a^2z^2 = \frac{a^2c^2y^2}{b^2};$$

donc

$$k = \frac{a^2 - c^2}{x^2}\left(\frac{a^2c^2y^2}{b^2} - a^2y^2\right) = \frac{a^2(a^2 - c^2)(c^2 - b^2)y^2}{b^2x^2}.$$

De même on aurait, pour le coefficient k' de $\frac{c^4}{z^2}$ de l'équation (4),

$$k' = \frac{a^2(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)z^2}{c^2x^2};$$

donc, en substituant dans (4), on aura

$$\frac{a^4}{x^2}(b^2 - c^2)^2 + \frac{a^2b^2(a^2 - c^2)(c^2 - b^2)}{x^2} + \frac{a^2c^2(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}{x^2} = 0,$$

ou bien

$$a^2(b^2 - c^2) - a^2(b^2 - c^2) = 0,$$

ce qui est une identité; donc toutes ces courbes se coupent orthogonalement sur la surface de l'ellipsoïde.

DÉMONSTRATION DES EXPRESSIONS DE COS $(a \pm b)$, SIN $(a \pm b)$;

PAR M. H. LEMONNIER.

Soient a et b deux angles quelconques. Considérons une circonférence d'un rayon égal à l'unité. Les angles se comptant à partir du rayon OA, soit OM le rayon que détermine l'angle a; si l'angle b se porte à partir de OM d'un côté et de l'autre, les rayons OM', OM'' qui s'ensuivront feront avec OA les angles $a + b$, $a - b$; et les projections Om', Om'' de ces rayons, s'estimant positives ou négatives suivant que les directions de O en m' et de O en m'' sont celles de OA, ou opposée, seront $\cos(a+b)$, $\cos(a-b)$.

La corde $M'M''$ rencontrant le rayon OM ou son prolongement en P, le point P sera le milieu de la corde, et sa projection p celui du segment $m'm''$.

En conséquence, Op s'estimant comme Om' et Om'', on aura dans tous les cas

$$Om' + Om'' = 2Op,$$

ou bien

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2Op.$$

Mais si OP est de même direction que OM, sa valeur est $\cos b$, et l'on a

$$Op = \mathrm{OP}\cos a = \cos b \cos a.$$

Si OP et OM sont de directions opposées, la valeur de OP est $-\cos b$, et alors on a

$$Op = \mathrm{OP}\cos(a+\pi) = -\cos b\cos(a+\pi) = \cos b\cos a.$$

D'après cela, nous avons, dans tous les cas, la formule

(1) $$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a\cos b.$$

En y changeant a en $a + \frac{\pi}{2}$, b en $b + \frac{\pi}{2}$, on en déduit

(2) $$-\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\sin a\sin b.$$

Il s'ensuit

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b,$$
$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b.$$

Si dans les formules (1) et (2) on change seulement a en

$a + \frac{\pi}{2}$, elles deviennent

$$-\sin(a+b) - \sin(a-b) = -2\sin a \cos b,$$
$$\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\cos a \sin b;$$

et de là

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a,$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a.$$

SUR LE PROBLÈME PROPOSÉ AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1868;

PAR MM. CLAVERIE ET GARET,
Élèves du lycée de Clermont.

M. Daligault (*) a publié dans le tome VIII, 2e série, p. 32, des *Nouvelles Annales*, une solution du problème proposé au concours d'agrégation de 1868. Il est arrivé à ce résultat que le lieu cherché peut être obtenu par l'intersection des tangentes à deux circonférences de centre O, O' et de rayon p', p, ces tangentes étant supposées rectangulaires.

Or il est intéressant de chercher quel est ce lieu : on peut faire voir très-simplement que c'est un limaçon de Pascal. En effet, je considère deux tangentes rectangulaires T et T' aux deux cercles O et O'. Soit M leur point d'intersection. Par les centres O et O' des deux cercles, je mène deux droites t et t' parallèles à T et T'. Soit A leur point d'intersection; j'achève le rectangle ayant pour côtés t et t' et pour sommet M. Je joins MA;

(*) C'est par erreur que la solution a été attribuée à M. Montcoq (*voir* 2e série, t. VIII, p. 34).

cette droite ira couper la circonférence décrite sur OO′ comme diamètre en un point K. Ce point K est fixe sur la circonférence, car l'angle OAK qui est égal à l'un des angles du rectangle dont les côtés sont p et p' est constant. La diagonale MA de ce rectangle a aussi une longueur constante. Je puis donc obtenir un point du lieu en menant d'un point fixe K de la circonférence décrite sur OO′ comme diamètre une sécante quelconque et prolongeant cette sécante d'une longueur MA constante. Le lieu cherché est donc une conchoïde de cercle.

SUR UNE PROPRIÉTÉ DU CONE DE RÉVOLUTION;

Par M. HERMANN,
Ancien Élève de l'École Normale.

On sait que si l'on coupe un cône de révolution par un plan, la somme des génératrices qui partent du sommet du cône et aboutissent aux extrémités d'un diamètre de la section est constante.

Cette propriété est caractéristique du cône de révolution, si toutefois le plan mené par le sommet du cône et l'un des axes de la section est perpendiculaire au plan de la base du cône.

Pour le démontrer, considérons un cône de révolution dans lequel ces deux conditions sont remplies. Soient S le sommet du cône, AA′, BB′ les deux axes de la section; le cône de révolution décrit autour de la bissectrice de l'angle ASA′ comme axe et passant par A et A′ passera aussi par les deux points B et B′, et se confondra évidemment avec le cône donné.

On peut se servir de cette propriété pour reconnaître, dans un grand nombre de cas, si un cône est de révolution.

Je n'en citerai qu'un exemple.

Si l'on coupe un ellipsoïde de révolution allongé par un plan, le cône qui a pour sommet le foyer d'une section méridienne et pour base une section plane quelconque est un cône de révolution.

Soient M et M′ deux points de la section situés aux extrémités d'un même diamètre, O le centre de la section.

On a

$$\begin{aligned} FM &= K \times MH, \\ FM' &= K \times M'H, \\ FM + FM' &= 2K \times OI = \text{const.}, \end{aligned}$$

en désignant par MH, M′H, OI les distances des points M, M′, O au plan perpendiculaire à l'axe de la surface et formant le lieu des directrices des sections méridiennes. Ainsi la somme des deux génératrices est constante. Le cône qui a pour sommet le foyer est donc de révolution, car il est évident que le plan mené par le sommet du cône et le grand axe de l'ellipse est perpendiculaire sur le plan de la base.

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE SUR UNE QUESTION DE LICENCE;

Par M. A. DE SAINT-GERMAIN.

Déterminer les conoïdes droits pour lesquels les rayons de courbure principaux en chaque point sont égaux et dirigés en sens contraire; exprimer la longueur de ces rayons pour les divers points d'une génératrice des conoïdes demandés.

Cette question a été résolue analytiquement dans les *Nouvelles Annales* (août 1869); je désire cependant en présenter ici une étude géométrique pour deux motifs. Le premier, c'est que l'union de la géométrie et du calcul ayant largement contribué à rendre plus simple et plus élégant l'enseignement de la géométrie analytique, il ne peut être mauvais de montrer l'application de la Géométrie à beaucoup de questions d'analyse infinitésimale. En second lieu, j'obtiens très-aisément une généralisation du problème proposé, que le calcul intégral ne semble pas donner aussi facilement, et qui peut offrir quelque intérêt, parce qu'on ne connaît pas l'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles des surfaces ayant en chacun de leurs points une courbure moyenne nulle.

Considérons donc un conoïde droit satisfaisant à la condition du problème, et supposons son axe vertical. En un quelconque de ses points, M, l'indicatrice, ayant les carrés de ses axes proportionnels aux courbures principales, sera une hyperbole équilatère; une des asymptotes est la génératrice qui passe en M, l'autre lui sera perpendiculaire, et par suite tangente à la trajectoire orthogonale des génératrices menée par M; il s'agit de déterminer cette trajectoire C. Comme c'est une courbe tracée sur le conoïde et tangente à une asymptote de l'indicatrice, elle a un contact du deuxième ordre avec le plan tangent en M, et ce plan lui est osculateur; la génératrice qui passe en M, étant située dans le plan tangent, et d'ailleurs orthogonale avec C, est la normale principale de cette courbe. La courbe cherchée a de même toutes ses normales principales horizontales; les tangentes à son indicatrice sphérique étant parallèles à ces normales, l'indicatrice se réduit à un petit cercle horizontal. Les tangentes à la courbe C, étant parallèles aux rayons qui aboutissent aux divers points de l'indicatrice sphérique, font un angle constant avec la direction de l'axe du conoïde, et notre courbe directrice C est une hélice tracée sur un cylindre vertical orthogonal aux génératrices. Comme celles-ci sont horizontales, la trace horizontale du cylindre coupe à angle droit les projections des génératrices qui concourent au pied de l'axe; cette trace est donc un cercle, la courbe C est l'hélice ordinaire, et le seul conoïde ayant en chaque point des rayons de courbure égaux et de sens contraire est l'héliçoide gauche à plan directeur.

Je dis maintenant que c'est la seule surface ayant la propriété énoncée, non-seulement parmi les conoïdes, mais encore parmi les cylindroïdes, ou surfaces réglées ayant leurs génératrices parallèles à un plan que je supposerai horizontal. En effet, nous reconnaîtrons comme précédemment qu'une trajectoire orthogonale quelconque aux génératrices de ces cylindroïdes doit être une hélice tracée sur un cylindre vertical dont la base coupe à angle droit les projections sur un plan horizontal des génératrices du cylindroïde. Soient AB, AC deux de ces projections infiniment voisines (*), H et H′ deux trajectoires orthogonales des projections des génératrices. Ce sont les projections de deux hélices tracées sur le cylindroïde, en sorte que si j'appelle α et α' les angles constants que les tangentes aux hélices font avec le plan horizontal, dz la différence de niveau des génératrices projetées en AB et AC, m et m' les points de rencontre de AB avec H et H′, n et n' celles de AC avec H, H′, on aura

$$mn = dz \cot\alpha, \quad m'n' = dz \cot\alpha'.$$

Les courbes H, H′ ayant les mêmes normales, la por-

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

tion telle que mm' de ces normales comprise entre les deux courbes est constante. Désignons par ρ le rayon de courbure Am de H, celui de H' en m' sera $\rho + mm'$, et la similitude des triangles Amn, $Am'n'$ donne, en admettant les substitutions d'infiniment petits les plus élémentaires,

$$\frac{mn}{Am} = \frac{m'n'}{Am'}, \quad \frac{dz \cot\alpha}{\rho} = \frac{dz \cot\alpha'}{\rho + mm'}.$$

La dernière égalité montre que ρ est constant; H ayant une courbure constante est un cercle; ses normales, projections des génératrices de la surface, sont concourantes, et cette surface est encore l'héliçoïde gauche.

Je dis enfin que parmi les surfaces réglées qui n'admettent pas de plan directeur, il n'en est aucune dont les courbures principales en chaque point soient égales et de sens contraire. En effet, cette propriété devrait appartenir aux hyperboloïdes osculateurs à la surface le long de ces génératrices; en chaque point de la génératrice de contact, un de ces hyperboloïdes aurait pour indicatrice une hyperbole équilatère à asymptotes rectangulaires. Or, pour l'hyperboloïde, les asymptotes de l'indicatrice en un point sont les deux génératrices qui y passent; et, sur un hyperboloïde proprement dit, comme l'est l'hyperboloïde osculateur à une surface dont trois génératrices consécutives ne sont pas parallèles à un même plan, jamais le lieu des points où les génératrices se coupent à angle droit n'est une génératrice : c'est, comme on sait, la courbe d'intersection de la surface et d'une sphère. Il n'y a donc, en définitive, aucune surface réglée, autre que l'héliçoïde gauche, présentant la propriété énoncée. On peut remarquer que les hyperboloïdes osculateurs à l'héliçoïde se réduisent à des paraboloïdes équilatères ayant leur sommet au point central de la génératrice de contact; et, pour ces paraboloïdes, le lieu des points où les génératrices sont rectangulaires est le couple de génératrices passant au sommet.

Je n'ai pas à considérer les surfaces développables, en chaque point desquelles un rayon de courbure est toujours infini ; l'autre devrait l'être également, et la surface se réduirait à un plan, cas particulier de l'héliçoïde gauche.

Reste à chercher l'expression des rayons de courbure principaux R en un point d'un héliçoïde gauche. Soient encore AB et AC deux génératrices infiniment voisines, M et N deux points de ces génératrices faisant partie d'une même ligne de courbure; ces éléments se projettent horizontalement en ab, ac, m, n. Menons dans le plan horizontal ms, ns perpendiculaires respectivement à am et an; on peut les regarder comme les projections des normales à l'héliçoïde en M et N, normales qui, par la propriété des lignes de courbure se rencontrent dans l'espace au centre de courbure S projeté en s. En appelant α l'angle du plan horizontal avec l'hélice tracée en M sur l'héliçoïde, on aura, sauf une erreur infiniment petite, $ns = \mathrm{R} \sin\alpha$. Soient p le point de rencontre de ms avec an, P le point correspondant sur la surface; MP est asymptote de l'indicatrice en M, et comme celle-ci est équilatère, MP = PN. On a évidemment

$$mp = \mathrm{MP}\cos\alpha, \quad pn = \mathrm{PN}.$$

Les triangles semblables amp, snp donnent

$$\frac{ns}{am} = \frac{pn}{pm}, \quad \frac{\mathrm{R}\sin\alpha}{\rho} = \frac{\mathrm{PN}}{\mathrm{PM}\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha};$$

d'où

$$\mathrm{R} = \frac{\rho}{\sin\alpha\cos\alpha};$$

mais si l'on désigne par $2\pi a$ le pas de l'hélice tracée sur un cylindre de rayon ρ, on sait par les éléments que

$$\tang\alpha = \frac{a}{\rho};$$

donc enfin on trouve

$$\mathrm{R} = \frac{a^2 + \rho^2}{a}.$$

Il est aisé de construire ce rayon, et de voir qu'il est au rayon de courbure de l'hélice dans le rapport de a à ρ.

On a immédiatement l'équation de la projection des lignes de courbure. La figure précédente nous donne

$$d\omega = \frac{pm}{am} = \frac{\mathrm{PM}\cos\alpha}{\rho} = \frac{\mathrm{PN}}{\rho} \times \frac{\rho}{\sqrt{a^2+\rho^2}} = \frac{pn}{\sqrt{a^2+\rho^2}}.$$

Puis, selon qu'on prend l'un ou l'autre système de lignes de courbure, on aura $d\rho = \pm pn$; car on sait qu'on peut regarder *am* et *ap* comme égaux. L'équation différentielle des projections des lignes de courbure est

$$d\omega = \pm \frac{d\rho}{\sqrt{a^2+\rho^2}}.$$

L'intégrale est bien connue

$$\omega = \pm \,\mathrm{l}\,(\rho + \sqrt{a^2+\rho^2});$$

d'où l'on tire

$$\rho = \pm \frac{a}{2}\,(e^{\omega} - e^{-\omega}).$$

Enfin le lieu des centres de courbure de l'héliçoïde pour tous les points d'une génératrice s'obtient en prenant pour axe des x la génératrice, pour axe des z l'axe du conoïde, pour axe des y une perpendiculaire aux deux autres. On aura, en considérant l'un et l'autre des centres de courbure en M,

$$x = am = \rho,$$

$$y = \pm ms = \pm \mathrm{R}\sin\alpha = \pm \frac{a^2+\rho^2}{a}\frac{a}{\sqrt{a^2+\rho^2}} = \pm\sqrt{a^2+x^2},$$

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{y}{z} = \frac{a}{\rho} = \frac{a}{x}.$$

Le lieu est l'intersection du cylindre $x^2 - y^2 + a^2 = 0$ et du paraboloïde $xy = az$; c'est une courbe gauche formée de deux parties séparées. Il est assez remarquable qu'on puisse la rectifier : on trouvera sans peine

$$ds = \frac{dx}{a}\sqrt{2a^2+4x^2}.$$

En comptant l'arc à partir de $x = 0$, cela donne

$$s = \frac{x}{2a}\sqrt{2a^2+4x^2} + \frac{a}{2}\,\mathrm{l}\,\frac{2x+\sqrt{2a^2+4x^2}}{a\sqrt{2}}.$$

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 207

(voir 1re série, t. VIII, p. 108);

PAR M. CHARLES BRISSE.

Étant donné un triangle plan, soient trois paraboles, ayant même foyer, dont chacune est touchée par deux côtés du triangle; si l'on mène à la première de ces paraboles la tangente qui coupe perpendiculairement *le troisième côté du triangle, et, de même pour les deux autres, les trois droites qu'on obtient ainsi seront toutes tangentes à la même parabole, homofocale avec les trois autres.* (STREBOR.)

Transformons par polaires réciproques ce théorème connu : *Les trois hauteurs d'un triangle se coupent en un même point.* Nous obtiendrons, en nous rappelant que *l'angle compris entre deux droites est égal à l'angle que forment les rayons vecteurs menés de l'origine aux points correspondants* (*), la proposition suivante :

Étant donné un triangle ABC *et un point* O *dans son plan, si l'on élève par ce point des perpendiculaires aux droites* OA, OB, OC *jusqu'à leur rencontre avec les côtés opposés, les trois points ainsi obtenus seront en ligne droite.*

Transformons cet énoncé par rayons vecteurs réciproques, en prenant le point O pour origine, il prendra la forme suivante :

Étant donnés trois cercles qui se coupent en un même point O, *si l'on élève par ce point des perpendiculaires aux cordes communes* OA, OB, OC *des cercles pris deux à deux, jusqu'à leurs rencontres respectives avec les cercles* OBC, OCA, OAB, *les trois points ainsi obtenus seront avec* O *sur un même cercle.*

Transformons enfin par polaires réciproques ce dernier théorème, en prenant le point O pour origine, et nous obtiendrons précisément celui qui fait l'objet de la question 207.

(*) SALMON, *Sections coniques*, édition française; Paris, Gauthier-Villars.

Question 234

(voir 1re série, t. X, p. 183);

PAR UN ABONNÉ.

Soit l'équation

$$(x-a_1)(x-a_3)(x-a_5)\ldots(x-a_{2n-1})$$
$$+b^m(x-a_2)(x-a_4)\ldots(x-a_{2n})=0;$$

b est un nombre positif; m un nombre entier positif; les $2n-1$ différences a_1-a_2, a_2-a_3, $a_3-a_4,\ldots$, $a_{2n-1}-a_{2n}$ sont positives; les n racines de l'équation sont réelles et comprises entre a_1 et a_2, a_3 et a_4, a_5 et $a_6,\ldots$. (RICHELOT.)

Des inégalités

$$\begin{array}{l} a_1-a_2>0,\\ a_2-a_3>0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\\ a_{2p-1}-a_{2p}>0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\\ a_{2n-1}-a_{2n}>0, \end{array}$$

on conclut les suivantes :

$$\begin{array}{ll} a_1-a_{2p}>0, & a_{2p-1}-a_{2p}>0,\\ a_2-a_{2p-1}>0, & a_{2p}-a_{2p+1}>0,\\ a_3-a_{2p}>0, & a_{2p-1}-a_{2p+2}>0,\\ a_4-a_{2p-1}>0, & a_{2p}-a_{2p+3}>0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots,\\ a_{2p-2}-a_{2p-1}>0, & a_{2p}-a_{2n-1}>0,\\ a_{2p-1}-a_{2p}>0, & a_{2p-1}-a_{2n}>0. \end{array}$$

Substituons a_{2p-1} à x dans le premier membre de l'équation proposée, nous aurons à chercher le signe du produit

$$b^m(a_{2p-1}-a_2)(a_{2p-1}-a_4)\ldots$$
$$(a_{2p-1}-a_{2p-2})(a_{2p-1}-a_{2p})\ldots(a_{2p-1}-a_{2n}).$$

Abstraction faite de b^m, les $p-1$ premiers facteurs sont négatifs, tous les autres sont positifs; le résultat a donc le signe de la quantité

$$(-1)^{p-1}.$$

Substituons maintenant a_{2p}, nous aurons à chercher le signe du produit

$$(a_{2p}-a_1)(a_{2p}-a_3)\ldots(a_{2p}-a_{2p-1})(a_{2p}-a_{2p+1})\ldots(a_{2p}-a_{2n-1}).$$

Les p premiers facteurs sont négatifs, tous les autres sont positifs; le résultat a donc le signe de la quantité

$$(-1)^p.$$

Les résultats des deux substitutions étant de signes contraires, l'équation a une racine comprise entre a_{2p-1} et a_{2p}; d'où l'on conclut qu'elle a toutes ses racines réelles et comprises respectivement entre a_1 et a_2, a_3 et $a_4, \ldots, a_{2n-1}$ et a_{2n}.

Questions 877 *et* 876

(voir 2ᵉ série, t. VII, p. 239);

PAR M. MOREL,
Répétiteur à Sainte-Barbe.

877. *Lorsque la réduction d'une fraction $\frac{a}{b}$ en décimales conduit à une période de n chiffres, toute fraction irréductible dont le dénominateur égale un multiple de b donne lieu à une période dont le nombre de chiffres est égal à un multiple de n.*

(LIONNET, *Algèbre*, 3ᵉ édit.)

Lorsqu'une fraction irréductible est de la forme $\frac{c}{mb}$, on peut la considérer comme la somme de deux fractions $\frac{x}{m}$, $\frac{y}{b}$. En effet, la résolution de l'équation

$$\frac{x}{m}+\frac{y}{b}=\frac{c}{mb}$$

revient à la résolution en nombres entiers de l'équation

$$bx+my=c,$$

question qui admet, en général, au moins une solution. Si maintenant je suppose que la fraction $\frac{x}{m}$ soit périodique, et que sa période soit $hjkl$, celle de $\frac{y}{b}$ étant $pqrstv$, nous aurons

$$\frac{y}{b}=0,\ pqrs\,tvpq\ rstv\ pqrs\,tvpq\,r\ldots,$$

$$\frac{x}{m}=0,\ hjkl\ hjkl\ hjkl\,hjkl\ hjkl\,h\ldots.$$

En faisant la somme de ces deux fractions, nous aurons une nouvelle fraction périodique, puisque nous retrouverons périodiquement les mêmes sommes à faire, et cela lorsque nous aurons pris un nombre exact de périodes de chaque côté. Donc $\frac{c}{bm}$ sera bien une fraction périodique dont le nombre de chiffres sera un multiple de n.

Si m était seulement composé des facteurs 2 et 5, ou, plus généralement, des facteurs de la base de numération, la fraction $\frac{c}{mb}$ aurait encore n chiffres à la période; mais l'origine de la période serait reculée d'autant de chiffres qu'il y en aurait dans la réduction en décimales de la fraction $\frac{x}{m}$.

876. 1020 *étant le dénominateur d'une fraction irréductible, pourquoi le nombre des chiffres de la période engendrée par cette fraction sera-t-il un des nombres* 1, 2, 4, 8, 16, 32? (LIONNET, *Algèbre*, 3e édit.)

Le nombre 1020 étant égal au produit $20 \times 3 \times 17$, on aura

$$A = \frac{a}{20} + \frac{b}{3} + \frac{c}{17},$$

A, a, b, c étant premiers respectivement avec 1020, 20, 3, 17.

La fraction $\frac{a}{20}$ étant limitée n'influera pas sur le nombre des chiffres de la période. Mais les fractions périodiques $\frac{b}{3}$, $\frac{c}{17}$ peuvent avoir pour nombres de chiffres à la période

$\frac{b}{3}$, 1 ou 2 chiffres,

$\frac{c}{17}$, 1, 2, 4, 8, 16 chiffres.

Le nombre des chiffres de la somme $\frac{b}{3} + \frac{c}{17}$ ne pourra être que l'un des nombres obtenus en multipliant les nombres relatifs à $\frac{c}{17}$ par ceux relatifs à $\frac{b}{3}$. On aura ainsi l'un des nombres 1, 2, 4, 8, 16 ou 32, et pas d'autres.

Remarque. — Le nombre de chiffres correspondant à la fraction $\frac{c}{17}$ est 16; le nombre de chiffres pour $\frac{b}{3}$ est 1; donc le nombre cherché sera 16. En outre, la fraction $\frac{a}{20}$

donnera deux chiffres, puisqu'elle est égale à $\frac{5a}{100}$; donc la fraction $\frac{A}{1020}$ sera une fraction décimale périodique mixte, ayant deux chiffres à la partie non périodique et 16 à la période.

Vérification :

$$\frac{173}{1020} = 0,16960784313725490196078 43\ldots$$

Question 949

(voir 2^e série, t. VIII, p. 335);

PAR M. P. MEUTZNER,

Étudiant à Leipzig.

Trouver toutes les courbes planes pour lesquelles la projection de la normale sur le rayon vecteur est constante. On compte la normale du point de la courbe à une droite fixe donnée et le rayon vecteur du point de la courbe à un point fixe pris pour pôle. Les coniques donnent une solution particulière. (GENOCCHI.)

Soit b la distance du point fixe à la droite fixe. Par le point fixe, pris pour pôle, menons une parallèle à la droite fixe et prenons-la pour axe polaire. Soit k la valeur constante de la projection de la normale sur le rayon vecteur.

En désignant par r et φ les coordonnées polaires d'un point quelconque de la courbe, l'équation différentielle de cette courbe sera

$$-\frac{dr}{r^2 d\varphi} = \frac{1}{k}\tang\varphi + \frac{b}{k}\frac{1}{r\cos\varphi} - \frac{1}{r}\tang\varphi.$$

Posons

$$\frac{1}{r} = \eta,$$

il viendra

$$(1)\qquad \frac{d\eta}{d\varphi} = \frac{1}{k}\operatorname{tang}\varphi + \frac{\eta}{\cos\varphi}\left(\frac{b}{k} - \sin\varphi\right).$$

Si nous prenons d'abord l'équation différentielle

$$\frac{d\eta}{d\varphi} = \frac{\eta}{\cos\varphi}\left(\frac{b}{k} - \sin\varphi\right),$$

elle donne par l'intégration

$$\eta = \gamma\left(\frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)^{\frac{k}{b}}\cos\varphi,$$

γ étant une constante arbitraire.

Nous cherchons maintenant, par la méthode de la variation des constantes arbitraires, à satisfaire à l'équation (1) en regardant γ comme une fonction de φ. Nous trouvons, en posant

$$1 + \sin\varphi = u \quad \text{et} \quad \frac{\mu - 3}{2} = \alpha,$$

la quadrature

$$k\gamma = \int \frac{(2-u)^{\alpha}(u-1)\,du}{u^{\alpha+3}}.$$

Elle peut facilement s'effectuer et donne

$$k\gamma = -\frac{1}{4(\alpha+1)(\alpha+2)}\frac{(2-u)^{\alpha+1}}{u^{\alpha+2}}[(2\alpha+3)u - 2(\alpha+1)] + kC,$$

C étant une constante arbitraire. Remplaçons u et α par leurs valeurs, nous aurons donc

$$\gamma = \frac{1}{k^2 - b^2}\frac{b\sin\varphi + k}{1+\sin\varphi}\left(\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}\right)^{\frac{b-k}{2k}} + C.$$

Par conséquent, l'équation des courbes cherchées est

$$(2)\quad \frac{1}{r} = \left[\frac{1}{k^2 - b^2}\frac{b\sin\varphi + k}{1+\sin\varphi}\left(\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}\right)^{\frac{b-k}{2k}} + C\right]\left(\frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)^{\frac{b}{k}}\cos\varphi.$$

Si nous supposons $b = 0$, l'équation (2) devient

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{k} + C\cos\varphi,$$

ou bien

$$(3) \qquad r = \frac{k}{1 + kC\cos\varphi}.$$

On voit que c'est l'équation d'une conique. On a en coordonnées rectangulaires

$$(4) \qquad (1 - k^2c^2)x^2 + y^2 = k^2(1 - 2Cx).$$

L'équation (2) montre qu'on n'obtient aucune solution en faisant $b = k$. Ce cas doit être traité à part. L'équation différentielle devient, dans l'hypothèse où $b = k$,

$$(5) \qquad \frac{d\eta}{d\varphi} = \frac{1}{k}\operatorname{tang}\varphi + \frac{\eta}{\cos\varphi}(1 - \sin\varphi).$$

En intégrant, on obtient

$$(6) \qquad \frac{4k\eta - 2}{1 + \sin\varphi} = 1\,\frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi} + C$$

pour l'équation des courbes satisfaisant aux conditions de l'énoncé.

Question 971

(voir 2[e] série, t. VIII, p. 562);

PAR M. A. MOREL,

Répétiteur à Sainte-Barbe.

Trouver la loi de formation des nombres dont les carrés sont terminés par deux chiffres égaux.

(H. BROCARD.)

Il est d'abord évident qu'il suffit de chercher les nombres proposés parmi les nombres inférieurs à 100. En effet, prenons un nombre supérieur à 100; appelons α le nombre formé par les centaines, et β le nombre formé par les unités, de telle sorte que l'on ait

$$A = \alpha \times 100 + \beta.$$

On aura

$$A^2 = (\alpha \times 100 + \beta)^2 = \alpha^2 \times 100^2 + 2\alpha\beta \times 100 + \beta^2.$$

Si donc β^2 est terminé par deux chiffres égaux, il en sera de même de A^2, puisque la valeur de α ne peut influer que sur les centaines.

Si maintenant β est un nombre inférieur à 25 qui jouisse de cette propriété, nous aurons, jouissant de la même propriété, les nombres $50-\beta$, $50+\beta$ et $100-\beta$. En effet, on a

$$(50 \pm \beta)^2 = 2500 \pm 100\beta + \beta^2.$$

Donc les deux derniers chiffres de $(50 \pm \beta)^2$ sont les mêmes que ceux de β^2. Il nous suffit donc de chercher parmi les nombres inférieurs à 25 ceux qui jouissent de la propriété demandée. Nous pouvons exclure immédiatement les nombres terminés par 5, dont le carré est terminé par 25, et les nombres terminés par un zéro, qui ont toujours leurs carrés terminés par deux zéros. Il nous reste donc à essayer les nombres 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24. Les trois premiers, n'ayant qu'un chiffre au carré, doivent être exclus.

Parmi les dix-sept nombres qui nous restent, nous n'avons que le nombre 12 dont le carré 144 soit terminé par deux chiffres égaux. Nous trouverons donc les nombres 12, 38, 62, 88, dont le carré soit terminé par deux chiffres égaux; nous remarquerons en outre que ces chiffres sont deux 4.

Donc

Tout nombre terminé par 12, 38, 62, 88 *aura son carré terminé par* 44; *ces nombres seuls ont leur carré terminé par deux chiffres égaux.*

Question 983

(voir 2ᵉ série, t. IX, p. 93);

PAR M. A. MOREL.

Imaginons deux ellipses concentriques, l'une intérieure, l'autre extérieure, dont les axes ont les mêmes directions. Cela posé, quelles relations doivent exister entre les demi-axes de ces deux ellipses pour que la courbe polaire réciproque d'une d'elles par rapport à l'autre soit un cercle de rayon donné?

(HARKEMA.)

Première solution. — Soient

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,$$

$$(2)\qquad \frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-1=0$$

les équations des deux coniques. Soit (α, β) un point du lieu cherché. Ce point ayant pour polaire par rapport à la courbe (1) une tangente à la courbe (2), on aura les relations

$$(3)\qquad \frac{\dfrac{\alpha}{a^2}}{\dfrac{x}{a'^2}}=\frac{\dfrac{\beta}{b^2}}{\dfrac{y}{b'^2}}=1;$$

on tire de ces relations

$$\frac{x}{a'}=\frac{a'\alpha}{a^2},\quad \frac{y}{b'}=\frac{b'\beta}{b^2}.$$

Portant ces valeurs dans l'équation (2), on aura, pour la polaire réciproque de cette courbe,

$$\frac{a'^2\alpha^2}{a^4} + \frac{b'^2\beta^2}{b^4} - 1 = 0,$$

ou

$$a'^2 b^4 \alpha^2 + b'^2 a^4 \beta^2 - a^4 b^4 = 0.$$

Cette courbe sera un cercle si l'on a

$$a'^2 b^4 = b'^2 a^4;$$

son rayon sera, en outre, égal à r si l'on a

$$\frac{a^4}{a'^2} = r^2.$$

Cette dernière condition nous donne, en ne prenant que les valeurs absolues,

$$a' = \frac{a^2}{r};$$

on trouverait de même

$$b' = \frac{b^2}{r}.$$

Deuxième solution. — La polaire réciproque d'une conique étant une autre conique, la polaire réciproque de A' par rapport à A sera une ellipse, puisque la courbe A' ne passe pas par le centre de A, et que, par suite, sa courbe réciproque n'a pas de point à l'infini. En outre, la courbe A' étant symétrique par rapport aux axes, sa réciproque le sera également. Cette courbe sera un cercle si les segments qu'elle intercepte sur les axes sont égaux. Soit r le segment intercepté sur chaque axe; on doit avoir les relations

$$a'r = a^2, \quad b'r = b^2,$$

ce qui donne les relations trouvées précédemment.

Si l'on voulait, en outre, que le cercle fût la polaire réciproque de l'une quelconque des deux courbes par rapport à l'autre, il faudrait que l'on eût

$$a'r = a^2, \quad b'r = b^2,$$

avec

$$ar = a'^2, \quad br = b'^2;$$

ce qui exigerait que l'on eût

$$a = a', \quad b = b' \quad \text{et} \quad a = b.$$

Dans ce cas, les deux coniques se réduisent à deux cercles égaux et concentriques, et, si nous prenons un point et la tangente en ce point, l'enveloppe de cette tangente est le cercle lui-même, qui répond ainsi à la question.

EXERCICE.

Lorsqu'on joint deux points $M'(x', y')$, $M''(x'', y'')$ de la parabole $y^2 = 2px$ à un point quelconque O (X, Y) de son plan, la surface du triangle résultant $OM'M''$ a pour expression

$$\frac{Y' - Y''}{4p} [Y(y' + y'') - y'y'' - 2pX],$$

ou encore

$$\frac{1}{p} \sqrt{y^3 - 2px}\, [Yy - p(X + x)],$$

x, y étant les coordonnées du pôle P de la corde $M'M''$.

En déduire la surface

$$\frac{(y' - y'')(y'' - y''')(y''' - y')}{4p}$$

du triangle $M'M''M'''$ inscrit dans la parabole.

(G. Dostor.)

BIBLIOGRAPHIE (*).

Table de Logarithmes à vingt-sept décimales pour les calculs de précision, par Fédor Thoman. Grand in-8°, 1867. — Paris, librairie Gauthier-Villars. Prix : 5 fr.

Le savant auteur de ce très-remarquable écrit a laissé de nombreux amis qui conserveront, avec une haute estime pour ses talents, le souvenir de son excellent et affectueux caractère. Les géomètres admiraient l'ingénieuse simplicité de ses méthodes, les administrateurs des grandes compagnies connaissaient l'exactitude irréprochable de ses calculs, et les financiers les plus actifs mettaient à profit la merveilleuse rapidité de ses réponses à des questions sans cesse renouvelées. Sa mort prématurée laisse un vide difficile à remplir. Nous ignorons le nom véritable caché sous le pseudonyme de Fédor Thoman. On raconte qu'un jour, au milieu d'une fête et devant de nombreux témoins, l'héritier de l'un des noms les plus illustres de la Russie le salua du titre de prince. Fédor Thoman, impassible, répondit simplement : « Vous êtes » sans doute abusé par quelque ressemblance. » Le seigneur russe s'inclina sans poursuivre la conversation, mais, un quart d'heure après, les deux compatriotes échangeaient quelques mots dans un salon écarté et s'éloignaient dans la même voiture.

Je n'ai ni le moyen ni le droit de rechercher ici un secret que, pendant un séjour de vingt-cinq ans, Fédor Thoman, je crois en être certain, n'a confié à aucun Français. Plus d'une supposition a été hasardée, mais aucune

(*) Extrait du *Journal des Savants*, décembre 1870.

d'elles, je veux me borner à le dire, n'a fait planer le plus léger soupçon sur la délicatesse et la droiture de cet homme excellent et réellement supérieur à plus d'un titre.

Les écrits de Fédor Thoman sont nombreux, il a abordé la chimie, la cristallographie, les hautes mathématiques et la théorie des opérations financières, en y portant la grande profondeur de savoir et la minutieuse précision dont sa nature lui faisait une loi. Je me propose seulement ici de faire connaître son opuscule sur le calcul des logarithmes, véritable tour de force à mes yeux et chef-d'œuvre de dextérité arithmétique. Le sujet est de haute importance ; il semblait depuis longtemps épuisé, lorsque Fédor Thoman est venu y apporter un progrès considérable et évident.

Les Tables de logarithmes employées par tous les calculateurs sont à sept décimales. Ce nombre de chiffres n'a pas été choisi au hasard, et il ne faut pas croire qu'avec huit ou dix figures on obtiendrait sans peine des calculs plus exacts. En effet, plus les calculs sont précis, plus on est assuré d'y rencontrer des nombres et surtout des logarithmes qui ne se trouvent pas exactement dans la table ; il faut alors, ceux qui ont calculé le savent, recourir à une interpolation. Une proportion suffit quand on calcule à sept décimales ; mais, si l'on en prend dix, cette proportion, dans le plus grand nombre de cas, donnerait trois chiffres inexacts et, par conséquent, plus nuisibles qu'utiles. Un coup d'œil jeté sur les Tables de Vlacq ne peut laisser sur ce point aucun doute : *les différences premières ne sont pas constantes*, et, pour en faire usage, il faut recourir aux formules d'interpolation, dont la complication, qui rend les calculs extrêmement pénibles, s'accroît rapidement avec le nombre des chiffres conservés. C'est pour cela, et non par des motifs d'économie, que les grandes Tables du cadastre à quinze décimales, qui devaient, dans l'intention du gouvernement républicain, *former le monument de calcul le plus vaste et le plus imposant qui eût jamais été exécuté ou même conçu,* n'ont pas encore été publiées et ne le seront vraisemblablement jamais.

Fédor Thoman, comme l'indique le titre de sa brochure, veut mettre à la disposition des calculateurs les logarithmes de tous les nombres et les nombres correspondants aux logarithmes avec une exactitude qui, jusqu'ici, n'a été ni atteinte ni cherchée, et les Tables complètes, qui sembleraient devoir remplir des centaines de volumes in-folio, pourraient aisément être réunies sur une seule page; si elles en occupent dix dans l'écrit que je signale à l'attention des savants, c'est qu'on n'a pas cherché à ménager la place.

Dans ces dix pages, cela va sans dire, les logarithmes ne sont pas inscrits, mais on trouve tout ce qu'il faut pour les calculer par un procédé toujours uniforme, qui n'exige que des additions et des multiplications dans lesquelles le multiplicateur n'a qu'un chiffre, et dans une seule il en a deux; aucune interpolation n'est nécessaire, et il n'y a pas une seule division.

La méthode de Fédor Thoman est fondée sur un principe fort simple, déjà utilisé par Briggs. Quand un nombre diffère peu de l'unité, le calcul de son logarithme est facile, et l'on a, en négligeant θ^2,

$$(1) \qquad \mathrm{l}(1+\theta) = k\theta,$$

k étant un facteur toujours le même, que l'on peut calculer une fois pour toutes, et dont une Table donne les produits par tous les nombres inférieurs à 100. Rien de plus facile dès lors que de former $k\theta$: quels que soient les chiffres de θ, on les partage en groupes de deux, et les produits par chaque groupe qui se trouvent écrits dans la Table sont ensuite ajoutés les uns aux autres.

Toute la question se borne donc à réduire un nombre quelconque N à la forme $1+\theta$, en faisant θ assez petit pour que la formule (1) soit applicable. La méthode très-ingénieuse de Thoman consiste à multiplier N par des facteurs successifs tellement choisis que le produit converge rapidement vers l'unité. Ces facteurs font toujours partie des nombres inscrits dans une Table; on trouve, *sans tâtonnement*, celui qui convient à chaque opération, et à côté de lui son logarithme calculé à l'avance; chaque facteur enfin, à partir du second, n'a qu'un chiffre significatif, et le premier en a deux. Soit donc N le nombre donné, p le premier facteur tellement choisi que Np diffère peu de l'unité; soient $1-a$, $1-b$, $1-c, \ldots$ les facteurs suivants dont les logarithmes sont $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma, \ldots$, on aura

$$Np(1-a)(1-b)(1-c)\ldots = 1+\theta,$$

et

$$lN + lp - \alpha - \beta - \gamma \ldots = k\theta;$$

par conséquent,

$$lN = \text{comp.}\log p + \alpha + \beta + \gamma + \ldots + k\theta.$$

Pour bien montrer la simplicité de la méthode, calculons à 15 décimales le logarithme de $\pi = 3,141592653589793$.

Une première Table nous apprend que, les deux premiers chiffres étant 31, il convient d'adopter pour premier multiplicateur 32, afin que le produit diffère aussi peu que possible de l'unité (la position de la virgule est, bien entendu, insignifiante); le produit 32π est

$$100,530964914873376.$$

Les multiplicateurs $1-a$, $1-b$, $1-c, \ldots$ sont successivement $1-0,005$, $1-0,0002$, $1-0,00008$, $1-0,000003$, $1-0,0000003$, et le produit obtenu $1+\theta$

est 1,000000000763015282, et l'on peut, sans commettre d'erreur sur le quinzième chiffre décimal, chercher son logarithme par la formule (1).

Voici le détail complet du calcul; tous les chiffres qui y sont inscrits sont directement copiés sur la Table sans calcul accessoire et sans tâtonnement.

$$
\begin{array}{rl}
3,141592653589793 & \times\ 32 \\
\hline
6283185307179586 & \\
94247779607693\,79 & \\
\hline
1,0053096491487 3376 & \times\ 1-0,005 \\
50265482457 4367 & \\
2831009029 9009 & \times\ 1-0,0002 \\
20005662018060 & \\
830442828 0949 & \times\ 1-0,00008 \\
800066435 4262 & \\
30376392 6687 & \times\ 1-0,000003 \\
30000091 1292 & \\
763015395 & \times\ 1-0,0000003 \\
113 & \\
\hline
763015282 & = \theta \\
\hline
330063806 & \\
1302883 & \\
6514 & \\
122 & \\
1 & \\
\hline
331373326 & = \log(1+\theta) \\
1302883465 & \\
130288540004 & \\
3474494836873 & \\
8686758342858 & \\
217691925427455 & \\
4948500216800 9402 & \\
\hline
\log\pi = 0,497149872694134 &
\end{array}
$$

Supposons maintenant qu'ayant à sa disposition les Tables à quinze décimales du cadastre, on veuille chercher le même logarithme, on y trouvera seulement ceux des nombres

$$31415,\ 31416,\ 31417,\ 31418,\ 31419,\ 31420,$$

et ces logarithmes serviront à calculer les différences successives dont la cinquième seulement est constante; il faudra donc, pour avoir le logarithme de π, faire usage de la formule d'interpolation du cinquième degré. En posant

$$q = 0{,}92653589793,$$

on devra ajouter au logarithme de 31415 le nombre donné par la formule :

$$q\Delta u + \frac{q(q-1)}{2}\Delta^2 u + \frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3}\Delta^3 u$$
$$+ \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{1.2.3.4}\Delta^4 u$$
$$+ \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)(q-4)}{1.2.3.4.5}\Delta^5 u,$$

où Δu, $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, $\Delta^4 u$, $\Delta^5 u$ sont les nombres fournis par la Table, et le calcul sera dix fois plus long au moins que celui de Fédor Thoman, dont la supériorité paraît décourageante pour les calculateurs qui voudraient, à l'avenir, perfectionner de nouveau le calcul numérique des logarithmes.

La recherche du nombre correspondant à un logarithme donné est tout aussi simple. Si le logarithme est petit et que l'on ait

$$\log x = \theta,$$

on pourra prendre

$$(2) \qquad x = 1 + \frac{\theta}{k},$$

en négligeant le carré de θ.

Comment réduire maintenant un logarithme quelconque à ceux auxquels la formule (2) est applicable?

Thoman y parvient en retranchant successivement de ce logarithme des logarihmes connus dont l'ensemble forme deux petites Tables d'une page chacune et choisissant à chaque fois, dans la Table dont on doit faire usage, le logarithme le plus proche du résultat de la soustraction précédente.

Soient x le nombre cherché et $\log N$, $\log(1+a)$, $\log(1+b)$, ..., etc., les logarithmes successivement soustraits, le nombre cherché sera

$$x = N(1+a)(1+b)(1+c)\ldots\left(1+\frac{\theta}{k}\right);$$

a, b, c ne contiennent chacun qu'un seul chiffre, et $\frac{\theta}{k}$ se calcule, comme on l'a dit, par de simples additions. Cherchons, par exemple, à onze décimales, le nombre dont le logarithme est

$$0,49714987269\text{4}.$$

Le plus grand logarithme, parmi ceux des cent premiers nombres que l'on puisse retrancher du proposé, est celui de 31; il reste

$$0,00578817886\text{0}$$

dont on retranche successivement les logarithmes de 1,01, 1,003, 1,0003, 1,00008, et il reste 0,000000861083, auquel peut s'appliquer la formule (2).

Voici tout le calcul :

$$
\begin{array}{rr l}
\log x = & 0,497149872694 & \\
 & 491361693834 & = \log 31 \\
\hline
 & 5788178860 & \\
 & 4321373783 & = \log 1,01 \\
\hline
 & 1466805077 & \\
 & 1300933020 & = \log 1,003 \\
\hline
 & 165872057 & \\
 & 130268805 & = \log 1,0003 \\
\hline
 & 35603252 & \\
 & 34742169 & = \log 1,00008 \\
\hline
 & 861083 & \\
\hline
 & 1980223 & \\
 & 2303 & \\
 & 191 & \\
\hline
 & 1,000001982717 & \times 1,00008 \\
 & 80000159 & \\
\hline
 & 1,000081982876 & \times 1,0003 \\
 & 300024595 & \\
\hline
 & 1,000383153493 & \times 1,003 \\
 & 3001146022 & \\
\hline
 & 1,003383153493 & \times 1,01 \\
 & 1,0033831535 & \\
\hline
 & 1,013416985028 & \times 31 \\
 & 30,40250955084 & \\
\hline
x = & 3,14159265359 &
\end{array}
$$

Il semble difficile de concevoir, pour la solution d'un tel problème, une méthode plus élégante et plus sûre et des calculs moins laborieux. Comme le grand nombre des chiffres inscrits dans chaque ligne est une des nécessités de la question, on ne doit s'attacher qu'à compter le nombre des lignes, en remarquant que chacune s'écrit en quelque sorte sans travail, lorsqu'elle n'est pas purement et simplement copiée dans une Table d'une seule page.

Je n'essayerai pas de refaire ici l'histoire bien connue et souvent étudiée de la théorie des logarithmes. Six volumes in-4°, publiés en 1791 sous le titre général *Scriptores logarithmici*, démontrent suffisamment l'ardeur des tentatives sans cesse renouvelées depuis deux siècles pour simplifier les calculs en agrandissant le cadre des Tables. Je puis cependant, sans m'écarter du sujet de cet article, citer le nom illustre de Huyghens, qui ne figure pas dans la collection des *Scriptores logarithmici*. Fédor Thoman, en effet, avait étudié avec le plus grand soin les travaux de l'illustre géomètre relatifs au calcul numérique, et sa méthode, très-différente de celle d'Huyghens, montre pourtant qu'il en a fait son profit.

Les procès-verbaux manuscrits de l'Académie des Sciences pour l'année 1666 contiennent cette méthode très-ingénieuse, donnée sans démonstration et parfaitement élucidée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. LXVI, n° 13; 1868) par un commentaire de Thoman (*). L'illustre académicien connaît évidemment la série qui représente $\mathrm{l}(1+h)$, et que Mercator, d'ailleurs, publia en 1664, et sa méthode consiste à substituer à une certaine série, aisément déduite de celle de Mercator, une autre série dont les premiers termes sont les mêmes, et dont la somme exacte représente une fraction rationnelle aisée à calculer.

La méthode inventée par Huyghens est restée inédite jusqu'à ces derniers temps. Dans les œuvres imprimées de l'illustre géomètre, il n'en est fait aucune mention,

---

(*) *Voir* aussi les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. VII, p. 32; juillet 1868.

mais, chose singulière, on en trouve une autre fort différente de la sienne, dont Huyghens a accru la célébrité en critiquant très-justement l'une des assertions de son très-ingénieux et très-savant inventeur, Jacques Grégory. Les éditeurs des œuvres d'Huyghens ont inséré en entier, dans le second des quatre volumes qu'ils ont publiés, le Mémoire de Grégory, fondé sur la remarque, faite pour la première fois par Grégoire Saint-Vincent, de l'identité de la recherche d'un logarithme népérien avec le calcul d'une aire hyperbolique; et, pour calculer ce segment, Grégory emploie la méthode même qui donne l'aire du segment du cercle, c'est-à-dire l'évaluation de polygones inscrits et circonscrits dont le nombre des côtés va sans cesse en doublant. Les formules, dans les deux cas, sont exactement les mêmes. Une première difficulté se présente au début, mais elle est bien vite écartée : les polygones considérés dans le cercle sont réguliers, et leurs propriétés s'en déduisent. Quels doivent être, dans l'hyperbole, les polygones correspondants pour que l'analogie soit conservée? Quand on passe du cercle à l'ellipse, la solution s'aperçoit aisément. Le polygone inscrit ou circonscrit à l'ellipse doit être la projection du polygone régulier inscrit ou circonscrit au cercle, et, pour cela, les triangles ayant pour sommet commun le centre de l'ellipse et pour bases les divers côtés, doivent être équivalents. Il en est de même des polygones considérés par Grégory, inscrits ou circonscrits à un arc d'hyperbole. Les triangles dont leurs côtés sont les bases et dont les sommets sont au centre doivent être équivalents. La relation entre l'aire des polygones inscrits et circonscrits à un secteur hyperbolique et celles des polygones d'un nombre de côtés double sont alors les mêmes que pour le secteur circulaire, et le calcul de la surface d'un secteur hyperbolique devient par là extrêmement facile.

Après avoir ainsi choisi le procédé de calcul, Grégory aperçut aussitôt que certains secteurs, pour être obtenus avec une approximation donnée, exigent moins de calculs que d'autres, et, si l'on veut parler des logarithmes qu'il faut connaître, que ceux des nombres voisins de l'unité sont les plus faciles à obtenir. Le parti qu'il tire de cette remarque est fort ingénieux. Après avoir calculé à vingt-six décimales le logarithme népérien de 10, il veut ensuite obtenir ceux des nombres premiers inférieurs à 100, et, comme il les obtient par ordre en commençant par le plus petit, $\log 2$, il suffit évidemment, pour obtenir $\log p$, de trouver une fraction $\frac{a}{b}$, peu différente de l'unité et telle que, p étant l'un des facteurs des nombres a ou b premiers entre eux, les autres soient tous moindres que p. On a, par exemple,

$$664848 = 7 \times 13 \times 2^5 \times 3^6,$$
$$664849 = 31 \times 47^2,$$

et par conséquent

$$\log \frac{664849}{664848} = \log 31 + 2 \log 47 - \log 7 - \log 13 - 5 \log 2 - 6 \log 3,$$

et, le premier membre se calculant, on en déduira le logarithme de 47, lorsque ceux des nombres premiers inférieurs seront connus.

Les nombres auxiliaires dont Grégory fait usage pour calculer le logarithme de 2 et celui de 3 (celui de 10 étant connu) sont

$$1000 = 2^3 \times 5^3,$$
$$1024 = 2^{10},$$
$$32805 = 5 \times 3^8,$$
$$32768 = 2^{15}.$$

Les fractions $\frac{1024}{1000}$ et $\frac{32805}{32768}$ diffèrent notablement de l'unité, mais toutes celles qu'il considère ensuite s'en rapprochent bien davantage, et la différence entre les deux termes, qui grandissent rapidement, est toujours d'une seule unité. On a, par exemple,

$$\begin{aligned}
2400 &= 3 \times 2^5 \times 5^2,\\
2401 &= 7^4,\\
9800 &= 2^3 \times 5^2 \times 7^2,\\
9801 &= 11 \times 3^4,\\
123200 &= 7 \times 11 \times 5^2 \times 2^6,\\
123201 &= 13^2 \times 3^6.
\end{aligned}$$

Le premier groupe servira à calculer le logarithme de 7, le second celui de 11, et le troisième celui de 13.

Les logarithmes des nombres inférieurs à 100 étant connus, pour obtenir les suivants, Grégory considère la formule

$$\frac{(a+1)(a-1)^3}{(a-2)a^3}.$$

Le numérateur et le dénominateur ont au moins les six premiers chiffres communs, elle diffère donc fort peu de l'unité, et son logarithme, étant connu, permettra de calculer $\log a$, au moyen des logarithmes qui le précèdent, car les facteurs de $a+1$, a étant impair, sont nécessairement moindres que a. Si, par exemple, on fait $a = 641$, la fraction est égale à

$$1 + \frac{1281}{168296446719}.$$

Elle est de celles pour lesquelles un seul terme de la formule donne, pour le logarithme, plus de douze décimales exactes.

D'après cet exposé, tout lecteur attentif comprendra l'exactitude de la méthode de Grégory. Huyghens aussi ne l'a pas contestée, et la critique qu'il lui oppose porte sur un autre point. Le calcul successif des polygones peut être poussé aussi loin qu'on veut, et l'approximation qu'on en peut déduire n'a aucune limite. Mais pourrait-on obtenir le résultat exact et rigoureux? Peut-on, en un mot, assigner la limite vers laquelle converge cette suite indéfinie d'expressions que Grégory enseigne à former? Les deux premières étant A et B, celles qu'on en déduit A′ et B′, sont données par les équations

$$A' = \sqrt{AB},$$
$$B' = \frac{2AB}{A + \sqrt{AB}}.$$

Pour prouver qu'il est impossible d'assigner analytiquement la limite vers laquelle convergent les quantités ainsi calculées, Grégory fait le raisonnement suivant : Si cette limite existe, elle doit être une fonction déterminée de A et de B; nous écririons aujourd'hui $\varphi(A, B)$; mais on aurait pu prendre pour valeur initiale A′ et B′; la limite aurait été $\varphi(A', B')$; on doit donc avoir

$$\varphi(A,B) = \varphi(A',B').$$

Cela est parfaitement exact, mais le géomètre anglais affirme à tort, ou tout au moins sans preuve suffisante, que cette équation est impossible. Posons, dit-il,

$$(k) \qquad \begin{cases} A = a^3 + a^2 b, \\ B = ab^2 + b^3, \end{cases}$$

on en déduira

$$(h) \qquad \begin{cases} A' = ab(a + b), \\ B' = 2ab^2, \end{cases}$$

et il affirme qu'aucune fonction algébrique de $a^3 + a^2 b$

et de $ab^2 + b^3$ ne peut rester invariable quand on y remplace les deux binômes par les expressions (h). La preuve de Grégory est exposée en termes douteux et enveloppés, qui doivent tout d'abord la rendre suspecte. Il n'a pas le droit, d'ailleurs, de choisir arbitrairement A et B. A doit être un polygone inscrit et B le polygone circonscrit correspondant. Par conséquent, l'impossibilité de trouver une limite dans le cas qu'il a choisi n'entraînerait nullement la conséquence relative au cas dont on doit s'occuper. Il est singulier que Montucla, éclairé par la critique précise et ferme d'Huyghens, n'ait pas démêlé l'erreur de Grégory sous la subtilité apparente de sa polémique; le jugement qu'il en porte marque, en effet, un embarras que le géomètre ne doit pas connaître : « Les géomètres, dit-il, ne me paraissent pas avoir prononcé sur cette contestation, et, quoique je sois porté à regarder la démonstration de Grégory comme concluante, je les imiterai. »

On me pardonnera de revenir sur des travaux si anciens, fort oubliés, il est vrai, aujourd'hui, mais qui se trouvent dans toutes les bibliothèques. Leur souvenir chez moi est lié à celui de Thoman, qui les admirait et en parlait souvent. Il était bon juge sur les questions de ce genre, comme sur toutes celles qu'il avait étudiées à fond; le nombre en était grand; sur les autres il se taisait systématiquement : *Je ne saurais vous le dire* était la réponse la plus habituelle de ce curieux infatigable, dont les études profondes et variées n'ont cessé qu'avec la vie, et dont la mémoire, sans cesse exercée, était la plus sûre peut-être et la plus solidement nourrie qu'il m'ait été donné de consulter.

J. Bertrand.

SUR LA RÉSOLUTION TRIGONOMÉTRIQUE DE L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ ;

Par M. A. DE SAINT-GERMAIN.

Un des procédés les plus simples pour le calcul logarithmique des racines de l'équation du troisième degré, quand elles sont toutes réelles, est fourni par la comparaison de l'équation proposée avec celle qui donne $\cos\frac{1}{3}a$ en fonction de $\cos a$. Je veux faire remarquer que la même méthode conduit aux formules employées ordinairement pour le calcul logarithmique des racines quand deux d'entre elles sont imaginaires. Seulement nous aurons à employer des arcs imaginaires, dont le cosinus se définira, en vertu de l'équation d'Euler, par l'identité

$$\cos u = \frac{e^{ui} + e^{-ui}}{2}.$$

Comme on a d'ailleurs, quels que soient s et t,

$$e^s e^t = e^{s+t},$$

la combinaison de ces deux formules donne

$$\begin{aligned}\cos(s+ti) &= \tfrac{1}{2}\left(e^{si-t} + e^{-si+t}\right)\\ &= \tfrac{1}{2}\left[e^{-t}(\cos s + i\sin s) + e^{t}(\cos s - i\sin s)\right],\end{aligned}$$

ou

$$(1)\qquad \cos(s+ti) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}\cos s - i\,\frac{e^t - e^{-t}}{2}\sin s.$$

Soit l'équation

$$x^3 + px + q = 0.$$

Nous savons que l'équation

$$(2) \qquad x^3 - \tfrac{3}{4}\lambda^2 x - \tfrac{1}{4}\lambda^3 \cos a = 0$$

admet pour racines

$$(3) \quad x_1 = \lambda \cos\frac{a}{3}, \quad x_2 = \lambda \cos\frac{2\pi + a}{3}, \quad x_3 = \lambda \cos\frac{4\pi + a}{3}.$$

Si donc on identifie l'équation proposée avec (2), elle aura les mêmes racines qui nous sont connues, et nous pourrons les calculer par logarithmes. Il suffit pour cette identification de prendre

$$(4) \qquad \lambda = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}, \quad \cos a = \frac{3q}{2p\sqrt{\frac{-p}{3}}};$$

λ et a ne seront réels que si les trois racines de la proposée le sont elles-mêmes.

Dans le cas d'une seule racine réelle, on remarquera que les sinus et cosinus des arcs imaginaires satisfaisant aux équations ordinaires de la Trigonométrie, on peut dire que l'équation (2) admet toujours les racines (3), quels que soient λ et a. En ne s'astreignant plus à les prendre réels, l'identification précédente reste possible, et les racines de la proposée ont toujours la forme (3); mais nous devons les expliciter, et pour cela distinguer deux cas, suivant le signe de p.

Soit $p < 0$, mais $4p^3 + 27q^2 > 0$. Les équations de condition (4) donnent pour λ et $\cos a$ des valeurs réelles; mais cette dernière plus grande que l'unité. On devra donc prendre a de la forme $s + ti$, et en vertu de l'égalité (1), la seconde condition (4) donnera

$$(5) \quad 2\cos a = (e^t + e^{-t})\cos s - i(e^t - e^{-t})\sin s = \frac{3q}{p\sqrt{-\frac{p}{3}}}.$$

Le second membre étant réel, le coefficient de i dans le premier doit s'annuler, ce qui exige ou $e^t = e^{-t}$, ou $\sin s = 0$. La première hypothèse donne $t = 0$, a réel, ce qui est inadmissible; il faut donc vérifier la seconde condition, et il suffit de prendre $s = 0$. L'équatiou (5) devient alors

$$e^t + e^{-t} = \frac{3q}{2p\sqrt{-\frac{p}{3}}}.$$

Soit 3α l'une des deux racines réelles de cette équation, qu'on peut résoudre par logarithmes en posant

$$e^t = \cot\varphi, \quad e^{-t} = \operatorname{tang}\varphi, \quad e^t + e^{-t} = \frac{2}{\sin 2\varphi}.$$

Les racines de l'équation proposée, qui ont toujours la forme (4), sont, eu égard à l'égalité (1),

$$x_1 = \lambda\cos\frac{a}{3} = \lambda\cos\alpha i = \sqrt{-\frac{p}{3}}(e^\alpha + e^{-\alpha}) = \sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\sqrt[3]{\cot\varphi} + \sqrt[3]{\operatorname{tang}\varphi}\right),$$

$$x_2 = \lambda\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha i\right) = \sqrt{-\frac{p}{3}}\left[-\frac{1}{2}(e^\alpha + e^{-\alpha}) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(e^\alpha - e^{-\alpha})\right],$$

$$x_3 = \lambda\cos\left(\frac{4\pi}{3} + \alpha i\right) = \sqrt{-\frac{p}{3}}\left[-\frac{1}{2}(e^\alpha + e^{-\alpha}) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(e^\alpha - e^{-\alpha})\right].$$

On sait rendre ces formules calculables par logarithmes en posant

$$e^\alpha = \sqrt[3]{\cot\varphi} = \cot\theta,$$

et on retrouve le calcul connu, pour la première racine, qui est réelle, et les deux autres imaginaires.

Dans le cas où p est positif, les conditions (4) donnent pour λ et $\cos a$ des valeurs imaginaires, sans partie réelle; l'angle a se déterminera encore par l'équation (5); mais ici c'est la partie réelle du premier membre qui doit disparaître, et il suffit pour cela de poser $s = \frac{\pi}{2}$. Si on introduit le même angle φ que précédemment, l'équation (5) devient

$$e^t - e^{-t} = 2\cot 2\varphi = \frac{3q}{p\sqrt{\frac{p}{3}}}.$$

Désignons encore par 3α la racine réelle de cette équation, ce qui donne

$$a = \frac{\pi}{2} + 3\alpha i,$$

les racines de la proposée seront

$$x_1 = \lambda \cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha i\right) = \sqrt{\frac{p}{3}}\left[i\frac{\sqrt{3}}{2}(e^\alpha + e^{-\alpha}) + \frac{1}{2}(e^\alpha - e^{-\alpha})\right],$$

$$x_2 = \lambda \cos\left(\frac{5\pi}{6} + \alpha i\right) = \sqrt{\frac{p}{3}}\left[-i\frac{\sqrt{3}}{2}(e^\alpha + e^{-\alpha}) + \frac{1}{2}(e^\alpha - e^{-\alpha})\right],$$

$$x_3 = \lambda \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha i\right) = \sqrt{\frac{p}{3}}(e^{-\alpha} - e^\alpha) = -\sqrt{\frac{p}{3}}\left(\sqrt[3]{\cot\varphi} - \sqrt[3]{\operatorname{tang}\varphi}\right).$$

On saura encore rendre ces formules calculables par logarithmes, et la troisième racine se présentera seule comme réelle.

PROPRIÉTÉS FOCALES DES FIGURES HOMOGRAPHIQUES.

(Extrait d'un Rapport présenté à la Société royale de Londres par M. Henry-J. Stephen Smith, professeur à l'Université d'Oxford.)

I. *Définition du foyer dans les figures homographiques.* — Lorsque deux figures planes (Ω, ω) sont en perspective, S étant le centre de perspective, $\Omega_1\omega_1$ l'axe de perspective, nous savons qu'il existe dans chacune des figures une droite qui a sa perspective sur l'autre plan à l'infini ; nous appellerons ces deux lignes les *lignes évanouissantes* des deux figures. Ces lignes partagent les deux plans en deux régions. Je les appellerai (Ω_1), (Ω_2) et (ω_1), (ω_2). Je suppose que (Ω_1) soit la région de Ω où se trouve $\Omega_1 \omega_1$; alors cette ligne sera également située dans (ω_1) ; on pourra voir alors que, si P, p sont des points correspondants de (Ω_1) et (ω_1), les rayons SP, sp sont de même signe, tandis que, si P et p sont des points correspondants de (Ω_2) et de (ω_2), les rayons SP, sp sont de signes contraires.

Lorsque les directions positive et négative d'une ligne droite dans l'un des plans Ω et ω sont déterminées, il en est de même des directions correspondantes de la ligne perspective, c'est-à-dire que, si un point se meut dans la direction positive d'une droite sur un des plans, son image sur l'autre plan se meut dans la direction positive correspondante de l'autre plan. Si, par suite, P, Q sont deux points de la même région de Ω, et p, q leurs images, qui sont nécessairement dans la région correspondante de ω, la direction de P à Q le long du segment *fini* PQ est de même signe que la direction de p à q le long du segment *fini* pq. Mais si P, Q sont dans des régions opposées de Ω, de sorte que le segment *fini* PQ est rencontré intérieurement par la ligne évanouissante de Ω au point A, la direction $p \infty q$ correspond à la direction PAQ, et les directions des segments *finis* PQ, pq sont de signes contraires. Si A est un point quelconque de la ligne évanouissante de Ω, aux lignes PA et QA devront correspondre des directions semblables ou dissemblables de deux droites parallèles, images de PA et QA, suivant que P et Q sont dans la même région ou dans des régions différentes de Ω.

De plus, si dans le plan Ω on considère une des deux directions de rotation autour d'un point comme positive (par exemple celle qui, vue du point S, paraît se diriger vers la droite), les signes des directions correspondantes de rotation dans ω seront déterminés. Mais la direction qui paraît se diriger sur la droite sera positive dans (ω_1) et négative dans (ω_2).

Par le point S passent deux droites perpendiculaires aux plans bissecteurs de l'angle dièdre formé par les plans qui se coupent, Ω et ω. Supposons que ces lignes coupent le plan Ω en F_1, F_2, et le plan ω en f_1, f_2. Supposons que f_2SF_2 soit perpendiculaire au plan qui se trouve dans le même angle dièdre que S. Alors SF_1, Sf_1 sont de même signe, et F_1, f_1 sont respectivement dans les régions (Ω_1) et (ω_1), tandis que SF_2, Sf_2 étant de signes contraires, F_2 et f_2 sont dans les régions (Ω_2) et (ω_2). La propriété fondamentale de ces points est la suivante :

Les angles qui ont leurs sommets en F_1 *ou* F_2, *et sont dans le plan* Ω, *sont projetés sur le plan* ω *suivant des angles égaux dont les sommets sont* f_1 *ou* f_2, ou, en précisant davantage :

L'angle formé par des directions données de deux droites de Ω, *se coupant en* F_1 *ou* F_2, *est égal à l'angle formé par les directions correspondantes des droites correspondantes de* ω, *se coupant en* f_1 *ou* f_2.

Ce sont précisément ces points F_1, F_2, f_1, f_2 que l'auteur appelle les *foyers* de perspective sur les deux plans respectifs Ω, ω. Les directions de rotation, vues du point S, étant les mêmes pour les points F_1 et f_1, tandis qu'elles sont opposées autour de F_2 et f_2, les foyers F_1 et f_1 seront appelés *semblables*, tandis que les foyers F_2, f_2 seront *dissemblables*.

II. *Lignes équisegmentaires.* — Tout point de Ω_1 ω_1 étant à lui-même sa perspective, on peut dire, en ne faisant pas attention à la coïncidence de ces points, que

$\Omega_1 \omega_1$ est un axe *équisegmentaire*, c'est-à-dire qu'à tout segment de $\Omega_1 \omega_1$, considéré comme appartenant au premier plan, correspond un segment égal dans l'autre plan. Mais il y a aussi un second système de lignes équisegmentaires qui ne coïncident pas. En effet, menons par le point S un plan parallèle au plan qui contient les deux lignes évanouissantes, ce plan coupe le plan des deux figures suivant des lignes $\omega_2 y$, $\Omega_2 Y$, qui sont des lignes équisegmentaires; mais ici ces lignes sont dissemblables, la ligne $\Omega_1 \omega_1$ représentant les axes semblables.

Lorsque l'on fait tourner l'un des plans, par exemple ω, autour de l'axe de perspective, on sait que les figures restent en perspective, et que le point S décrit un cercle situé dans le plan de symétrie et décrit sur $F_2 F_1$ comme diamètre. Si l'on fait tourner l'un des plans, par exemple ω, autour d'un axe perpendiculaire au plan $\Omega_2 \omega_2$ et mené par S, après une rotation de 180 degrés, les deux figures sont encore en perspective, mais les foyers, qui d'abord étaient semblables, deviendront dissemblables et *vice versâ*. Il en sera de même des axes équisegmentaires. On ne peut donc pas distinguer d'une manière absolue les foyers en semblables ou dissemblables. Nous dirons seulement que, si un foyer est semblable à un autre, l'axe le plus voisin est semblable à l'axe le plus voisin de l'autre foyer, et inversement.

C'est en partant de ces définitions que l'auteur a établi toute la théorie des propriétés focales des figures homographiques, tant planes que dans l'espace. Ces propriétés sont très-curieuses à étudier et pourront certainement ouvrir une nouvelle voie aux investigations. Si nous prenons les titres de quelques chapitres, par exemple, nous trouvons ceux-ci :

11. *Angles changés en angles égaux ou supplémentaires ;*

12. *Segments changés en segments égaux;*

14. *Indicatrice, ou ellipse génératrice*, etc.

De plus, l'auteur nous présente, à la fin de son ouvrage, une note historique relative à la question, note que nous allons reproduire ici.

« L'existence de deux couples d'axes équisegmentaires parallèles dans deux figures homographiques était établie par M. Möbius en 1827 (*Barycentrische Calcul*, p. 320, sect. 230). M. Möbius a montré aussi que, si les points correspondants de deux axes équisegmentaires coïncident sur la ligne d'intersection des deux plans homographiques, ces plans sont en perspective. Magnus (*Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie;* Berlin, 1833; p. 41, sect. 12) a prouvé que, dans deux figures planes homographiques, il existe un couple de points correspondants pour lesquels les faisceaux correspondants sont équiangulaires, et que, si les figures sont placées dans un même plan, avec ces *centres de collinéation* coïncidant, et que chacune d'elles tourne dans son propre plan autour du centre de collinéation, elle deviendra homologique à l'autre dans deux positions diamétralement opposées. Dans l'une de ces positions, une paire d'axes équisegmentaires coïncideront, tandis que, dans l'autre position, ce sera l'autre paire. Magnus dit expressément que « de deux systèmes placés collinéai-
» rement (c'est-à-dire deux figures planes dont les lignes
» de l'infini ne coïncident pas), chacun a, en général, un
» seul centre de collinéation. » Comme Magnus suppose tacitement que les figures ne sont pas dans une position quelconque relativement l'une à l'autre, mais sont déjà placées dans le même plan, ce rapport n'est pas erroné; mais ce n'est qu'une partie de la vérité, et l'analyse par laquelle Magnus obtient un centre de collinéation dans chaque figure, en fournira aussi une autre paire, si l'on

change le signe de la constante p dans les équations (1) de la page 42 (*loc. cit.*). Il est tout à fait vrai que, si les deux figures sont une fois placées dans le même plan, il y a seulement un point de chacune qui peut être considéré comme centre de collinéation. Et ce fait, que Magnus a prouvé analytiquement, M. Salmon l'a aussi reconnu géométriquement (*Higher plane Curves*, art. 230, p. 246). Mais il faut se rappeler que deux plans peuvent être placés en coïncidence de deux manières différentes, suivant qu'ils sont placés face à face ou faisant le même lieu, et que, dans l'une de ces positions de coïncidence, l'un des couples de foyers donne les centres de collinéation, tandis que c'est l'autre couple dans la seconde position. Il est utile d'ajouter que, tandis que, comme l'a observé M. Salmon, la position des points circulaires à l'infini n'est pas altérée par un mouvement de translation ou de rotation d'une figure plane dans son propre plan, ces deux points imaginaires sont intervertis, si la figure tourne d'un angle de 180 degrés autour d'un axe situé dans son plan. Et le changement du centre de collinéation, qui arrive lorsque l'une des figures homographiques dont les plans coïncident a ainsi tourné, est une conséquence nécessaire de la permutation des points circulaires imaginaires de la figure tournée.

» Dans le *Traité de Géométrie supérieure*, un seul couple d'axes équisegmentaires et un seul couple de foyers est expressément mentionné; mais l'omission est purement accidentelle, car les méthodes par lesquelles on obtient ces figures fournissent également l'autre couple. Le théorème qui dit que, si deux plans sont en perspective, les foyers sont les points où ils sont percés par des perpendiculaires abaissées du centre de perspective sur les plans bissecteurs des angles des deux plans est une conséquence immédiate d'un principe, d'abord énoncé par

M. Chasles (*Aperçu de l'Histoire des méthodes en Géométrie,* Note IV) et plus tard employé par M. Mulcahy (*Principles of modern Geometry,* cap. VIII, art. 115). »

Après la communication de cette Note à la Société mathématique de Londres, mais (il n'est pas nécessaire de le dire) tout à fait en dehors de cette Note, trois Mémoires ont paru, en partie relatifs au même sujet : I. Dans le numéro de mai 1869 des *Nouvelles Annales de Mathématiques,* M. Abel Transon obtient le théorème des deux couples de foyers par l'application d'une méthode analytique très-générale ; il décrit exactement la similitude et la dissimilitude des foyers et parle du théorème lui-même comme de « une propriété de l'homographie qui n'avait peut-être pas encore été remarquée ». — II. M. Richelot, de Königsberg, dans une Note datée du 29 octobre 1868, et publiée dans la seconde partie du 70ᵉ volume du *Journal de Crelle,* a considéré la théorie analytique des figures homographiques dans l'espace et a été conduit à la considération de leurs propriétés focales. Il semblerait cependant que M. Richelot suppose que les tangentes aux coniques focales sont les seuls axes des faisceaux équiangulaires de plans, tandis que, comme nous l'avons montré, cette propriété existe pour toute génératrice d'un hyperboloïde confocal. La cause de la méprise (si c'en est une) se trouve dans les expressions : « *Es muss, in der That, eine Axe im obigen Sinne* (c'est-à-dire, si nous comprenons bien M. Richelot, une ligne qui est l'axe d'un faisceau de plans équiangulaires avec le faisceau correspondant) *die Eigenschaft besitzen, dass unter den unendlich vielen auf ihr senkrechten Ebenen eine existirt, deren entsprechende Ebene auf der der Axe entsprechenden Geraden senkrecht steht* (p. 141). Cette propriété n'est cependant pas possédée par tout axe d'un faisceau de plans équiangulaire avec le faisceau correspondant, mais seulement par ceux qui sont dans l'un des plans principaux. M. Richelot parle d'un travail prêt à paraître d'un de ses élèves, M. Mägis, comme devant contenir une théorie complète de l'homographie dans l'espace. — III. Dans le numéro de novembre 1869 des *Nouvelles Annales de Mathématiques,* M. Housel énonce ce théorème : *En déplaçant sans déformation deux figures homographiques dans l'espace, on peut les rendre homologiques.* Ce théorème n'est pas d'accord avec l'art. 50 de la présente Note, puisque dans cet article on a démontré que les plans équisegmentaires correspondants ne sont pas superposables, excepté dans le cas de l'homographie sphéroïdale. Mais l'analyse de M. Housel semble insuffisante pour établir cette conclusion, puisqu'il n'est pas démontré que les valeurs obtenues en dernier lieu des dix inconnues de l'article XIII du Mémoire de M. Housel satisfont aux douze équations de cet article (les valeurs des inconnues ne sont pas données sous forme explicite, et il y en a seulement dix, et non pas onze, parce que p dépend de X, Y, Z). Et la conclusion, considérée en elle-même, est inadmissible, car une transformation homologique de l'espace doit changer le cercle imaginaire, suivant lequel toutes les sphères se coupent en un cercle, tandis que, en général, ce cercle est changé en une ellipse imaginaire par la transformation homographique. Ensuite, la relation homographique dépend de quinze constantes, la relation homologique de sept, et les six constantes de déplacement peuvent seulement réduire les quinze constantes à neuf. Ainsi, il semblerait *à priori* que deux conditions doivent être satisfaites, lorsque deux espaces homographiques seraient capables d'une position homologique, et l'équation $A = B$ (ou $a = b$) de l'art. 50 est équivalente à deux rotations indépendantes entre les quinze constantes de l'homographie, puisque cette équation est équivalente aux deux conditions nécessaires pour qu'une certaine conique devienne un cercle.

SUR LE DÉVELOPPEMENT DU BINOME;

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

I.

THÉORÈME. — *La somme des p premiers coefficients de $(a-b)^m$ est égale au $p^{ième}$ coefficient de $(a-b)^{m-1}$.*

Supposons ce théorème vrai pour la somme des $p-1$ premiers coefficients de $(a-b)^m$; en désignant par C_m^n le nombre des combinaisons simples de m objets n à n et convenant de regarder C_m^0 comme égal à l'unité, nous aurons

$$\sum_{n=0}^{n=p-2} (-1)^n C_m^n = (-1)^{p-2} C_{m-1}^{p-2}.$$

Ajoutons aux deux membres de cette égalité le $p^{ième}$ coefficient de $(a-b)^m$; nous trouvons

$$(-1)^{p-1} C_m^{p-1} + \sum_{n=0}^{n=p-2} (-1)^n C_m^n = (-1)^{p-2} C_{m-1}^{p-2} + (-1)^{p-1} C_m^{p-1},$$

ou bien

$$\sum_{n=0}^{n=p-1} (-1)^n C_m^n = (-1)^{p-1}\left(-C_{m-1}^{p-2} + C_m^{p-1}\right);$$

or

$$-C_{m-1}^{p-2} + C_m^{p-1} = C_{m-1}^{p-1};$$

donc

$$\sum_{n=0}^{n=p-1} (-1)^n C_m^n = (-1)^{p-1} C_{m-1}^{p-1}.$$

On voit ainsi que, si le théorème est vrai pour la somme des $p-1$ premiers coefficients de $(a-b)^m$, il l'est encore pour la somme des p premiers coefficients. Nous achèverons donc la démonstration si nous faisons remarquer que ce théorème est vrai, évidemment, pour le premier coefficient, ainsi que pour la somme des deux premiers.

Remarque. — La démonstration précédente ne s'étend pas au cas où l'on prendrait tous les coefficients de $(a-b)^m$; mais, alors encore, on peut dire que le théorème subsiste. Dans ce cas, en effet, on prend la somme des $m+1$ premiers coefficients de $(a-b)^m$, somme qui est zéro; et le $(m+1)^{\text{ième}}$ coefficient de $(a-b)^{m-1}$, lequel n'existe pas, peut être regardé comme égal à zéro.

II.

Théorème. — *Si m est un nombre premier, la somme $(-1)^p C_{m-1}^p - 1$ est, quel que soit p, divisible par m.*

D'après le théorème précédent, nous avons, en effet,

$$(-1)^p C_{m-1}^p - 1 = -C_m^1 + C_m^2 - C_m^3 + \ldots + (-1)^p C_m^p.$$

Or, p ne dépassant pas $m-1$, tous les termes du second membre sont divisibles par m, si m est premier. Le premier membre, dans ce cas, est donc aussi divisible par m.

C. Q. F. D.

Remarque. — On peut évidemment, dans l'énoncé de ce dernier théorème, remplacer $(-1)^p C_{m-1}^p - 1$ par $C_{m-1}^p - (-1)^p$.

III.

Théorème. — *m étant un nombre premier, si l'on écrit les coefficients de $(a+b)^{m-1}$, que l'on ajoute $+1$ à ceux de rang pair et -1 à ceux de rang impair, on obtient des nombres qui sont tous divisibles par m.*

Les nombres ainsi obtenus ne sont, en effet, autre chose que les valeurs numériques de l'expression $C_{m-1}^{p} - (-1)^{p}$, lorsqu'on y remplace p par les nombres 0, 1, 2,..., $(m-1)$.

Exemple. — Le nombre 11 est premier; les coefficients de $(a+b)^{10}$ sont

$$1,\quad 10,\quad 45,\quad 120,\quad 210,\quad 252,\quad 210,\quad \text{etc.};$$

en ajoutant $+1$ aux coefficients de rang pair, -1 à ceux de rang impair, on trouve les nombres

$$0,\quad 11,\quad 44,\quad 121,\quad 209,\quad 253,\quad 209,\quad \text{etc.},$$

qui sont tous divisibles par 11.

DÉMONSTRATION DE DEUX THÉORÈMES RELATIFS A UNE SURFACE DU SECOND DEGRE;

PAR FEU R. L. ELLIS.

(Traduit de l'anglais de *The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics.*)

M. Chasles a donné, dans son *Aperçu,* deux théorèmes correspondant dans les trois dimensions respectivement à ceux de Pascal et de Brianchon; les démonstrations suivantes déduisent ces théorèmes de M. Chasles des deux autres.

THÉORÈME I. — *Si les six arêtes d'un tétraèdre sont coupées chacune en deux points par une surface du second ordre, et que les douze points ainsi obtenus soient groupés trois à trois sur quatre plans opposés chacun à un sommet du tétraèdre, chaque plan coupe la face opposée du tétraèdre. Les quatre intersections* *sont des génératrices d'un hyperboloïde à une nappe, et font partie du même système.*

Démonstration.— Soient a, b, c, d les quatre sommets du tétraèdre; α, β, γ, δ les faces opposées du tétraèdre; α', β', γ', δ' les quatre plans mentionnés dans l'énoncé, α' étant opposé à α. Nous appellerons les lignes $\alpha\alpha'$ les *lignes de Chasles;* considérons le plan α. Par son intersection avec les plans β, γ, δ, β', γ', δ', il forme un hexagone auquel on peut appliquer le théorème de Pascal. Les traces de β, β',... sont donc sur une droite que l'on peut appeler la *droite de Pascal.* L'un de ces points est sur l'intersection des plans β, β'; l'autre sur l'intersection des plans γ, γ'; le troisième sur celle des plans δ, δ'. Par conséquent, cette ligne de Pascal coupe trois des lignes de Chasles. Elle coupe aussi la quatrième, puisque ces droites sont dans le même plan α. Il y a une ligne de Pascal sur chacune des faces du tétraèdre, et l'on a ainsi deux systèmes de quatre lignes, chacune de celles d'un système coupant toutes celles de l'autre.

Mais lorsqu'une ligne rencontre toujours trois droites, elle engendre un hyperboloïde à une nappe, et il est évident que les quatre lignes de Chasles sont des génératrices d'un même système.

Corollaire. — Les quatre lignes de Pascal sont des génératrices de la même surface et de l'autre système.

THÉORÈME II. — *Sur chaque face d'un tétraèdre comme base, on élève une pyramide triangulaire, et l'on joint le sommet de chaque pyramide au sommet opposé du tétraèdre. Si les douze faces des quatre pyramides sont tangentes à une même surface du second degré, les quatre lignes que nous avons menées sont des génératrices du même système d'un hyperboloïde à une nappe.*

Démonstration. — Considérons les six plans tangents qui passent par un même sommet du tétraèdre. Alors leurs six points de contact sont situés sur un même plan, que je trace. Son intersection avec les six plans donne un hexagone circonscrit à la conique. Par suite, les trois diagonales passent par un même point, qui est commun aux trois plans passant par le sommet que nous avons considéré, par un autre sommet du tétraèdre et le sommet de la pyramide opposée à ce dernier; et, comme ces plans ont deux points communs, ils ont une intersection commune qui, comme il est facile de le voir, rencontre les quatre lignes du théorème. Il est clair qu'il y a quatre lignes semblables, et, par conséquent, comme dans le premier théorème, on a deux séries de quatre lignes, chaque ligne d'une série coupant toutes les lignes de l'autre; donc les quatre lignes du théorème sont bien des génératrices du même système.

Corollaire. — Les quatre lignes menées d'un sommet du tétraèdre au point de Brianchon correspondant sont des génératrices de l'autre système.

Scolie. — Ces deux corollaires semblent sortir de la question, comme n'étant pas mentionnés par M. Chasles dans la démonstration qu'il a donnée de ces deux théorèmes. J'ajouterai une autre remarque qui saute aux yeux : c'est que, dans le premier théorème, l'hyperboloïde touche les quatre faces du tétraèdre. Le point de contact dans la face α est le point de rencontre des lignes de Pascal et de Chasles. Appelons ce point A''. On a alors le théorème suivant : AA'', BB'',... *sont des génératrices du même système d'un autre hyperboloïde.* La démonstration de ce théorème est si simple que je ne la donne pas ici.

Le théorème correspondant par rapport au second théorème de M. Chasles est le suivant : A, B, C, D *étant* *les sommets du tétraèdre*, A′, B′, C′, D′ *les sommets des pyramides correspondantes*, A″, B″, C″, D″ *les points correspondants de Brianchon, si* A′A *coupe le plan* α *en* A‴, *et* AA″ *en* A$^{\text{IV}}$, *les quatre lignes* A‴A$^{\text{IV}}$ *sont des génératrices du même système d'un hyperboloïde.* Le principe de ces deux théorèmes est le même.

L'hyperboloïde du premier théorème de M. Chasles étant une surface du second ordre, on peut l'appliquer au cas du second théorème, c'est-à-dire que le point A′ est sur le plan α, etc. De même, à l'hyperboloïde du second système peut être appliqué un cas particulier du premier. Il est évident que l'on pourrait ne pas s'arrêter ici; mais de l'idée primitive d'un tétraèdre dont les six arêtes sont coupées par une surface du second ordre, on peut déduire une infinité de systèmes de quatre lignes, qui sont les génératrices d'un hyperboloïde à une nappe.

NOTE SUR LES SOMMES DES PUISSANCES SEMBLABLES DES n PREMIERS NOMBRES ENTIERS;

PAR M. ÉDOUARD AMIGUES,
Professeur au lycée de Toulouse.

---

1. Dans le numéro du mois de février 1870, M. Édouard Lucas a indiqué un procédé tout à fait élémentaire pour trouver le carré de l'une de ces sommes en fonction des premières puissances de quelques autres. La marche à suivre consiste à disposer des nombres en carré d'une manière convenable, à faire la somme de ces nombres de deux manières différentes, et à égaler les résultats. Il est facile de voir que l'on peut de même trouver les troisièmes puissances de ces sommes en disposant convenablement des nombres en cube.

Nous désignerons par S_1 la somme des n premiers nombres entiers, par S_2 la somme de leurs carrés, par S_3 la somme de leurs cubes, etc.

Soit à trouver la troisième puissance de S_1.

On écrira sur une même ligne les n premiers nombres, puis au-dessous les nombres doubles, puis au-dessous les nombres triples, etc., jusqu'à ce qu'on ait un carré. On obtiendra ainsi une table de Pythagore qui sera la tranche inférieure de notre cube. Au-dessus de cette tranche, on en formera une autre en doublant les nombres de la tranche inférieure, puis encore une autre en triplant, etc., jusqu'à ce qu'on ait un cube.

La somme des nombres de la tranche inférieure est évidemment S_1^2, et la somme des nombres est par conséquent S_1^3.

Évaluons cette somme d'une autre manière. A l'un des sommets du cube se trouve le nombre n^3. Considérons les trois faces du cube qui se coupent en ce point, et cherchons la somme des nombres qu'elles contiennent. En faisant abstraction des trois arêtes qui se coupent en n^3, nous avons trois carrés identiques dont chacun contient

$$n\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^2 \text{ unités.}$$

D'autre part, chacune des trois arêtes négligées contient, abstraction faite du sommet n^3, un nombre d'unités égal à

$$n^2\frac{n(n-1)}{2}.$$

Il faut enfin tenir compte du sommet n^3; nous avons donc en tout, pour ces trois faces,

$$3n\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^2 + 3n^2\frac{n(n-1)}{2} + n^3 = \tfrac{3}{4}n^5 + \tfrac{1}{4}n^3.$$

Opérons sur le cube réduit qui reste, comme sur le précédent, et en continuant ainsi, nous trouvons, pour la somme des nombres disposés en cube,

$$\tfrac{3}{4}\,S_5 + \tfrac{1}{4}\,S_3,$$

donc nous avons l'identité

$$S_1^3 = \tfrac{3}{4}\,S_5 + \tfrac{1}{4}\,S_3.$$

Pour avoir S_2^3, il faudra écrire sur une même ligne les carrés des n premiers nombres, puis former les autres lignes en multipliant les nombres de la première successivement par

$$2^2,\quad 3^2,\quad 4^2,\quad \text{etc.}$$

Quant aux autres tranches, on les formera aussi en multipliant les nombres de la tranche inférieure successivement par 2^2, 3^2, 4^2, etc. Le nombre des unités de ce cube sera évidemment S_2^3.

On opérera de même pour S_3^3. Il est visible que la méthode est générale. Elle pourra même s'appliquer à de tout autres sommes que celles des puissances semblables des n premiers nombres entiers.

2. Le même procédé permet de trouver aisément S_2. Imaginons un cube formé exclusivement avec des unités, et supposons que l'arête en contienne $n+1$. Le nombre des unités de ce cube est $(n+1)^3$.

D'autre part, si nous considérons un sommet et les trois faces qui s'y coupent, nous voyons, comme dans le cas précédent, que le nombre des unités contenues dans ces trois faces est

$$3n^2 + 3n + 1.$$

En opérant de même sur les cubes réduits jusqu'à la fin, nous arrivons à cette conclusion, que le nombre des unités disposées en cube est

$$3S_2 + 3S_1 + (n+1);$$

donc

$$(n+1)^3 = 3S_2 + 3S_1 + (n+1).$$

Pour avoir S_1, considérons le carré qui sert de base à ce cube. Il contient $(n+1)^2$ unités; mais il est facile de voir que deux côtés consécutifs contiennent $2n+1$ unités. En opérant de même sur le carré réduit jusqu'à la fin, on trouve, pour la somme totale des unités,

$$(n+1)^2 = 2S_1 + (n+1).$$

De ces deux identités, on conclut

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. En disposant des unités simples en prisme triangulaire droit et équilatéral, on trouvera

$$S_1^2 = S_3.$$

Mais le lecteur reconnaîtra aisément que ce dernier procédé ne diffère pas au fond de celui qu'indique M. Lucas, et que même il lui est inférieur pour plusieurs motifs que l'on aperçoit sans peine.

SUR LA FORMULE D'INTERPOLLATION DE NEWTON;

PAR M. LUDVIG OPPERMANN.

Newton, dans un lemme célèbre (*Princ. Nat. Math.*, lib. III, lemma V), a proposé et résolu le problème fondamental de l'interpolation par les différences finies, et par là, pour ne rien dire de trop, il a posé le fondement de la théorie des différences.

Dans le *Methodus differentialis,* imprimé en 1715, il traite le même sujet plus au long; mais, après un minutieux examen, je crois que ce petit traité a été écrit bien des années avant le lemme en question, qui porte toute l'apparence d'être le fruit mûri de ses recherches sur cette matière. A un autre point de vue, le *Methodus differentialis* a un grand intérêt par lui-même, car il montre comment il a traité de tels problèmes en commençant d'une manière toute directe et tout élémentaire; puis, après avoir surmonté les premières difficultés, il avance si rapidement et à si grands pas, qu'une attention médiocre ne suffit pas pour le suivre.

La solution du problème est certainement aussi générale, aussi élégante et aussi simple qu'on devait l'attendre du « *summus* (*) » Newton; mais, hélas! il ne l'a pas prouvée. C'est du moins ce que nous disent ses commentateurs, et parmi eux se trouvent des hommes d'un grand savoir et d'un génie élevé; Stirling lui-même exprime l'opinion que Newton n'a pas choisi la meilleure manière de traiter le problème. Néanmoins je suis porté nonseulement à croire que le procédé de Newton est le plus facile et le meilleur, mais même à supposer qu'il a regardé sa solution comme presque évidente par elle-même; du moins la démonstration, quand on l'entreprend d'une manière juste, est bien facile, comme nous l'allons voir.

Au lieu de donner une copie du texte latin, ou une traduction littérale du lemme en question, j'ai préféré en donner une sorte de paraphrase. Voici les seules modifications que j'ai faites :

(*) C'est par cette *epitheton ornans* que Gauss a distingué Newton, et qu'il n'a, que je sache, donnée à aucun autre.

1° J'ai omis le premier cas (argument équidistant) comme étant seulement spécial; 2° au lieu du langage et de la notation géométriques de Newton, j'ai employé les expressions analytiques aujourd'hui communément usitées, et une notation dans laquelle les arguments sont marqués par de petites lettres, les valeurs correspondantes des fonctions par des capitales, et les « différences divisées » par un δ avec des accents indiquant leur ordre, et suivi par des lettres (entre parenthèses) indiquant les arguments dont dépend la différence. J'espère qu'on trouvera ces modifications peu importantes quant au sens, et de quelque aide pour le lecteur. Voici donc la paraphrase :

Lemme V. — D'une fonction inconnue, nous connaissons $n+1$ valeurs, A, B, C, D, E,... correspondantes aux arguments a, b, c, d, e,...; supposons qu'on exige de représenter ces valeurs par une fonction algébrique entière et rationnelle, de façon que nous puissions, pour chaque argument, calculer directement la valeur correspondante X de la fonction algébrique en question.

Solution. — Formez le système complet des différences divisées de la manière suivante :

$$\begin{array}{llllll}
a & A & & & & \\
 & & \delta'(a,b) & & & \\
b & & & \delta''(a,b,c) & & \\
 & & \delta'(b,c) & & \delta'''(a,b,c,d) & \\
c & C & & \delta''(b,c,d) & & \delta^{\text{IV}}(a,b,c,d,e). \\
 & & \delta'(c,d) & & \delta'''(b,c,d,e) & \\
d & D & & \delta''(c,d,e) & & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
 & & \delta'(d,e) & & \ldots\ldots\ldots & \\
e & E & & \ldots\ldots & & \\
 & & \ldots\ldots & & & \\
. & . & & & &
\end{array}$$

On trouve les différences divisées, les premières en divisant la différence de deux valeurs subséquentes de la fonction par la différence des arguments correspondants

$$\delta'(a,b) = \frac{A-B}{a-b}, \quad \delta'(b,c) = \frac{B-C}{b-c}, \ldots$$

On trouve les différences divisées d'un ordre plus élevé quelconque en divisant la différence de deux différences subséquentes par la différence des deux arguments, qui ne sont pas communs aux deux différences en question; ainsi

$$\delta''(a, b, c) = \frac{\delta'(a, b) - \delta'(b, c)}{a - c},$$

$$\delta''(b, c, d) = \frac{\delta'(b, c) - \delta'(c, d)}{b - d},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\delta'''(a, b, c, d) = \frac{\delta''(a, b, c) - \delta''(b, c, d)}{a - d},$$

$$\delta'''(b, c, d, e) = \frac{\delta''(b, c, d) - \delta''(c, d, e)}{b - e},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

D'après cela, nous aurons

$$\begin{aligned} \mathrm{X} = \mathrm{A} &+ (x - a)\delta'(a, b) + (x - a)(x - b)\delta''(a, b, c) \\ &+ (x - a)(x - b)(x - c)\delta'''(a, b, c, d) \\ &+ (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)\delta^{\mathrm{IV}}(a, b, c, d, e) + \ldots . \end{aligned}$$

Avant de donner la démonstration, je pense utile (quoique peut-être il n'y ait pas de nécessité) d'appeler l'attention des lecteurs les plus jeunes vers les points suivants :

1° La manière dont nous effectuons la soustraction n'a aucune importance, en supposant seulement que la manière soit la même pour le dividende et le diviseur

$$\frac{\mathrm{A} - \mathrm{B}}{a - b} = \frac{\mathrm{B} - \mathrm{A}}{b - a}.$$

2° Si par F on représente une fonction algébrique entière et finie d'un ou de plusieurs arguments, non-seulement $\mathrm{F}(p) - \mathrm{F}(q)$ est divisible par $(p - q)$ et le quotient est d'un degré moins élevé que celui de F; mais $F(p, r, s, t) - F(q, r, s, t)$ est aussi bien divisible par $(p - q)$ et le quotient d'un degré moins élevé que celui de F, ce qui est facilement démontré quand nous posons

$$F(p, r, s, t, \ldots) = k_0 + k_1 p + k_2 p^2 + k_3 p^3 + \ldots$$

et

$$F(q, r, s, t, \ldots) = k_0 + k_1 q + k_2 q^2 + k_3 q^3 + \ldots,$$

ce qui est toujours permis (k_0, k_1, k_2, $k_3, \ldots$ signifient des fonctions de $r, s, t, \ldots$).

3° On comprend alors que, comme A, B, C,... sont des fontions du $n^{ième}$ degré, les premières différences divisées sont du $(n-1)^{ième}$ degré, les secondes différences divisées du $(n-2)^{ième}$ degré, etc., jusqu'aux $n^{ièmes}$ différences divisées, qui sont du $(n-n)^{ième}$ degré, c'est-à-dire constantes, indépendantes des arguments. Il est évident que toutes les différences d'un degré encore plus élevé doivent disparaître.

Pour démontrer que la valeur assignée plus haut à X est correcte, il nous faut seulement écrire x, X et les diverses différences divisées au sommet du schéma donné ci-dessus; alors nous aurons

$$\delta'(x, a) = \frac{X - A}{x - a}, \quad \delta''(x, a, b) = \frac{\delta'(x, a) - \delta'(a, b)}{x - b},$$

$$\delta'''(x, a, b, c) = \frac{\delta''(x, a, b) - \delta''(a, b, c)}{x - c}, \ldots.$$

On a donc

$$X = A + (x - a)\delta'(x, a),$$

$$\delta'(x, a) = \delta'(a, b) + (x - b)\delta''(x, a, b),$$

$$\delta''(x, a, b) = \delta''(a, b, c) + (x - c)\delta'''(x, a, b, c), \ldots,$$

jusqu'à

$$\delta^{(n)}(x, a, b, c, \ldots) = \delta^{(n)}(a, b, c, d, \ldots),$$

et par substitution

$$X = A + (x-a)\delta'(a,b) + (x-a)(x-b)\delta''(a,b,c)$$
$$+ (x-a)(x-b)(x-c)\delta'''(a,b,c,d)$$
$$+ (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\delta^{\text{IV}}(a,b,c,d,e) + \ldots.$$

REMARQUES SUR LES RACINES CARRÉES ET CUBIQUES;

PAR M. FITREMANN,
Professeur à Sainte-Barbe.

Je trouve dans l'*Arithmétique* de M. Serret, 1re édition, p. 209 et 225, les énoncés suivants :

1° *Quand on a déterminé un ou plusieurs chiffres de la racine carrée d'un entier, et qu'on se propose de trouver le chiffre suivant, on effectue une division dont le quotient est le chiffre cherché ou un chiffre trop fort. On propose de démontrer que, si le nombre formé par les chiffres déjà trouvés à la racine est égal ou supérieur à* 5, *le quotient en question, s'il est plus grand que le chiffre cherché, ne peut le surpasser que d'une unité.*

2° *Énoncé analogue pour la racine cubique, le nombre déjà obtenu à la racine devant être au moins égal à* 10.

Dans les deux cas, cette limite inférieure du nombre qui doit déjà être obtenu à la racine pour que le théorème soit vrai peut être notablement abaissée.

1° Soit w le nombre, a le nombre déjà obtenu à la racine; soit $w - a'^2 \times 100 = R$; posons $R = R' \times 10 + R''$, $R'' < 10$, on divise R' par $2a$; soit b le quotient; on a donc $R' \geqq 2ab$, $R' \times 10 \geqq 2ab \times 10$; par hypothèse, b est trop fort; donc $R < 2a \times 10 \times b + b^2$; mais, comme $R' \times 10$, et *à fortiori* R, contient $2ab \times 10$, l'excès de

$2a \times 10 \times b + b^2$ sur R ne surpasse pas b^2 au maximum. Si donc, en essayant $b - 1$, on diminue d'une quantité au moins égale à b^2 le nombre que l'on aura à retrancher de R, la soustraction deviendra certainement possible. Or, pour essayer $b - 1$, on est conduit à essayer de retrancher de R le nombre $2a \times 10(b-1) + (b-1)^2$, nombre qui est inférieur à $2a \times 10 \times b + b^2$ de $2a \times 10 + 2b - 1$; donc le chiffre $b - 1$ sera le chiffre cherché si, entre a et b, on a la relation

$$2a \times 10 + 2b - 1 \geqq b^2, \quad \text{ou} \quad 2a \times 10 \geqq (b-1)^2.$$

Or, si

$a = 1$, la condition est remplie tant que b ne surpasse pas 5,
$a = 2$, » » 7,
$a = 3$, » » 8,
$a = 4$, quel que soit b,

résultat qu'il serait facile d'énoncer en langue vulgaire; et, en admettant que l'on trouvât l'énoncé un peu long pour prendre place dans un cours, tout au moins devrait-on, dans celui de M. Serret, remplacer 5 par 4.

2° Soient $w - (a \times 10)^3 = R$, $R = R' \times 100 + R''$; je divise R' par $3a^2$; si b est le quotient, on aura $R' \geqq 3a^2 b$ et $R' \times 100 \geqq 3a^2 b \times 100$. Par hypothèse, $R' \times 100 + R'' < 3a^2 b \times 100 + 3ab^2 \times 10 + b^3$. Mais évidemment l'excès du second nombre sur le premier ne surpasse pas $3ab^2 \times 10 + b^3$.

Or, en essayant $b - 1$ au lieu de b, il est facile de voir qu'on diminue le nombre à retrancher de R de la quan-

$$3a^2 \times 100 + 6a \times 10 \times b - 3a \times 10 + 3b^2 - 3b + 1;$$

donc $b - 1$ sera le chiffre cherché, si l'on a

$$3a^2 \times 100 + 6a \times 10 \times b - 3a \times 10 + 3b^2 - 3b + 1 \geqq 3ab^2 \times 10 + b^3,$$

ce qui peut s'écrire

$$3a^2 \times 100 > (b-1)^2(3a \times 10 + b - 1).$$

On reconnaît bien facilement que la condition est remplie si l'on a

$$\begin{array}{llll}
a = 1 & \text{avec} & b = 4 & \text{et au-dessus,} \\
a = 2 & \text{»} & b = 5 & \text{»} \\
a = 3 & \text{»} & b = 6 & \text{»} \\
a = 4 & \text{»} & b = 7 & \text{»} \\
a = 5 & \text{»} & b = 7 & \text{»} \\
a = 6 & \text{»} & b = 8 & \text{»} \\
\multicolumn{4}{l}{a = 7, \text{ quel que soit } b.}
\end{array}$$

On pourrait donc, tout au moins, remplacer, dans l'énoncé de M. Serret, 10 par 7.

Autre remarque. — Je me bornerai à énoncer les deux remarques suivantes, dont la démonstration est immédiate.

Si deux nombres entiers ont le même nombre de chiffres, ce nombre de chiffres étant pair, et qu'ils aient plus de la moitié de leurs chiffres à gauche communs, la différence de leurs racines carrées sera inférieure à 0,1 si le nombre formé par leurs deux premiers chiffres à gauche est au moins égal à 25.

Si deux nombres entiers ont le même nombre de chiffres, ce nombre de chiffres étant un multiple de 3, et qu'ils aient plus du tiers de leurs chiffres à gauche communs, la différence de leurs racines cubiques sera inférieure à 0,1 si le nombre formé par leurs trois premiers chiffres à gauche est égal ou supérieur à 193.

PROBLÈMES;

PAR M. G. ZEUTHEN.

1. Les aires engendrées par quatre segments de droites qui font partie d'une même figure plane et invariable qui se meut dans son plan satisferont toujours à une équation linéaire et homogène. Démontrer ce théorème et indiquer les significations géométriques des coefficients. Quelle sera l'équation dans le cas où l'un des segments est à l'infini?

2. A une surface courbe et limitée sera toujours adjointe une droite, telle que le volume engendré par un mouvement quelconque de la surface, restant invariable, s'exprime, au moyen des sommes u et v des translations et des rotations élémentaires (*) suivant cette droite et autour d'elle, de la manière suivante :

$$Au + Bv,$$

où A et B sont des coefficients constants. Démontrer ce théorème et déterminer la position de la droite par rapport à la surface (et par rapport au plan des problèmes 769 et 770), et les valeurs des coefficients.

Les corollaires les plus notables du théorème énoncé seront : 1° celui où le mouvement se réduit à une rotation autour d'un axe fixe (généralisation du théorème

(*) C'est-à-dire celles qui ont lieu à chaque instant. On trouve ces mouvements élémentaires du et dv en remplaçant à chaque instant le mouvement de la surface par une translation suivie d'une rotation autour d'un axe qui rencontre la droite dont il s'agit. Alors du et dv seront les composantes de cette translation et de cette rotation suivant la droite.

de Guldin), et 2° celui où le volume engendré est égal à zéro.

CORRESPONDANCE.

Lettre à M. Bourget sur le centre de gravité d'un secteur elliptique.

Monsieur le rédacteur,

Dans les Traités de Mécanique que j'ai entre les mains, je ne vois nulle part l'application de ce théorème très-simple (*) :

Si l'on projette une surface plane sur un plan, le centre de gravité de la projection est la projection du centre de gravité de la surface.

Il résulte du théorème en question que, si l'on rapporte la projection d'une surface aux projections des premiers axes coordonnés, les coordonnées du centre de gravité de la projection sont les projections des coordonnées du centre de gravité de la surface.

En observant que deux diamètres rectangulaires d'un cercle se projettent suivant deux diamètres conjugués de l'ellipse, on trouve immédiatement le centre de gravité d'une demi-ellipse, du secteur elliptique compris entre deux demi-diamètres conjugués, du segment compris entre la courbe et une corde qui joint les extrémités de deux diamètres conjugués, etc.

Agréez, etc.

DAUPLAY.

(*) Voir *Résumé de leçons de géométrie analytique et de calcul infinitésimal*, par J.-B. BELANGER, p. 274; *Éléments de Mécanique*, par H. RESAL, p. 78. (Note de la rédaction.)

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 876

(voir 2^e série, t. VII, p. 239);

PAR M. LAYRITZ,
Élève du lycée de Nancy.

1020 *étant le dénominateur d'une fraction irréductible, pourquoi le nombre des chiffres de la période engendrée par cette fraction sera-t-il l'un des nombres* 1, 2, 4, 8, 16, 32?

Le nombre n des chiffres de la période engendrée par une fraction irréductible égale l'exposant de la plus petite puissance de 10 qui, divisée par le produit des facteurs du dénominateur autres que 2 et 5, donne pour reste 1.

On sait, de plus (théorème d'Euler), que, p désignant le nombre des entiers inférieurs à d et premiers avec lui, $10^p - 1$ est divisible par d. On conclut de là que n est un diviseur de p, car toute puissance de 10 dont l'exposant est un multiple de n donne pour reste 1 lorsqu'on la divise par d, ce qui n'arrive jamais aux puissances de 10 dont l'exposant n'est pas un multiple de n.

Dans l'exemple actuel, 1020 étant égal à 20×51, on a

$$d = 51 = 17 \times 3.$$

Les nombres premiers avec 51 et inférieurs à lui sont tous les nombres entiers inférieurs à 51, moins les multiples de 17 et les multiples de 3; donc

$$p = 50 - 16 - 2 = 2^5.$$

n, étant un diviseur de p, ne peut donc être que l'un des nombres $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$, c'est-à-dire $1, 2, 4, 8, 16, 32$.

Note. — M. Toubin, de Lons-le-Saulnier, nous a envoyé un travail sur la même question.

Questions 877, 878 *et* 879

(voir 2e série, t. VII, p. 239);

PAR M. E. PELLET,
Élève du lycée de Nîmes.

877. Le nombre des chiffres de la période à laquelle conduit la fraction $\frac{a}{b}$ irréductible est égal au plus petit nombre n tel que $10^n - 1$ soit divisible par β, β étant égal à b débarrassé des facteurs 2 et 5 qu'il contient.

Pour que $10^{n'} - 1$ soit divisible par b, il faut que n' soit multiple de n. Soit, en effet,

$$n' = nq + r,$$

r étant positif et plus petit que n; on a

$$10^{n'} - 1 = (10^{nq} - 1)10^r + 10^r - 1.$$

$10^{nq} - 1$ est divisible par $10^n - 1$, et par suite par b; pour que $10^{n'} - 1$ soit divisible par b, il faut donc que $10^r - 1$ le soit, ce qui exige que $r = 0$. De là il résulte que, *si le dénominateur d'une fraction irréductible est un multiple de b, cette fraction, réduite en décimales, donnera lieu à une période dont le nombre des chiffres égale un multiple de n.* Car, si l'on désigne par n' ce nombre de chiffres, $10^{n'} - 1$ doit être divisible par b.

878. *Lorsque la conversion de plusieurs fractions irréductibles* $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \ldots$ *en décimales conduit à des*

périodes dont n, n', n'',... sont les nombres de chiffres, toute fraction irréductible dont le dénominateur est égal au plus petit commun multiple des dénominateurs b, b', b'',... donne lieu à une période d'un nombre de chiffres égal au plus petit commun multiple M *des nombres n, n', n'',....*

En effet, $10^{M} - 1$ est divisible séparément par b, b', b'',..., et par suite par le plus petit multiple commun de ces nombres. En outre, tout nombre M', tel que $10^{M'} - 1$ soit divisible par le plus petit multiple commun de b, b', b'',..., doit être divisible par n, n', n'',..., et par suite par M.

879. *Lorsque la conversion en décimales d'une fraction irréductible dont le dénominateur est un nombre premier p conduit à une période de n chiffres, et que p^{α} est la plus grande puissance de p qui divise $10^{n} - 1$, toute fraction irréductible ayant pour dénominateur $p^{\alpha+\beta}$ conduit à une période de np^{β} chiffres.*

Pour que $10^{n'} - 1$ soit divisible par $p^{\alpha+1}$, il faut, d'après ce qui précède, que n' soit un multiple de n. Posons $n' = nq$, on a

$$\begin{aligned} &10^{nq} - 1 \\ &= (10^{n} - 1)\left[10^{n(q-1)} - 1 + 10^{n(q-2)} - 1 + \ldots + 10^{n} - 1 + q\right]. \end{aligned}$$

$10^{n} - 1$ n'étant divisible que par p^{α}, pour que $10^{nq} - 1$ soit divisible par $p^{\alpha+1}$, il faut et il suffit que la quantité entre crochets soit divisible par p. Mais la somme

$$10^{n(q-1)} - 1 + 10^{n(q-2)} - 1 + \ldots + 10^{n} - 1$$

est divisible par p, il faut donc que q le soit aussi; q est donc au moins égal à p, $n' = np$ est donc le plus petit nombre tel que $10^{n'} - 1$ soit divisible par $p^{\alpha+1}$.

En raisonnant comme précédemment, on voit que $n' = np^2$ est le plus petit nombre tel que $10^{n'} - 1$ soit divisible par $p^{\alpha+2}$, et en général $n' = np^\beta$ le plus petit nombre tel que $10^{n'} - 1$ soit divisible par $p^{\alpha+\beta}$.

np^β est donc le nombre des chiffres de la période à laquelle donne lieu toute fraction irréductible de dénominateur $p^{\alpha+\beta}$.

Note. — Les trois questions précédentes ont été résolues aussi par M. Layritz, élève du lycée de Nancy.

Question 942

(voir 2e série, t. VIII, p. 275);

PAR M. A. MOREL,
Répétiteur à Sainte-Barbe.

Un cube parfait, augmenté de sept unités d'un ordre quelconque, ne peut pas être un carré parfait.

(JOFFROY.)

Nous croyons que l'énoncé de cette question peut être remplacé par le suivant :

Un cube parfait, augmenté de sept unités d'ordres quelconques, ne peut pas être un carré parfait.

Nous suivons en cela la modification proposée par M. Laisant dans l'énoncé de la question 902, résolue au tome VIII, p. 315.

En effet, le théorème précédent revient à prouver l'impossibilité de l'égalité suivante :

$$10^n + 10^{n'} + 10^{n''} + 10^{n'''} + 10^{n^{\text{IV}}} + 10^{n^{\text{V}}} + 10^{n^{\text{VI}}} = a^2 - b^3.$$

Or

a^2 est de l'une des formes $m9$, $m9+1$,
b^3 est de l'une des formes $m9$, $m9+1$, $m9-1$;

donc

$a^2 - b^3$ est de l'une des formes $m9$, $m9 \pm 1$, $m9 + 2$.

Mais le premier membre de l'égalité précédente est égal à un multiple de 9 augmenté de 7 unités, ou de la forme $m9 - 2$; donc il ne peut jamais être égal au second membre. C. Q. F. D.

QUESTIONS.

1013. Placer un triangle O'A'B', donné en grandeur, de façon que O' coïncide avec le sommet O d'un triangle OAB, donné en grandeur et en position, et que les droites AA', BB' fassent entre elles un angle donné.

Examen particulier du cas où l'angle est nul.

(E. Lemoine.)

1014. En faisant tourner d'un même angle et dans le même sens les génératrices d'une surface gauche autour de leur point central et dans leur plan central, on obtient une nouvelle surface gauche qui a la même ligne de striction que la première.

(G. Fouret.)

1015. Construire une surface gauche ayant pour ligne de striction une courbe donnée et pour cône directeur un cône de révolution également donné.

Démontrer que si l'ouverture du cône varie, le paramètre de distribution de chaque génératrice reste constant et égal à ce qu'il est lorsque le cône directeur se réduit à un plan. (G. Fouret.)

1016. Déterminer les sommets et les arêtes d'une surface gauche ayant pour ligne de striction une courbe donnée et pour cône directeur un cône de révolution également donné. (G. Fouret.)

DÉTERMINATION, PAR LE PRINCIPE DE CORRESPONDANCE, DE LA CLASSE DE LA DÉVELOPPÉE ET DE LA CAUSTIQUE PAR RÉFLEXION D'UNE COURBE GÉOMÉTRIQUE D'ORDRE m ET DE LA CLASSE n;

PAR M. CHASLES.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXII.)

On reconnaît immédiatement, soit par l'analyse, soit par une considération géométrique fort simple, que le nombre des normales qu'on peut mener par un point à une courbe géométrique d'ordre m, ne possédant aucun point multiple ou de rebroussement, est m^2. Cela résulte, analytiquement, de ce que les coordonnées des pieds des normales sont les racines de deux équations de degré m : et, en géométrie, de ce que les pieds des normales sont les points d'intersection de la courbe proposée et d'une seconde courbe infiniment voisine qui représente la position que prendrait la courbe elle-même, par une rotation infiniment petite autour du point d'où partent les normales.

Mais chacun de ces deux raisonnements ne s'applique qu'à une courbe pure de tous points multiples, et n'indique rien sur l'influence que doivent avoir de tels points.

Et dans le cas général d'une courbe quelconque, on ne résout la question que pour une position particulière du point d'où émanent les normales, savoir, quand ce point est à l'infini, auquel cas les normales sont parallèles entre elles, dans une direction donnée. Leur nombre alors est évidemment le même que celui des tangentes parallèles, lequel est n, comme quand les tangentes émanent d'un point quelconque; mais il faut y ajouter les normales qui se trouvent à l'infini, comme émanant aussi du point donné à l'infini. Celles-ci sont les normales aux m points de la courbe situés eux-mêmes à l'infini. Le nombre total des normales émanées d'un point situé à l'infini est donc $m + n$.

Cette solution d'une question fondamentale de la théorie des courbes, indépendamment de ce qu'elle laisse à désirer un raisonnement général, donne lieu, dans deux cas différents, à des objections ou difficultés que l'on n'a peut-être pas remarquées.

Premièrement : lorsque la courbe proposée passe par les deux points imaginaires à l'infini, appartenant à un cercle, qui sont les points de contact des asymptotes du cercle, appelés *points circulaires*, points que nous considérerons ici comme les points doubles de l'involution formée sur la droite de l'infini par les couples de points appartenant aux deux côtés d'un angle droit tournant autour de son sommet, et que nous désignerons par les lettres e et f; lors, dis-je, que la courbe proposée U_m^n passe par ces deux points, on sait que la normale en un de ces points coïncide avec la tangente. Dès lors on ne la regarde plus comme coïncidante avec la droite de l'infini, et l'on dit que la courbe n'a plus que $m - 2$ normales à l'infini, qui, avec les n normales parallèles, réduisent à $(m + n - 2)$ le nombre des normales émanées d'un point. C'est ainsi que pour le cercle le nombre des normales est 2 et non 4, comme il résulterait de la formule générale $m + n$.

Mais s'il est permis de dire qu'au point e la normale coïncide avec la tangente, on n'est pas fondé à ne pas admettre la droite de l'infini comme une normale au même point e. Car toute droite passant par ce point est une normale, puisque deux droites rectangulaires, de quelque point qu'elles partent, sont caractérisées par cette condition de diviser le segment ef en deux points conjugués harmoniques. Si l'un des deux points coïncide avec e, l'autre coïncide nécessairement avec le même point e. Dès lors deux droites quelconques menées par e sont rectangulaires, et, en particulier, toute droite passant par ce point, y compris la droite ef elle-même, est normale à la courbe.

C'est cette propriété, que toute droite passant par le point e y est normale à la courbe, qui fait que l'on doit négliger, dans le nombre total des normales menées d'un point, cette droite; ce qui réduit le nombre $m+n$ à $m+n-2$, à raison des deux points e et f.

Secondement : lorsque la courbe U^n a pour tangente la droite située à l'infini, le nombre des tangentes parallèles est diminué d'une unité, et par suite aussi celui des normales parallèles; et l'on en conclut que le nombre des normales menées par un point situé à l'infini, et conséquemment par un point quelconque, est alors $m+n-1$. Mais il semble qu'on compte alors la tangente à l'infini comme une normale *double*, pour faire le nombre m des normales à l'infini. Il y a donc là une vraie difficulté : mais on peut l'éviter par cette considération rigoureuse, que toute droite menée au point de contact de la courbe et de la droite ef est normale à la courbe, de même que toute droite menée à l'un des points circulaires, quand la courbe passe par ces points; de sorte qu'on doit en faire abstraction dans le nombre des normales menées d'un point donné.

Le principe de correspondance, dont j'ai déjà eu à faire de nombreuses applications dans la théorie des systèmes de coniques et de courbes d'ordre quelconque (*), s'ap-

(*) *Comptes rendus*, t. LVIII, p. 1175; 1864.

plique à la question actuelle, considérée dans toute sa généralité, avec une facilité extrême, et même de deux manières différentes, et donne la solution immédiate, sans aucune ambiguïté, des deux cas particuliers dont il vient d'être question.

Ce principe s'applique de même à cette autre détermination qui fait suite naturellement à la théorie des normales, celle du nombre des rayons émanés d'un point et qui, après leur réflexion sur une courbe géométrique U_m^n, vont concourir en un point donné.

Théorème. — *Le nombre des normales menées d'un point* P *à une courbe* U_m^n, *d'ordre m et de classe n, est* $(m+n)$.

En effet, une droite PX rencontre la courbe en m points; m droites PU, perpendiculaires aux tangentes en ces points, correspondent à PX. Une droite PU de direction arbitraire est perpendiculaire à n tangentes; par les points de contact de ces tangentes passent n droites PX qui correspondent à PU. Il existe donc $(m+n)$ droites PX coïncidant chacune avec la droite correspondante PU; ces droites sont les normales demandées. Ainsi le théorème est démontré.

Cas particuliers. — I. Lorsque la courbe U_m^n passe par les deux points circulaires à l'infini e, f, si l'on mène la droite PX par le point e, la tangente en ce point lui est perpendiculaire, de sorte que PU coïncide avec PX, ce qui forme une solution étrangère; et de même à l'égard du point f. Le nombre $m+n$ des solutions est donc réduit à $m+n-2$.

Et en général, lorsque la courbe U_m^n a un point multiple d'ordre r en chacun des deux points circulaires à l'infini, le nombre des normales qu'on peut lui mener d'un point donné est réduit à $m+n-2r$.

II. Supposons maintenant que la courbe U_m^n soit tangente à la droite ef de l'infini en un point a; toute droite menée par ce point est normale à la courbe, parce que la tangente passe par le point a' conjugué harmonique de a par rapport au segment ef; donc, si la droite PX passe par le point de contact a, la droite PU passe aussi par ce point ; ce qui fait une solution étrangère, et réduit ainsi le nombre des normales à $m+n-1$.

III. Enfin, si la courbe U_m^n a un point multiple d'ordre s, le nombre des normales menées par ce point, y compris les normales en ce point même, est, comme dans le cas général, $m+n$, parce que la démonstration générale subsiste sans aucune modification.

2e *Démonstration.* — Cette démonstration sera une conséquence immédiate du théorème suivant :

Théorème. — *Si, autour d'un point* O, *on fait tourner un angle droit* AOB, *et qu'aux points où le côté* OA *coupe une courbe* U_m^n *on mène les tangentes, lesquelles rencontreront le côté* OB *en m points, le lieu de ces points est une courbe de l'ordre* $(m+n)$, *ayant un point multiple d'ordre n en* O.

Prouvons que la courbe a $m+n$ points sur une droite quelconque L. Par un point x de cette droite passe le côté OB de l'angle; le côté OA rencontre la courbe en m points, et les tangentes en ces points coupent L en m points u. Par un point u passent n tangentes; si le côté OA de l'angle passe successivement par les n points de contact, le côté OB coupe L en n points x. Il existe donc $m+n$ points x qui coïncident chacun avec un point u correspondant. Ces points appartiennent à la courbe cherchée, qui est donc d'ordre $(m+n)$. C. Q. F. D.

Conséquence. — Cette courbe d'ordre $(m+n)$ a $m+n$ points à l'infini; alors le côté OB de l'angle droit est parallèle à la tangente en l'un des points du côté OA, et, par conséquent, ce côté OA est la normale en ce point. Donc il existe $(m + n)$ normales émanées du point O; ce que nous nous proposions de démontrer.

Observation. — Les deux démonstrations que nous venons de donner de la formule $m + n$, qui exprime le nombre des normales qu'on peut mener par un point, s'appliquent d'elles-mêmes au cas des obliques abaissées d'un point sous un angle de grandeur donnée et dans un même sens de rotation, dont le nombre est aussi $m + n$. Il suffit de considérer, dans la première démonstration, l'oblique et la tangente en son pied comme deux droites qui divisent le segment ef de l'infini dans un *rapport anharmonique* donné, au lieu du rapport harmonique.

Passons au théorème relatif à la réflexion sur une courbe U_m^n, dont voici l'énoncé :

Lorsque des rayons émanés d'un point Q *se réfléchissent sur une courbe* U_m^n, *les rayons réfléchis enveloppent une courbe de la classe* $m + 2n$.

Il faut prouver qu'il existe, sur la courbe U_m^n, $m + 2n$ points tels, que les rayons réfléchis en ces points passeront par un même point Q'. Ces rayons, et les rayons incidents émanés du point Q font des angles égaux avec la tangente, et sont par conséquent conjugués harmoniques par rapport à la tangente et à la normale; on peut dire réciproquement que la tangente et la normale coupent la droite QQ' en deux points x, x' conjugués harmoniques par rapport aux deux points Q, Q'. Cela posé, par un point x de la droite QQ' passent n tangentes $x\theta$ de la courbe U_m^n; les normales aux points de contact θ coupent QQ' en n points x''. Un point x'', pris arbitrairement sur QQ', a pour conjugué par rapport au segment QQ' un point x' par lequel passent $m + n$ normales de U^n_m; les tangentes aux pieds de ces normales coupent QQ' en $m+n$ points x. Donc il existe $m+2n$ points x qui coïncident chacun avec un point x correspondant. Ces $m+2n$ points appartienent aux tangentes de $m+2n$ points de la courbe qui satisfont à la question. Le théorème est donc démontré.

Observation. — Ce résultat se vérifie immédiatement par cette considération que la courbe enveloppe des rayons réfléchis a $m+2n$ tangentes passant par le point Q. Ces tangentes sont : 1° les $m+n$ normales menées par Q, qui, regardées comme rayons incidents, se réfléchissent dans leur propre direction ; 2° les n tangentes menées du point Q, qui, regardées comme rayons incidents, font un angle nul avec les tangentes, et donnent lieu à des rayons réfléchis faisant aussi un angle nul avec ces tangentes, et passant par le point Q.

Cas particulier. — Si la courbe U^n_m passe par les deux points circulaires à l'infini e, f, il y a deux solutions étrangères dans le nombre $m+2n$ qui exprime la classe de la caustique, et qui devient donc $m+2n-2$. En effet, la normale au point e est indéterminée de direction, comme nous l'avons dit dans le problème des normales, de sorte que le rayon réfléchi est aussi indéterminé de direction, et passe donc par tel point Q' qu'on voudra, ce qui constitue une solution étrangère ; de même pour le point f.

Ainsi, pour le cercle, la caustique est de la quatrième classe. Effectivement, on sait qu'alors sa développante appelée *caustique secondaire* est l'ovale de Descartes ayant un point double au point rayonnant avec les deux points de rebroussement aux points circulaires de l'infini. La développée de cette courbe, c'est-à-dire la caustique proprement dite, est donc [suivant la formule $m(m-1)-2d-3d'$ qui exprime la classe d'une courbe d'ordre m douée de d points doubles et de d' points de rebroussement] de la classe $4.3 - 2 - 6 - 4$.

C'est surtout dans la théorie des systèmes de courbes représentés par les deux caractéristiques μ, ν que le principe de correspondance est d'un usage précieux, et nous pouvons dire indispensable. Mais il est une foule de questions et de théorèmes relatifs à une simple courbe, dans lesquels il procure la même facilité que dans les démonstrations qui font le sujet de cette Note. On avait pu en juger déjà par les exemples que j'en avais donnés en présentant ce principe, d'abord dans des limites restreintes, sous le titre de *Principe de correspondance entre deux objets variables, qui peut être d'un grand usage en Géométrie* (*). J'aurai à revenir sur ce sujet.

NOTE SUR LA DÉTERMINATION DES FACTEURS PREMIERS D'UN NOMBRE;

PAR M. STOUFF.

Si l'on construit une table des nombres premiers depuis 1 jusqu'à 1000, et qu'on y cherche tous les nombres terminés par l'unité, on trouve les quarante nombres suivants :

11, 31, 41, 61, 71, 101, 131, 151, 181, 191,
211, 241, 251, 271, 281, 311, 331, 401, 421, 431,
461, 491, 521, 541, 571, 601, 631, 641, 661, 691,
701, 751, 761, 811, 821, 881, 911, 941, 971, 991.

Veut-on reconnaître si un nombre donné 401 673 est divisible par l'un quelconque de ces nombres, par 191

(*) *Comptes rendus*, t. XLI, 1855, p. 1097-1107.

par exemple? On supprime le chiffre des unités 3 du nombre, on le multiplie par 19, et l'on retranche le produit 57 des dizaines 40167 du nombre. Le reste 40110 et 401673 diffèrent d'un multiple de 191. On opère ensuite sur 40110, ou plutôt sur 4011 comme sur le nombre donné; le second reste 382 est le double de 191; donc le nombre donné est multiple de 191. Après avoir supprimé les facteurs 3 et 191, on trouve pour quotient 701. Si l'on veut reconnaître directement que le nombre donné admet ce diviseur, on forme le tableau suivant :

$$\begin{array}{r} 40167\cancel{3} \\ 210 \\ \hline 3995\cancel{7} \\ 490 \\ \hline 350\cancel{5} \\ 350 \\ \hline 0 \end{array}$$

On serait arrivé, après deux opérations, au reste zéro, si, au lieu de procéder sur 401673, on avait commencé par supprimer le facteur 3, comme on le fait toujours.

Dans le cas du nombre premier 701, on arrive plus rapidement au résultat en suivant la méthode suivante. On supprime les *deux* derniers chiffres du nombre donné, on multiplie par 7 le nombre qu'ils forment; on retranche le produit, des centaines du nombre, et l'on obtient immédiatement 3505, reste de la seconde soustraction (première méthode). Deux opérations conduisent, dans ce cas, au reste o.

Nous avons opéré sur un nombre admettant les diviseurs essayés; s'il en était autrement, on s'arrêterait aussitôt qu'on aurait reconnu qu'un reste n'admet pas comme facteur le diviseur.

Au moyen des nombres non premiers terminés par 1, on peut reconnaître facilement si un nombre est divisible par un nombre premier quelconque autre que les précédents. A cet effet, il suffit de consulter la table suivante, commençant à 7 et se terminant à 97 :

Nombres premiers.	Multiples.	MULTIPLICATEURS. Première méthode.	Deuxième méthode.
7	91	9	»
»	231	23	»
»	301	»	3
13	91	9	»
17	51	5	»
19	171	17	»
23	161 (7)	16	»
29	261	26	»
31	341	34	»
37	111	11	»
43	301	»	3
47	141	14	»
53	371 (7)	37	»
59	531	53	»
67	201	»	2
73	511 (7)	51	»
79	711	71	»
83	581 (7)	58	»
89	801	»	8
97	291	29	»

Quand un nombre a six chiffres ou un plus grand nombre, on peut simplifier encore la recherche des diviseurs 7, 13, 17, 23, 29, 127, en remarquant que

$$1001 = 7 \times 11 \times 13,$$
$$2001 = 3 \times 23 \times 29,$$
$$6001 = 17 \times 353,$$
$$8001 = 7 \times 9 \times 127.$$

On supprimera donc les trois derniers chiffres du nombre, on multipliera le nombre qu'ils forment par 1, 2, 6 ou 8, selon le facteur que l'on essaye; on retranchera le produit des mille du nombre; le reste et le nombre donné diffèrent entre eux d'un multiple de 7, 13, 23, 29, 17, 7 ou 127.

Quelle que soit la méthode employée, on n'a jamais à multiplier qu'un nombre de deux ou trois chiffres par un nombre inférieur à 10.

PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE;

PAR M. A. MOREL.

Soit un angle ayant son sommet en un point A *d'une conique, et tel que les côtés* AB *et* AC *soient également inclinés sur la tangente en* A. *La ligne* BC, *qui joint les points d'intersection des côtés de l'angle avec la conique coupe la tangente en* A *en un point* M *indépendant de la valeur de l'angle. On propose de trouver le lieu de ce point* M *quand le point* A *décrit la conique.*

Pour démontrer la première partie de ce théorème, je considère la tangente et la normale en A. Ces deux lignes étant les bissectrices de l'angle BAC et de son supplément, la ligne BC est partagée harmoniquement aux points M et N par la tangente et la normale. Donc le point M est le pôle de la normale, et par suite indépendant de la position sur la courbe des points B et C répondant à la question, c'est-à-dire indépendant de la valeur de l'angle. Nous pourrions par suite trouver immédiatement le lieu, en le considérant comme la polaire réciproque de la développée par rapport à la conique demandée. Nous pouvons déduire les propriétés de ce lieu de celles de la développée. Nous remarquons d'abord que, dans les courbes à centre, le lieu sera du quatrième degré, puisque la développée est de la quatrième classe. De plus, la courbe présentera quatre branches infinies, puisqu'il y a quatre normales passant par le centre, et cette courbe aura quatre asymptotes deux à deux parallèles aux axes; ces asymptotes seront les polaires des points de rencontre de la développée avec les axes. Dans l'ellipse, les quatre points de rencontre étant réels, il en sera de même des quatre asymptotes. Deux seulement existeront dans le cas de l'hyperbole, les autres étant imaginaires. Enfin, la courbe ne pourra jamais rencontrer la conique, car si P était un point commun aux deux courbes, R le point correspondant de la développée, la polaire de P devrait être tangente à la conique en P, et tangente à la développée en R, c'est-à-dire qu'elle devrait être à la fois tangente et normale à la courbe. Ce fait ne peut avoir lieu que pour les droites imaginaires qui vont du foyer aux points de rencontre imaginaires de la directrice avec la conique.

Dans le cas de la parabole, le lieu cherché sera du troisième degré, puisque la développée de la parabole est une courbe de la troisième classe. De plus, elle aura deux branches infinies, l'une ayant une asymptote parallèle à la tangente au sommet, et à une distance du sommet égale au demi-paramètre, mais à l'extérieur; l'autre sera le prolongement de l'axe au delà du sommet, car les points où la développée rencontre le second axe, rejeté à l'infini, étant eux-mêmes à une hauteur infinie au-dessus de l'axe, leur polaire, c'est-à-dire l'asymptote, devra passer par le centre, c'est-à-dire se confondre avec l'axe. Nous pourrions, d'après cela, trouver facilement l'équation du lieu, en partant de l'équation de la développée. Mais on peut la trouver directement, d'après la définition du lieu, et revenir de là à l'équation de la développée. Nous allons, par exemple, chercher cette équation dans le cas des courbes à centre, laissant au lecteur le soin d'opérer de même dans le cas de la parabole.

Prenons donc l'équation

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

de la courbe rapportée à son centre et à ses axes; nous supposons que b peut être réel ou imaginaire de la forme $b'\sqrt{-1}$, et qui nous donne simultanément le cas de l'ellipse et celui de l'hyperbole. Soit (α, β) un point du lieu; la polaire de ce point par rapport à la courbe a pour équation

$$(2) \qquad \frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1 = 0.$$

Cette ligne coïncidera avec la normale au point (x', y'), dont l'équation est

$$(3) \qquad a^2 y' x - b^2 x' y - c^2 x' y' = 0,$$

si l'on a les relations

$$(4) \qquad \frac{b^2 \alpha}{a^2 y'} = -\frac{a^2 \beta}{b^2 x'} = \frac{a^2 b^2}{c^2 x' y'},$$

x' et y' étant liés par la relation

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1 = 0.$$

En éliminant x' et y' entre ces équations, nous aurons le lieu cherché. L'inspection des égalités (4) nous donne

$$\frac{x'}{a} = \frac{a^3}{c^2 \alpha}, \quad \frac{y'}{b} = \frac{-b^3}{c^2 \beta}.$$

Donc, en portant ces valeurs dans l'équation de la courbe, nous aurons pour le lieu cherché

$$(5) \qquad \frac{a^6}{c^4\alpha^2} + \frac{b^6}{c^4\beta^2} - 1 = 0.$$

On pourrait facilement trouver, par la discussion de cette équation, que la courbe présente bien les particularités dont nous avons parlé.

Revenons maintenant à la développée de la conique. Pour prouver que cette courbe est la réciproque de la précédente, prenons un point (ξ, η) de la réciproque de la courbe représentée par l'équation (5). Si nous identifions l'équation de la polaire de ce point avec celle de la tangente à la courbe (5), nous trouvons comme équation de condition

$$\frac{\frac{-\xi}{a^2}}{\frac{a^6}{c^4 a^3}} = \frac{\frac{-\eta}{b^2}}{\frac{b^6}{c^4 b^3}} = 1.$$

D'où

$$\alpha = -\frac{a^2}{c}\left(\frac{a^2}{c\xi}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \beta = -\frac{b^2}{c}\left(\frac{b^2}{c\eta}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Portant ces valeurs de α et de β dans l'équation (5) et réduisant, nous trouvons pour le lieu des points (ξ, η), c'est-à-dire pour la courbe réciproque de l'équation (5), la courbe représentée par l'équation

$$\left(\frac{a\xi}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b\eta}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 = 0,$$

ce qui est précisément la développée de la conique proposée, ainsi que nous l'avons démontré plus haut.

QUESTIONS DE LICENCE;

PAR M. J. GRAINDORGE,
Docteur ès sciences, à Liége.

I. *Trouver l'intégrale générale de l'équation*

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 2\frac{d^2y}{dx^2} + y = \mathrm{A}e^x + \mathrm{B}e^{-x} + \mathrm{C}\sin x + \mathrm{D}\cos x;$$

A, B, C, D *sont des constantes.*

On trouve facilement que l'équation privée de second membre

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 2\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

a pour intégrale

$$y = e^x(\alpha + \beta x) + e^{-x}(\alpha' + \beta' x).$$

Nous obtiendrons l'intégrale cherchée par la méthode de la *variation des constantes arbitraires,* et nous trouverons que α, β, α' et β' sont déterminés par les quatre équations

$$e^x\frac{d\alpha}{dx} + xe^x\frac{d\beta}{dx} + e^{-x}\frac{d\alpha'}{dx} + xe^{-x}\frac{d\beta'}{dx} = 0,$$

$$e^x\frac{d\alpha}{dx} + (e^x + xe^x)\frac{d\beta}{dx} - e^{-x}\frac{d\alpha'}{dx} + (e^{-x} - xe^{-x})\frac{d\beta'}{dx} = 0,$$

$$e^x\frac{d\alpha}{dx} + (2e^x + xe^x)\frac{d\beta}{dx} + e^{-x}\frac{d\alpha'}{dx} - (2e^{-x} - xe^{-x})\frac{d\beta'}{dx} = 0,$$

$$e^x\frac{d\alpha}{dx} + (3e^x + xe^x)\frac{d\beta}{dx} - e^{-x}\frac{d\alpha'}{dx} + (3e^{-x} - xe^{-x})\frac{d\beta'}{dx} = \mathrm{V},$$

en posant

$$\mathrm{V} = \mathrm{A}e^x + \mathrm{B}e^{-x} + \mathrm{C}\sin x + \mathrm{D}\cos x.$$

Ces équations nous donnent immédiatement

$$\frac{d\beta}{dx} = \tfrac{1}{4}\mathrm{V}e^{-x}, \qquad \frac{d\beta'}{dx} = \tfrac{1}{4}\mathrm{V}e^{x},$$

$$\frac{d\alpha}{dx} = -\frac{x+1}{4}\mathrm{V}e^{-x}, \qquad \frac{d\alpha'}{dx} = -\frac{x-1}{4}\mathrm{V}e^{x}.$$

Les équations qui serviront à déterminer les quantités α, β, α' et β' seront donc

$$4\,d\beta = \mathrm{A}\,dx + \mathrm{B}e^{-2x}dx + \mathrm{C}e^{-x}\sin x\,dx + \mathrm{D}e^{-x}\cos x\,dx,$$

$$4\,d\beta' = \mathrm{A}e^{2x}dx + \mathrm{B}\,dx + \mathrm{C}e^{x}\sin x\,dx + \mathrm{D}e^{x}\cos x\,dx,$$

$$\begin{aligned} -4\,d\alpha = {} & \mathrm{A}(x+1)\,dx + \mathrm{B}(x+1)e^{-2x}dx \\ & + \mathrm{C}(x+1)e^{-x}\sin x\,dx + \mathrm{D}(x+1)e^{-x}\cos x\,dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -4\,d\alpha' = {} & \mathrm{A}(x-1)e^{2x}dx + \mathrm{B}(x-1)\,dx \\ & + \mathrm{C}(x-1)e^{x}\sin x\,dx + \mathrm{D}(x-1)e^{x}\cos x\,dx. \end{aligned}$$

Nous voyons donc que nous aurons besoin de calculer les intégrales suivantes, que nous écrivons en faisant abstraction des constantes :

$$\int e^{2x}dx = \frac{e^{2x}}{2},$$

$$\int e^{-2x}dx = -\frac{e^{-2x}}{2},$$

$$\int x\,e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}x\,e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x},$$

$$\int x\,e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}x\,e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x},$$

$$\int e^{x}\sin x\,dx = e^{x}\frac{\sin x - \cos x}{2},$$

$$\int e^{x}\cos x\,dx = e^{x}\frac{\sin x + \cos x}{2},$$

$$\int e^{-x}\sin x\,dx = -e^{-x}\frac{\sin x + \cos x}{2},$$

$$\int e^{-x}\cos x\,dx = e^{-x}\frac{\sin x - \cos x}{2},$$

$$\int x e^x \sin x\, dx = \frac{xe^x(\sin x - \cos x)}{2} + \frac{e^x \cos x}{2},$$

$$\int x e^x \cos x\, dx = \frac{xe^x(\sin x + \cos x)}{2} - \frac{e^x \sin x}{2},$$

$$\int x e^{-x} \sin x\, dx = -\frac{xe^{-x}(\sin x + \cos x)}{2} - \frac{e^{-x} \cos x}{2},$$

$$\int x e^{-x} \cos x\, dx = \frac{xe^{-x}(\sin x - \cos x)}{2} + \frac{e^{-x} \sin x}{2}.$$

Nous aurons alors très-facilement

$$4\beta = \beta_1 + Ax - \frac{B}{2}e^{-2x} - Ce^{-x}\frac{\sin x + \cos x}{2} + De^{-x}\frac{\sin x - \cos x}{2},$$

$$4\beta' = \beta'_1 + \frac{A}{2}e^{2x} + Bx + Ce^x\frac{\sin x - \cos x}{2} + De^x\frac{\sin x + \cos x}{2},$$

$$\begin{aligned}4\alpha = \alpha_1 &- \frac{A(x+1)^2}{2} + \frac{Bxe^{-2x}}{2} + \frac{3Be^{-2x}}{4}\\ &+ Cxe^x\frac{\sin x + \cos x}{2} + Ce^{-x}\cos x + \frac{Ce^{-x}\sin x}{2}\\ &- Dxe^{-x}\frac{\sin x - \cos x}{2} - De^{-x}\sin x + \frac{De^{-x}\cos x}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4\alpha' = \alpha'_1 &- \frac{Axe^{2x}}{2} + \frac{3}{4}Ae^{2x} - \frac{B(x-1)^2}{2}\\ &- Cxe^x\frac{\sin x - \cos x}{2} - Ce^x\cos x + \frac{Ce^x\sin x}{2}\\ &- Dxe^x\frac{\sin x + \cos x}{2} + De^x\sin x + \frac{De^x\cos x}{2}.\end{aligned}$$

En substituant ces valeurs dans l'expression de y, on trouve, tous calculs faits,

$$\begin{aligned}4y = \alpha_1 e^x + \beta_1 xe^x + \alpha'_1 e^{-x} + \beta'_1 xe^{-x} + Ae^x\left(\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{4}\right)\\ + Be^{-x}\left(\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{4}\right) + C\sin x + D\cos x,\end{aligned}$$

qui sera l'intégrale de l'équation proposée.

Cette intégrale peut encore être mise sous la forme suivante :

$$y = \frac{Ax^2e^x}{8} + \frac{Bx^2e^{-x}}{8} + \lambda e^x + \mu x e^x + \lambda' e^{-x} + \mu' x e^{-x}$$
$$+ \frac{C}{4}\sin x + \frac{D}{4}\cos x,$$

ou bien

$$y = e^x\left(\frac{Ax^2}{8} + \mu x + \lambda\right) + e^{-x}\left(\frac{Bx^2}{8} + \mu' x + \lambda'\right)$$
$$+ \frac{C}{4}\sin x + \frac{D}{4}\cos x.$$

II. *Un point matériel* P *est sollicité par une force dirigée vers un centre fixe* O, *et qui dépend de la distance* r *du point* P *au point* O. *L'action de la force sur l'unité de masse s'exprime par la formule*

$$\varphi = \frac{2k^2(a^2+b^2)}{r^5} - \frac{3k^2a^2b^2}{r^7}.$$

On suppose le point P *placé d'abord en* C *à une distance* a *du centre* O. *On imprime à ce point une vitesse perpendiculaire au rayon* OC *et égale à* $\frac{k}{a}$. *Déterminer son mouvement.*

Prenons pour pôle le point fixe O, pour axe polaire le rayon vecteur initial, et appliquons les formules connues (STURM, *Mécanique*, t. I, p. 227, 228 et 229),

$$(1) \qquad \varphi = \frac{c^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\right),$$

$$(2) \qquad v^2 = c^2\left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2\right],$$

$$(3) \qquad v = \frac{c}{p},$$

dans lesquelles c est une constante, p la longueur de la perpendiculaire abaissée du point O sur la tangente au point P, v la vitesse en ce point P.

La vitesse initiale au point C étant $\frac{k}{a}$, et a étant la perpendiculaire abaissée du centre O sur la direction de la vitesse en C, nous aurons, d'après la formule (3),

$$\frac{k}{a} = \frac{c}{a},$$

et, par suite,

$$c = k.$$

La formule (1) nous donne alors, en remplaçant φ par sa valeur, et divisant les deux membres par $k^2 = c^2$,

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\right) = \frac{2(a^2+b^2)}{r^5} - \frac{3a^2b^2}{r^7};$$

d'où

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} = \frac{2(a^2+b^2)}{r^3} - \frac{3a^2b^2}{r^5} - \frac{1}{r};$$

en multipliant par $2d\frac{1}{r}$, et intégrant, il vient

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{r^4} - \frac{a^2b^2}{r^6} - \frac{1}{r^2} + C.$$

Pour déterminer C, nous nous reporterons à l'origine du mouvement; en faisant $r = a$, dans cette dernière formule, il vient

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)_0^2 = C;$$

mais la formule (2) nous donne, en faisant $r=a$ et $v=\frac{k}{a}$,

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)_0=0;$$

donc

$$C=0,$$

et nous aurons, pour l'équation de la trajectoire,

$$\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{r^4}-\frac{a^2b^2}{r^6}-\frac{1}{r^2}};$$

d'où

$$d\theta=\frac{d\frac{1}{r}}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{r^4}-\frac{a^2b^2}{r^6}-\frac{1}{r^2}}}=-\frac{r\,dr}{\sqrt{(a^2+b^2)r^2-a^2b^2-r^4}}.$$

Si l'on pose $r^2=z$, il vient

$$2\,d\theta=-\frac{dz}{\sqrt{(a^2+b^2)z-a^2b^2-z^2}},$$

d'où l'on tire, en intégrant et désignant par ω une constante,

$$2(\theta-\omega)=arc\cos\frac{2z-(a^2+b^2)}{a^2-b^2},$$

ou

$$2z=(a^2+b^2)+(a^2-b^2)\cos 2(\theta-\omega),$$

ou enfin, en remplaçant z par sa valeur r^2,

$$2r^2=(a^2+b^2)+(a^2-b^2)\cos 2(\theta-\omega).$$

Pour déterminer ω, nous remarquerons que, pour $\theta=0$, on a $r=a$; par conséquent, $\omega=0$, et il vient, pour l'équation de la trajectoire,

$$2r^2=(a^2+b^2)+(a^2-b^2)\cos 2\theta,$$

ou

$$r^2 = a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta.$$

Cette équation est celle de la podaire du centre de l'ellipse dont a et b sont les deux axes : en coordonnées rectangulaires, elle a pour équation

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2.$$

NOTE SUR UN PROCÉDÉ NOUVEAU POUR TROUVER LES CUBES DE CERTAINES SOMMES;

Par M. AMIGUES,
Professeur au lycée de Toulon.

J'ai indiqué dernièrement un procédé pour trouver les cubes de certaines sommes. Je me propose de l'appliquer à deux exemples.

1. Désignons par S_p la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des n premiers nombres entiers. Je vais démontrer la formule

$$S_2^3 = \frac{16S_6 - 5S_4 + S_2}{12}.$$

Imaginons pour cela qu'on écrive par ordre et sur une même ligne les carrés des n premiers nombres, puis au-dessous une seconde ligne formée en multipliant les nombres de la première par 2^2, puis encore une autre ligne obtenue en multipliant les nombres de la première par $3^2, \ldots$, jusqu'à ce qu'on ait un carré. Ce carré sera la tranche inférieure d'un cube, dont les tranches successives se déduiront de la première en multipliant les nombres de celle-ci par $2^2, 3^2, \ldots, n^2$.

La somme des nombres de ce cube sera évidemment S_2^3.

A l'un des sommets du cube se trouve le nombre n^6. Faisons la somme des nombres contenus dans les trois faces qui se coupent en ce sommet, en suivant l'ordre que j'ai indiqué. Nous trouverons

$$3\left[\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right]^2 + 3n^2\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + n^6,$$

c'est-à-dire

$$\frac{16n^6 - 5n^4 + n^2}{12}.$$

Il est clair alors qu'en opérant de même sur les cubes réduits successifs, nous aurons, pour la somme des nombres disposés en cube,

$$\frac{16S_6 - 5S_4 + S_2}{12};$$

d'où l'égalité

$$S_2^3 = \frac{16S_6 - 5S_4 + S_2}{12}.$$

2. Désignons par S_p la somme des $p^{ièmes}$ puissances des nombres

$$\frac{1}{1.2}, \quad \frac{1}{2.3}, \quad \frac{1}{3.4}, \ldots, \quad \frac{1}{n(n+1)}, \quad \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

On sait que $S_1 = \frac{n+1}{n+2}$; d'où

$$S_1^3 = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^3.$$

Proposons-nous de trouver S_1^3 sous une autre forme.

Écrivons pour cela, par ordre et sur une même ligne, les nombres qu'on obtient en multipliant les nombres proposés par $\frac{1}{1.2}$, puis au-dessous les nombres qu'on obtient en multipliant les proposés par $\frac{1}{2.3}, \ldots$, jusqu'à ce que nous ayons un carré.

Multiplions tous les nombres de ce carré par $\frac{1}{1.2}$. Ces produits formeront la tranche inférieure du cube. Multiplions ces mêmes nombres par $\frac{1}{2.3}$. Ces produits formeront la deuxième tranche du cube, etc.

La somme des nombres disposés en cube est évidemment S_1^3.

Considérons le sommet du cube où se trouve le nombre $\frac{1}{(n+1)^3(n+2)^3}$, et faisons, en suivant l'ordre prescrit, la somme des nombres contenus dans les trois faces qui se coupent en ce point. Nous avons ainsi

$$3\,\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2$$
$$+\,3\,\frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2}\,\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^3(n+2)^3},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)}\,\frac{3n^3+6n^2+3n}{(n+1)^2(n+2)}$$
$$+\,\frac{1}{(n+1)^3(n+2)^3}\,\frac{1}{(n+1)(n+2)}\,\frac{3n}{n+2}$$
$$+\,\frac{1}{(n+1)^3(n+2)^3}.$$

Or, en posant l'identité suivante par rapport à n

$$\frac{3n}{(n+1)(n+2)^2}=\frac{A}{(n+1)(n+2)}+\frac{B}{(n+2)^2},$$

on trouve

$$A=-3,$$
$$B=6;$$

en sorte que la somme des nombres contenus dans les trois faces est

$$\frac{-3}{(n+1)(n+2)}+\frac{6}{(n+2)^2}+\frac{1}{(n+1)^3(n+2)^3}.$$

Si alors on opère de même pour les cubes réduits successifs, il est clair que l'on aura, pour la somme des nombres disposés en cube,

$$-3S_1+6\left[\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{2^2}\right]+S_3;$$

d'où l'égalité

$$S_1^3=-3S_1+6\left[\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{2^2}\right]+S_3,$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^3+3\frac{n+1}{n+2}=S_3+6\left[\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{2^2}\right].$$

Ajoutant 6 aux deux membres,

$$\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^3+3\frac{n+1}{n+2}+6=S_3+6\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{(n+2)^2}\right].$$

Supposons $n=\infty$,

$$10=S_3+6\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\right),$$

$$10=S_3+\pi^2,$$

$$\pi^2=10-\left(\frac{1}{1^3.2^3}+\frac{1}{2^3.3^3}+\frac{1}{3^3.4^3}+\ldots\right).$$

Il est facile de voir que, si le premier terme négligé dans la série est $\frac{1}{p^3(p+1)^3}$, l'erreur commise est moindre que $\frac{1}{p^5}$.

3. On peut d'ailleurs arriver à ce résultat, sans considérer notre cube, et même dans le cas actuel, avec plus de simplicité.

Cherchons d'abord S_2.

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}.$$

Élevant au carré,

$$\frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} - 2\frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Écrivant les égalités analogues et faisant la somme,

$$S_2 = 2\left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{(n+2)^2}\right] - 1 - \frac{1}{(n+2)^2} - 2S_1;$$

d'où, en supposant $n = \infty$,

$$\frac{1}{1^2.2^2} + \frac{1}{2^2.3^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{3} - 3,$$

formule donnée par M. Lucas.

Connaissant S_2, il va être très-facile de trouver S_3.

Partons toujours de l'identité

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}.$$

Élevant au cube,

$$\frac{1}{(n+1)^3(n+2)^3}$$
$$= \frac{1}{(n+1)^3} - \frac{1}{(n+2)^3} - 3\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right),$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{(n+1)^3(n+2)^3} = \frac{1}{(n+1)^3} - \frac{1}{(n+2)^3} - 3\frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2}.$$

Écrivant les égalités analogues et faisant la somme,

$$S_3 = 1 - \frac{1}{(n+2)^3} - 3S_2.$$

Remplaçant S_2 par sa valeur trouvée plus haut,

$$S_3 = 1 - \frac{1}{(n+2)^3} - 6\left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{(n+2)^2}\right]$$
$$+ 3 + \frac{3}{(n+2)^2} + 6\frac{n+1}{n+2}.$$

Supposons $n = \infty$,

$$S_3 = 10 - 6\left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots\right],$$
$$S_3 = 10 - \pi^2.$$

DES COORDONNÉES BIANGULAIRES;

PAR M. WILLIAM WALTON.

(Traduit de l'anglais de *The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics.*)

Des diverses classes de courbes de la Géométrie analytique, les unes sont représentées par des coordonnées bilinéaires, et c'est le plus grand nombre; les autres le sont par des coordonnées polaires. Il y a cependant un nombre considérable de courbes dont il est très-difficile de trouver les propriétés à l'aide de l'un ou l'autre de ces systèmes de coordonnées.

Imaginons deux points fixes A et B, et un point variable P. Je mène les lignes AB, AP, BP, et je désigne les angles PAB, PBA respectivement par θ, φ. Le lieu du point P peut être représenté par l'équation $F(\theta, \varphi) = 0$, et l'on peut dire alors qu'il est rapporté à des *coordon-*

nées biangulaires. Un certain nombre de courbes peuvent être représentées de cette manière, et repoussent l'emploi des coordonnées bilinéaires, trilinéaires ou polaires. Telles sont par exemple les courbes

$$\theta^2 \pm \varphi^2 = 1.$$

On se propose dans cette Note de présenter quelques observations sur l'expression biangulaire de certaines propriétés de la ligne droite et des courbes. La méthode des coordonnées biangulaires pourrait être poussée plus loin, mais ce que nous en dirons ici suffira pour mettre les élèves à même d'attaquer d'autres questions de Géométrie analytique au moyen de ces coordonnées.

1. Les perpendiculaires abaissées des points A et B (*) sur une droite indéfinie la coupent respectivement en Y et Z. La ligne AB est vue des points Y et Z sous les angles λ et μ, θ et φ étant les coordonnées biangulaires d'un point quelconque P de la ligne droite.

Du point O, milieu de AB, je mène OL perpendiculaire sur la ligne YZ; je mène ensuite PM perpendiculaire sur AB.

Alors, la ligne OL étant égale à la somme des projections de OM et PM sur elle-même, on a

$$\mathrm{OM}\cos\psi + \mathrm{PM}\sin\psi = \mathrm{OL}.$$

Mais

$$\mathrm{AB}\sin\psi = \mathrm{YZ}, \quad \mathrm{AB}\cos\psi = \mathrm{AY} - \mathrm{BZ};$$

donc

$$\mathrm{OM}.(\mathrm{AY} - \mathrm{BZ}) + \mathrm{PM}.\mathrm{YZ} = \mathrm{OL}.\mathrm{AB},$$

ou bien

$$\tfrac{1}{2}(\mathrm{AM} - \mathrm{BM})(\mathrm{AY} - \mathrm{BZ}) + \mathrm{PM}.\mathrm{YZ} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{AY} + \mathrm{BZ})(\mathrm{AM} + \mathrm{BM}),$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

et par suite

$$AM.BZ + BM.AY = PM.YZ;$$

d'où l'on tire

$$\cot\lambda \cot\theta + \cot\mu \cot\varphi = 1.$$

Posons $\cot\lambda = a$, $\cot\mu = b$; $\cot\theta = \alpha$, $\cot\varphi = \beta$. Alors l'équation biangulaire générale de la droite est

$$a\alpha + b\beta = 1.$$

Si la droite est parallèle à AB, on a

$$a = b.$$

Si elle coïncide avec AB, on a

$$a = 0 = b.$$

Donc l'équation d'une parallèle à AB est

$$\alpha + \beta = \text{const.},$$

et celle de AB est

$$\alpha + \beta = \infty.$$

On peut appeler les points A et B les *pôles biangulaires*, et le milieu de AB le *centre biangulaire*.

2. Trouver la forme de l'équation d'une droite passant par le centre biangulaire.

Lorsqu'une ligne passe par le centre, son équation doit être telle que, pour son centre, on ait

$$\alpha = \beta = \infty.$$

Donc

$$\alpha = \frac{1}{a+b} = \beta = \infty.$$

Par suite

$$a + b = 0,$$

et l'équation d'une droite passant par le centre biangulaire est de la forme

$$\alpha - \beta = \text{const.}$$

3. Les équations des lignes droites passant par les pôles biangulaires sont évidemment de la forme

$$\alpha = \text{const.}, \quad \beta = \text{const.}$$

D'ailleurs, l'équation de la droite de l'infini est évidemment

$$\alpha + \beta = 0.$$

4. Trouver la condition pour que deux lignes soient parallèles entre elles.

Soient les deux lignes représentées par les équations

$$a\alpha + b\beta = 1, \quad a'\alpha + b'\beta = 1.$$

Puisque ces lignes sont parallèles, il en résulte que, à leur point d'intersection, on a

$$\alpha + \beta = 0.$$

Donc

$$(a-b)\alpha = 1, \quad (a'-b')\alpha = 1,$$

et l'on trouve, comme condition de parallélisme,

$$a - b = a' - b'.$$

5. Trouver la condition pour que deux droites soient perpendiculaires.

Soient $\alpha = k$, $\beta = k'$ les équations des lignes menées respectivement par les points A et B parallèlement aux lignes

$$a\alpha + b\beta = 1, \quad a'\alpha + b'\beta = 1,$$

à l'intersection de la première et de la troisième de ces lignes; on a

$$\alpha + \beta = 0;$$

il en est de même pour l'intersection de la seconde et de la quatrième. On a donc

$$(a-b)k = 1, \quad (b'-a')k' = 1.$$

Mais on a évidemment $kk' = 1$. Donc la condition de perpendicularité est

$$(a-b)(a'-b') = -1.$$

6. L'équation d'une ligne passant par les deux points (α, β), (α_1, β_1) est évidemment

$$\frac{\alpha'-\alpha}{\alpha_1-\alpha} = \frac{\beta'-\beta}{\beta_1-\beta}.$$

7. Trouver l'inclinaison d'une ligne sur la ligne des pôles biangulaires.

Soit l'équation de la droite

$$a\alpha + b\beta = 1,$$

et soit ψ l'angle LOA.

La ligne menée par le pôle biangulaire parallèlement à la ligne proposée a pour équation $\tang\psi = \alpha$. Ces deux lignes se coupant sur la ligne de l'infini, dont l'équation est $\alpha + \beta = 0$, on déduira de ces trois équations

$$\cot\psi = a - b.$$

Les résultats obtenus dans les art. 4 et 5 sont des conséquences de cette expression de $\cot\psi$.

8. Trouver l'équation de la tangente à une courbe.

D'après l'observation de l'art. 6, il est évident que l'équation de la tangente en un point (α, β) d'une courbe est

$$\frac{\alpha'-\alpha}{d\alpha} = \frac{\beta'-\beta}{d\beta}.$$

Si l'équation de la courbe est de la forme $F(\alpha, \beta) = 0$, celle de la tangente sera

$$(\alpha' - \alpha)\frac{dF}{d\alpha} + (\beta' - \beta)\frac{dF}{d\beta} = 0.$$

9. Trouver l'équation de la normale en un point d'une courbe.

Puisque la normale passe par le point (α, β), son équation est comprise dans la forme

$$a(\alpha' - \alpha) + b(\beta' - \beta) = 0,$$

ou bien

$$\frac{a\alpha'}{a\alpha + b\beta} + \frac{b\beta'}{a\alpha + b\beta} = 1.$$

De plus, l'équation de la tangente peut s'écrire

$$\frac{\alpha' d\beta}{\alpha d\beta - \beta d\alpha} + \frac{\beta' d\alpha}{\beta d\alpha + \alpha d\beta} = 1.$$

La condition de perpendicularité est

$$\frac{a - b}{a\alpha + b\beta}\,\frac{d\alpha + d\beta}{\alpha d\beta - \beta d\alpha} = -1,$$

ou bien

$$b[d\beta(1 - \alpha\beta) + d\alpha(1 + \beta^2)] = a[d\alpha(1 - \alpha\beta) + d\beta(1 + \alpha^2)].$$

L'équation de la normale est donc

$$\frac{\alpha' - \alpha}{d\alpha(1 - \alpha\beta) + d\beta(1 + \alpha^2)} + \frac{\beta' - \beta}{d\beta(1 - \alpha\beta) + d\alpha(1 + \beta^2)} = 1,$$

ou bien, en employant les coefficients aux différences partielles,

$$\frac{\alpha' - \alpha}{(\alpha\beta - 1)\dfrac{dF}{d\beta} + (1 + \alpha^2)\dfrac{dF}{d\alpha}} = \frac{\beta' - \beta}{(\alpha\beta - 1)\dfrac{dF}{d\alpha} + (1 + \beta^2)\dfrac{dF}{d\beta}}.$$

10. Prenons pour exemple le cercle ayant pour diamètre la distance entre les deux pôles biangulaires. L'équation de ce cercle est $\alpha\beta = 1$.

L'équation de la tangente en un point (α, β) est, d'après la formule de l'art. 8,

$$\frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{\beta'}{\beta} = 2,$$

et celle de la normale, d'après la formule de l'art. 9, est

$$\alpha' - \beta' = \alpha - \beta,$$

qui représente, comme on devait s'y attendre, une droite passant par le centre biangulaire.

Comme second exemple, proposons-nous de trouver la tangente à la courbe

$$\theta^2 - \varphi^2 = 1,$$

au point pour lequel $\varphi = 0$.

Puisque

$$\frac{dF}{d\alpha} = \frac{dF}{d\theta}\frac{d\theta}{d\alpha} = -\sin^2\theta\frac{dF}{d\theta} = -2\theta\sin^2\theta,$$

$$\frac{dF}{d\beta} = \frac{dF}{d\varphi}\frac{d\varphi}{d\beta} = -\sin^2\varphi\frac{dF}{d\varphi} = \varphi\sin^2\varphi,$$

l'équation de la tangente en un point est

$$\theta\sin^2\theta(\alpha' - \alpha) = \varphi\sin^2\varphi(\beta' - \beta)$$

ou

$$\theta\sin^2\theta.\alpha' - \theta\sin\theta\cos\theta = \varphi\sin^2\varphi.\beta' - \varphi\sin\varphi\cos\varphi.$$

Si l'on pose $\varphi = 0$, on a $\theta = \pm 1$, et l'équation de la tangente devient

$$\alpha' = \pm\cot 1.$$

Ce résultat prouve que, au pôle A, par lequel passe la courbe, il y a deux tangentes inclinées chacune d'un angle ι sur la ligne AB, et de côtés opposés de cette ligne.

11. Trouver l'équation de l'asymptote à une courbe.

On combinera l'équation de la courbe de l'infini, ou $\alpha + \beta = 0$ avec l'équation $F(\alpha, \beta) = 0$, ce qui déterminera α et β; ces valeurs, si elles sont possibles, seront substituées à α et à β dans l'équation

$$(\alpha' - \alpha)\frac{dF}{d\alpha} + (\beta' - \beta)\frac{dF}{d\beta} = 0,$$

et si l'équation résultante représente une ligne à distance finie, cette ligne est une asymptote.

Prenons par exemple l'hyperbole

$$\alpha^2 + \beta^2 = \varepsilon^2,$$

dans laquelle ε est une constante. Combinant l'équation de la courbe avec l'équation $\alpha + \beta = 0$, on a

$$\alpha = \pm\frac{\varepsilon\sqrt{2}}{2} = -\beta.$$

L'équation de la tangente est

$$\alpha(\alpha' - \alpha) + \beta(\beta' - \beta) = 0,$$

ou

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' = \varepsilon^2.$$

On en déduit, pour l'équation des asymptotes,

$$\alpha' - \beta' = \pm\varepsilon\sqrt{2},$$

résultat qui prouve que les asymptotes passent par le centre.

Prenons pour second exemple

$$\theta^2 - \varphi^2 = 1.$$

Pour avoir l'asymptote, on doit poser

$$\alpha + \beta = 0, \quad \cot\theta + \cot\varphi = 0, \quad \varphi = n\pi - \theta.$$

Portant dans l'équation de la courbe, on aura

$$\theta^2 - (n\pi - \theta)^2 = 1, \quad \theta = \frac{n^2\pi^2 + 1}{2n\pi}, \quad \varphi = \frac{n^2\pi^2 - 1}{2n\pi}.$$

Par suite, en se rapportant à l'équation de la tangente donnée dans l'article **10**, on aura, pour l'équation des asymptotes,

$$\begin{aligned}(n^2\pi^2 + 1)\sin^2\frac{n^2\pi^2 - 1}{2n\pi}\alpha' - (n^2\pi^2 - 1)\sin^2\frac{n^2\pi^2 - 1}{2n\pi}\beta' \\ = \cot\frac{n^2\pi^2 + 1}{2n\pi}\left[(n^2\pi^2 + 1)\sin^2\frac{n^2\pi^2 + 1}{2n\pi}\right. \\ \left. + (n^2\pi^2 - 1)\sin^2\frac{n^2\pi^2 - 1}{2n\pi}\right].\end{aligned}$$

Cette équation, suivant que n est pair ou impair, peut être remplacée par les équations

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{n^2\pi^2} + 1\right)\alpha' + \left(\frac{1}{n^2\pi^2} - 1\right)\beta' &= 2\cot\frac{1}{2n\pi}, \\ \left(\frac{1}{n^2\pi^2} + 1\right)\alpha' + \left(\frac{1}{n^2\pi^2} - 1\right)\beta' &= -2\,\text{tang}\frac{1}{2n\pi}.\end{aligned}$$

12. Comme exercice des coordonnées biangulaires, cherchons à tracer la courbe donnée par l'équation

$$\theta^2 + \varphi^2 = 1.$$

L'équation de la tangente en un point (θ, φ) est

$$\theta\sin^2\theta . \alpha' + \varphi\sin^2\varphi . \beta' = \theta\sin\theta\cos\theta + \varphi\sin\varphi\cos\varphi.$$

Lorsque $\theta = \pm 1$, ce qui est sa plus grande valeur absolue, on a $\varphi = 0$, et l'équation de la tangente devient

$$\alpha' = \pm\cot 1, \quad \text{ou} \quad \theta' = \pm 1.$$

De même, les équations de la tangente, pour $\varphi = \pm 1$, sont

$$\varphi' = \pm 1.$$

Pour déterminer la position des asymptotes, s'il y en a, on doit prendre la relation

$$\alpha + \beta = 0 \quad \text{ou} \quad \cot\theta + \cot\varphi = 0,$$

et par suite

$$\varphi = n\pi - \theta.$$

On en déduit, en portant dans l'équation de la courbe,

$$\theta^2 - n\pi\theta = \tfrac{1}{2}(1 - n^2\pi^2),$$

ou

$$\theta = \tfrac{1}{2}\left[n\pi \pm (2 - n^2\pi^2)^{\frac{1}{2}}\right].$$

Pour que θ soit possible, il est évident que n ne peut être que nul, puisqu'il ne peut être fractionnaire; donc

$$\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

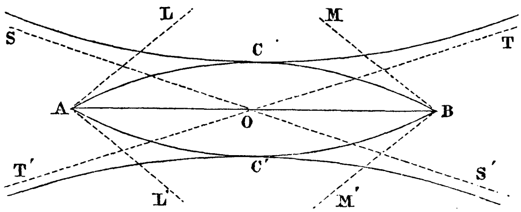
Portant ces valeurs de θ et de φ dans l'équation de la tangente, on trouve, pour l'équation des asymptotes,

$$\alpha' - \beta' = \mp 2\cot\frac{1}{\sqrt{2}},$$

résultat qui montre que les deux asymptotes passent par le centre biangulaire.

De plus, par l'article 7, on voit que les asymptotes sont inclinées sur la ligne des pôles, et de côtés opposés, d'angles égaux chacun à $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

La forme de la courbe, comme on le voit, peut être facilement donnée par la figure ci-dessous : AL et AL′ sont les tangentes en A ; BM, BM′ celles en B ; SOS′, TOT′ sont les asymptotes.



On peut observer que, si $\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $\frac{-1}{\sqrt{2}}$. Les coordonnées $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$ représentent le point C ; les coordonnées $\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$ représentent le point à l'infini T.

D'ailleurs, si $\theta = \varphi$, ce qui est le cas du point C, l'équation de la tangente devient

$$\alpha' + \beta' = 2 \cot \theta;$$

et par suite la tangente est parallèle à AB.

13. Trouver les coordonnées biangulaires du centre de courbure d'une courbe en un de ses points.

Soient $U = \frac{dF}{d\alpha}$, $V = \frac{dF}{d\beta}$, les équations de la normale peuvent s'écrire

$$\alpha' - \alpha = Lr, \quad \beta' - \beta = Mr,$$

en posant

$$L = \alpha(\alpha U + \beta V) + U - V,$$
$$M = \beta(\beta V + \alpha U) + V - U.$$

Différentiant les équations de la normale dans l'hypothèse que $d\alpha'$ et $d\beta'$ sont nuls tous les deux, on a

$$-d\alpha = \mathrm{L}\,dr + r\,d\mathrm{L},$$
$$-d\beta = \mathrm{M}\,dr + r\,d\mathrm{M},$$

et par suite

$$\frac{\alpha'-\alpha}{\mathrm{L}} = \frac{\beta'-\beta}{\mathrm{M}} = \frac{\mathrm{M}\,d\alpha - \mathrm{L}\,d\beta}{\mathrm{L}\,d\mathrm{M} - \mathrm{M}\,d\mathrm{L}}.$$

En effectuant les différentiations indiquées, remplaçant dans le résultat $d\alpha$, $d\beta$ par leurs proportionnels U, $-$V, et posant

$$\frac{d\mathrm{U}}{d\alpha} = u, \quad \frac{d\mathrm{V}}{d\beta} = v, \quad \frac{d\mathrm{U}}{d\beta} = w = \frac{d\mathrm{V}}{d\alpha},$$

on arrive, par une marche très-simple, aux équations

$$\frac{\alpha-\alpha'}{\alpha(\alpha\mathrm{U}+\beta\mathrm{V})+\mathrm{U}-\mathrm{V}} = \frac{\beta-\beta'}{\beta(\beta\mathrm{V}+\alpha\mathrm{U})+\mathrm{V}-\mathrm{U}}$$
$$= \frac{(\mathrm{U}-\mathrm{V})^2+(\alpha\mathrm{U}+\beta\mathrm{V})^2}{\left\{\begin{array}{l}(\alpha\mathrm{U}+\beta\mathrm{V})[(\mathrm{U}-\mathrm{V})^2+(\alpha\mathrm{U}+\beta\mathrm{V})^2] \\ \quad +(\alpha^2+\beta^2)(\mathrm{U}v^2+\mathrm{V}u^2-2\,\mathrm{UV}w)\end{array}\right\}},$$

qui déterminent les coordonnées biangulaires du centre de courbure.

Prenons, par exemple, l'équation $\alpha\beta = 1$; alors

$$\mathrm{U} = \beta, \quad \mathrm{V} = \alpha, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad w = 1;$$

donc

$$\frac{\alpha-\alpha'}{\alpha+\beta} = \frac{\beta-\beta'}{\alpha+\beta}, \quad \text{ou} \quad \alpha'-\beta' = \alpha-\beta.$$

La forme de cette équation nous montre que le centre de courbure est sur une ligne qui passe par le centre biangulaire.

En outre, le dénominateur du troisième membre des équations qui déterminent les coordonnées du centre de courbure est nul, comme il est facile de le voir. Par conséquent,

$$\alpha' = \infty, \quad \beta' = \infty.$$

Le centre de courbure coïncide donc avec le centre biangulaire ; ce qui est évident, puisque la courbe est un cercle dont le centre coïncide avec le centre biangulaire.

14. Tangente indéterminée. — Supposons que, pour un couple particulier de valeurs de θ et φ, $\frac{dF}{d\theta}$, $\frac{dF}{d\varphi}$ soient nuls tous les deux. Alors, en supposant que les premiers coefficients aux différences partielles qui ne s'annulent pas soient de l'ordre n, on a

$$\left(d\theta \frac{d}{d\theta} + d\varphi \frac{d}{d\varphi}\right)^n F = 0.$$

De plus

$$d\alpha = -\operatorname{coséc}^2\theta\, d\theta, \quad d\beta = -\operatorname{coséc}^2\varphi\, d\varphi.$$

Par suite, l'équation de la tangente en un point peut s'écrire

$$(\alpha' - \alpha)\frac{\sin^2\theta}{d\theta} = (\beta' - \beta)\frac{\sin^2\varphi}{d\varphi},$$

et les équations des tangentes au point (θ, φ) sont renfermées dans l'équation

$$\left[(\alpha' - \alpha)\sin^2\theta \frac{d}{d\theta} + (\beta' - \beta)\sin^2\varphi \frac{d}{d\varphi}\right]^n F = 0.$$

Il faut remarquer qu'il n'est pas nécessairement vrai, comme dans la proposition correspondante en coordonnées bilinéaires, que, réciproquement, s'il y a plusieurs tangentes en un point, on a

$$\frac{dF}{d\theta} = 0, \quad \frac{dF}{d\varphi} = 0.$$

(*Voyez*, par exemple, la courbe étudiée dans l'article **12**.)

Cherchons les équations des tangentes à la courbe

$$F = [(\theta - \theta_1)^2 + (\varphi - \varphi_1)^2]^2 - (\theta - \theta_1)^2 + (\varphi - \varphi_1)^2 = 0$$

au point (θ_1, φ_1).

Il est facile de voir que l'on a

$$\frac{dF}{d\theta} = 0, \quad \frac{dF}{d\varphi} = 0, \quad \frac{d^2F}{d\theta^2} = -2, \quad \frac{d^2F}{d\theta\, d\varphi} = 0, \quad \frac{d^2F}{d\varphi^2} = 2.$$

L'équation des tangentes correspondantes est

$$(\alpha' \sin\theta_1 - \cos\theta_1)^2 \sin^2\theta_1 = (\beta' \sin\varphi_1 - \cos\varphi_1)^2 \sin^2\varphi_1.$$

Cette équation est équivalente aux deux suivantes :

$$(1) \qquad \alpha' \sin^2\theta_1 - \beta' \sin^2\varphi_1 = \cos\theta_1 \sin\theta_1 - \sin\varphi_1 \cos\varphi_1,$$

$$(2) \qquad \alpha' \sin^2\theta_1 + \beta' \sin^2\varphi_1 = \cos\theta_1 \sin\theta_1 + \sin\varphi_1 \cos\varphi_1.$$

Supposons $\theta_1 = \varphi_1$, les équations (1) et (2) deviennent

$$\alpha' - \beta' = 0, \quad \alpha' + \beta' = 2 \cot\theta_1.$$

Si, en outre, $\theta_1 = 0$, on voit que les équations des tangentes au point (0, 0) de la courbe

$$(\theta^2 + \varphi^2)^2 = \theta^2 - \varphi^2$$

sont

$$\alpha' - \beta' = 0, \quad \alpha' + \beta' = \infty,$$

la première représentant une ligne passant par le centre biangulaire et perpendiculaire sur la ligne des pôles, la seconde représentant la ligne des pôles elle-même.

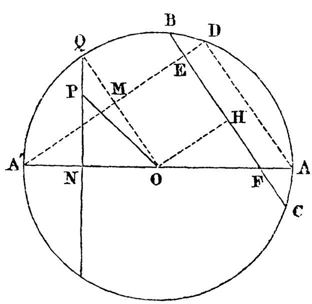
DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE D'UN THÉORÈME SUR L'ELLIPSE;

PAR LE RÉV. H.-G. DAY.

(*The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics;* avril 1869.)

Si, d'un point P d'une ellipse, je mène une perpendiculaire sur le grand axe, et que je la prolonge jusqu'au point Q où elle rencontre le cercle décrit sur le grand axe comme diamètre, le diamètre qui passe par le point P sera égal à la corde menée dans le cercle par le point F parallèlement au rayon OQ.

Je mène AD parallèlement à OQ, et je joins le point D au point A'. Les deux triangles A'MO, QNO sont évidemment égaux.



Nous avons, d'après une propriété connue de l'ellipse,

$$\frac{PN^2}{QN^2} = \frac{BE.FC}{OA^2},$$

ou

$$\frac{PN^2}{QN^2} = \frac{DE.EA'}{A'M^2} = \frac{DE.EA'}{QN};$$

Donc

$$PN^2 = DE.EA'.$$

Je mène OH parallèle à A′D, et j'ai

$$ON^2 = OM^2 = EH^2.$$

Donc

$$PN^2 + ON^2 = BE.EC + EH^2,$$

ou

$$PN^2 + ON^2 = BH^2.$$

Donc enfin

$$OP = BH = \tfrac{1}{2}BC.$$

C. Q. F. D.

Note du traducteur. — On peut de là déduire une démonstration très-simple du théorème d'Apollonius, à savoir : que la somme des carrés de deux diamètres conjugués est égale à la somme des carrés des axes.

En effet, on sait que, si l'on prend le point Q′ analogue au point Q et correspondant à l'extrémité P′ du diamètre conjugué de OP, les deux lignes OQ, OQ′ sont à angle droit; il en sera donc de même de leurs parallèles BFC, bFc menées par le point F. Donc on aura

$$\begin{aligned} BC^2 + bc^2 &= (BF + FC)^2 + (bF + Fc)^2 \\ &= BF^2 + FC^2 + bF^2 + Fc^2 + 2BF.FC + 2bF.Fc. \end{aligned}$$

Or on a, d'après une propriété connue,

$$BF^2 + FC^2 + bF^2 + Fc^2 = 4a^2,$$

et

$$BF.FC = bF.Fc = b^2.$$

Donc enfin, on a

$$BC^2 + bc^2 = 4a^2 + 4b^2.$$

C. Q. F. D.

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL DE 1870;

Par M. AUGIER,
Élève de Mathématiques spéciales au lycée de Lyon.

On donne dans un plan deux ellipses ayant leurs axes dirigés suivant les mêmes droites; on considère deux cônes égaux, de même sommet, et ayant respectivement pour directrices les deux coniques données. On demande le lieu des sommets de ces cônes.

Je prends pour origine le centre commun des deux ellipses, pour axes des x et des y les axes communs aux deux courbes, et pour axe des z une perpendiculaire à leur plan.

Les équations des deux ellipses données sont dans le plan des x, y :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \tag{1}$$

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} - 1 = 0. \tag{2}$$

Soit M un point du lieu; soient (α, β, γ) ses coordonnées.

Je cherche l'équation du cône ayant pour sommet le point M et pour directrice l'ellipse (1).

Soit $P(x', y')$ un point de l'ellipse (1); soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque de MP, k étant le rapport dans lequel ce point divise le segment MP : on aura

$$x' = \frac{\alpha + kx}{1 + k}, \quad y' = \frac{\beta + ky}{1 + k}, \quad 0 = \frac{\gamma + kz}{1 + k},$$

et l'équation du cône s'obtiendra en éliminant k entre les deux équations :

$$\frac{(\alpha + kx)^2}{a^2(1+k)^2} + \frac{(\beta + ky)^2}{b^2(1+k)^2} - 1 = 0,$$

$$\gamma + kz = 0.$$

Il vient ainsi

$$\text{(I)} \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\gamma^2}{a^2} x^2 + \frac{\gamma^2}{b^2} y^2 + \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1 \right) z^2 \\ & - 2\frac{\beta\gamma}{b^2} yz - 2\frac{\alpha\gamma}{a^2} xz + 2\gamma z - \gamma^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

L'équation du second cône, ayant son sommet en M et pour directrice l'ellipse (2), s'obtiendra en changeant, dans cette équation, a en a_1, b en b_1 :

$$\text{(II)} \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\gamma^2}{a_1^2} x^2 + \frac{\gamma^2}{b_1^2} y^2 + \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1 \right) z^2 \\ & - 2\frac{\beta\gamma}{b_1^2} yz - 2\frac{\alpha\gamma}{a_1^2} xz + yz - \gamma^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Soient

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} & S^3 - mS^2 + nS + p = 0, \\ & S^3 - m_1 S_2 + n_1 S + p_1 = 0 \end{aligned} \right.$$

les deux équations en S relatives aux cônes (I) et (II).

Soient S, S′, S″ les racines de la première équation.

Soient S_1, S'_1, S''_1 les racines de la seconde.

Si l'on rapporte *respectivement* à leurs plans principaux les cônes (I) et (II), ils auront pour équations :

$$Sx^2 + S'y^2 + S''z^2 = 0,$$

$$S_1 x^2 + S'_1 y^2 + S''_1 z^2 = 0.$$

Ces deux cônes devant être égaux :

$$\frac{S}{S_1} = \frac{S'}{S'_1} = \frac{S''}{S''_1},$$

j'exprime que les équations (3) ont leurs racines proportionnelles, il vient, k étant une constante arbitraire,

$$(4) \qquad k = \frac{m_1}{m}, \quad k^2 = \frac{n_1}{n}, \quad k^3 = \frac{p_1}{p}.$$

Je forme les quantités (m, n, p), (m_1, n_1, p_1) ; il vient :

$$m = \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \gamma^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) - 1,$$

$$n = \frac{\gamma^2}{a^2 b^2}\left[\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - (a^2 + b^2)\right],$$

$$p = \frac{\gamma^4}{a^2 b^2};$$

$$m_1 = \frac{\alpha^2}{a_1^2} + \frac{\beta^2}{b_1^2} + \gamma^2\left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{b_1^2}\right) - 1,$$

$$n_1 = \frac{\gamma^2}{a_1^2 b_1^2}\left[\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - (a_1^2 + b_1^2)\right],$$

$$p_1 = \frac{\gamma^4}{a_1^2 b_1^2}.$$

Je remplace ces valeurs dans la relation (4) :

$$k = \frac{\dfrac{\alpha^2}{a_1^2} + \dfrac{\beta^2}{b_1^2} + \gamma^2\left(\dfrac{1}{a_1^2} + \dfrac{1}{b_1^2}\right) - 1}{\dfrac{\alpha^2}{a^2} + \dfrac{\beta^2}{b^2} + \gamma^2\left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}\right) - 1},$$

$$k^2 = \frac{a^2 b^2}{a_1^2 b_1^2}\,\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - (a_1^2 + b_1^2)}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - (a^2 + b^2)},$$

$$k^3 = \frac{a^2 b^2}{a_1^2 b_1^2}.$$

J'aurai les équations du lieu des points M, en éliminant k entre ces trois dernières relations, et remplaçant (α, β, γ) par (x, y, z).

Il vient ainsi, après avoir posé

$$\frac{ab}{a_1 b_1} = \mathrm{H},$$

H représentant le rapport des aires des deux ellipses données

$$\frac{\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}+z^2\left(\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{b_1^2}\right)-1}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+z^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)-1}=\mathrm{H}^{\frac{2}{3}},$$

$$\frac{x^2+y^2+z^2-(a_1^2+b_1^2)}{x^2+y^2+z^2-(a^2+b^2)}=\frac{1}{\mathrm{H}^{\frac{2}{3}}}.$$

Ces deux équations peuvent s'écrire

$$(\mathrm{III})\left\{\begin{aligned}&x^2+y^2+z^2-\frac{a^2+b^2-\mathrm{H}^{\frac{2}{3}}(a_1^2+b_1^2)}{1-\mathrm{H}^{\frac{2}{3}}}=0,\\ &x^2\,\frac{\frac{1}{a_1^2}-\frac{\mathrm{H}^{\frac{2}{3}}}{a^2}}{1-\mathrm{H}^{\frac{2}{3}}}+y^2\,\frac{\frac{1}{b_1^2}-\frac{\mathrm{H}^{\frac{2}{3}}}{b^2}}{1-\mathrm{H}^{\frac{2}{3}}}\\ &\qquad+z^2\,\frac{\left(\frac{1}{a_1^2}-\frac{\mathrm{H}^{\frac{2}{3}}}{a^2}\right)+\left(\frac{1}{b_1^2}-\frac{\mathrm{H}^{\frac{2}{3}}}{b^2}\right)}{1-\mathrm{H}^{\frac{2}{3}}}-1=0.\end{aligned}\right.$$

Ce sont les deux équations du lieu.

La première représente une sphère ayant son centre à l'origine; la seconde, une surface du second ordre, ayant pour plans principaux les trois plans de coordonnées.

Le lieu est donc une courbe *gauche sphérique,* symétrique par rapport aux trois plans de coordonnées.

En éliminant successivement x, y, z entre les deux équations (3), on obtient les équations de trois cylindres du second degré parallèles aux axes et passant par la courbe gauche.

Ceci pouvait se voir *à priori,* car, les deux surfaces (III) ayant trois plans principaux communs, les projections de leur intersection sur ces trois plans principaux sont trois coniques.

Si l'on élimine les termes constants entre les deux équations (3), on obtient un cône du second degré rapporté à ses trois plans principaux et passant par la courbe gauche sphérique.

Je cherche les conditions pour que la courbe (III) soit plane. Le lieu se composera alors de deux cercles.

Pour abréger, j'écris sous la forme suivante les deux équations (III) :

$$\text{(III } bis\text{)} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0, \\ Mx^2 + Ny^2 + (M + N)z^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

L'équation générale des surfaces du second ordre passant par l'intersection des deux surfaces (III *bis*), est

$$(M + \lambda)x^2 + (N + \lambda)y^2 + (M + N + \lambda)z^2 - (\lambda R^2 + 1) = 0.$$

Pour que la courbe soit plane, il faut et il suffit que cette équation représente deux plans. Or cette équation peut représenter deux plans de *six manières différentes,* ce qui donne successivement les six conditions :

1° $M - N = 0$, ou bien, en remplaçant M et N par leurs valeurs, c et c_1 désignant les distances focales des deux ellipses,

$$\frac{c}{c_1} = H^{\frac{2}{3}};$$

2° $M = 0$, ou, en remplaçant M par sa valeur,

$$\frac{a}{a_1} = H^{\frac{1}{3}};$$

3° $N = 0$,

$$\frac{b}{b_1} = H^{\frac{1}{3}};$$

4° $MR^2 = 1$, ou, en remplaçant M et R^2 par leurs valeurs,

$$\left(1 - H^{\frac{2}{3}}\right)^2 = \left(\frac{1}{a_1^2} - \frac{H^{\frac{2}{3}}}{a^2}\right)\left[a^2 + b^2 - H^{\frac{2}{3}}(a_1^2 + b_1^2)\right];$$

5° $NR^2 = 1$,

$$\left(1 - H^{\frac{2}{3}}\right)^2 = \left(\frac{1}{b_1^2} - \frac{H^{\frac{2}{3}}}{b^2}\right)\left[a^2 + b^2 - H^{\frac{2}{3}}(a_1^2 + b_1^2)\right];$$

6° $(M + N)R^2 = 1$,

$$\left(1 - H^{\frac{2}{3}}\right)^2 = \left(\frac{a_1^2 + b_1^2}{a_1^2 b_1^2} - H^{\frac{2}{3}}\frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}\right)\left[a^2 + b^2 - H^{\frac{2}{3}}(a_1^2 + b_1^2)\right].$$

Suivant ces différentes conditions, les cercles seront réels ou imaginaires.

On peut remarquer que, si $H^{\frac{3}{3}} = 1$, ce qui donne $ab = a_1 b_1$, c'est-à-dire si les aires des deux ellipses sont égales, ce qui comprend le cas particulier où les deux ellipses seraient égales, la courbe s'éloigne à l'infini sur le cône :

$$x^2\left(\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a^2}\right) + y^2\left(\frac{1}{b_1^2} - \frac{1}{b^2}\right) + z^2\left(\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b_1^2} - \frac{1}{b^2}\right) = 0,$$

ce cône pouvant d'ailleurs être réel ou imaginaire.

La condition pour que la sphère soit réelle est

$$(5) \qquad H^{\frac{2}{3}} < \frac{a^2 + b^2}{a_1^2 + b_1^2};$$

car on peut supposer $1 - H^{\frac{2}{3}} > 0$.

En effet, $H = \frac{ab}{a_1 b_1}$, et l'on peut toujours supposer que a et b désignent les axes de l'ellipse qui a la plus petite surface.

La relation (5) peut s'interpréter géométriquement. $\frac{a^2+b^2}{a_1^2+b_1^2}$ représente le rapport des aires des deux cercles concentriques, lieux des sommets des angles droits circonscrits à chacune des deux ellipses; il faut que ce rapport soit supérieur à la puissance $\frac{2}{3}$ du rapport des aires des deux ellipses correspondantes.

La condition (5) est une condition *nécessaire* de réalité de la courbe; mais elle n'est pas suffisante.

Il faut, de plus, que la seconde surface (III) soit réelle, et qu'elle coupe la sphère. On aura ces conditions de réalité en exprimant que le plus petit des axes réels des différentes surfaces représentées par la seconde équation (III) est inférieur au rayon de la sphère.

Les conditions pour que la seconde surface (III *bis*) soit réelle sont que M et N doivent être simultanément positifs ou de signes contraires, en se rappelant que

$$1 - H^{\frac{2}{3}} > 0.$$

D'ailleurs ces conditions de réalité ne présentent point d'intérêt.

QUESTION.

1017. On coupe une surface du second degré par un plan; aux différents points de l'intersection on mène les normales à la surface; par un point de l'espace, on mène des droites égales et parallèles aux longueurs interceptées sur ces normales entre leur pied sur la surface et le plan de symétrie. Les extrémités de toutes ces droites se trouvent sur une conique.

(E. LAGUERRE.)

PROPRIÉTÉS DES SYSTÈMES DE CONIQUES RELATIVES, TOUTES, A CERTAINES SÉRIES DE NORMALES EN RAPPORT AVEC D'AUTRES LIGNES OU DIVERS POINTS;

Par M. CHASLES.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXII.)

Les systèmes de coniques donnent lieu à d'innombrables théorèmes concernant particulièrement leurs tangentes, leurs diamètres, leurs normales, les pôles de certaines droites, les polaires de certains points, etc. Il est fort difficile de classer de si nombreuses propositions, de manière à y recourir au besoin; d'autant plus que souvent dans une même proposition se trouvent diverses espèces de ces données principales à chacune desquelles on pourrait les rattacher.

Mais il en est dans lesquelles se trouve quelque condition générale de perpendicularité entre certaines séries de droites; et ce caractère spécial permet de les réunir. Il se subdivise même, à l'égard des propositions qui concernent particulièrement les normales aux coniques d'un système. Cette classe particulière, fort importante, suffit déjà pour donner lieu à de très-nombreuses propositions. Ce sont ces propositions qui font le sujet de ma Communication de ce jour.

Je les rangerai en trois paragraphes. Dans le premier sont des propositions diverses, c'est-à-dire qui ne présentent pas un caractère commun. Le deuxième renferme des propositions dans lesquelles une série de droites rencontrent une droite fixe en des points d'où partent d'autres droites dont on demande la courbe enveloppe, ou qui déterminent certains points dont on cherche le lieu, ou se prêtent à diverses autres conditions. Dans le troisième paragraphe se trouvent des conditions de parallélisme et de perpendicularité, mais toutes relatives à quelque série de normales parallèles ou perpendiculaires à quelque autre série de droites.

Toutes les conditions qu'indique un énoncé de théorème concernent une même conique, mais s'étendent à toutes les coniques du système : d'après cela, on peut éviter le plus souvent de prononcer le mot *conique* dans les énoncés, ce qui les abrége et en facilite l'intelligence rapide.

Toutes les propositions dont je donne ici les énoncés ont été démontrées d'une manière générale par le *principe de correspondance,* bien qu'un certain nombre se puissent conclure de quelques cas particuliers, notamment quand il se trouve certains points ou droites fixes dans les conditions de la question. Ces cas particuliers peuvent être d'un secours très-utile, comme vérification, quand il se trouve, dans les démonstrations générales par le *principe de correspondance,* des solutions étrangères, parfois variées et difficiles à découvrir.

Un théorème donne lieu très-souvent à un ou à deux autres, dans lesquels la conclusion du premier devient le point de départ, c'est-à-dire une condition de la question.

Ces théorèmes se trouvent sous le même numéro que celui d'où ils découlent, et portent les lettres a et b. Mais j'en donnerai aussi la démonstration directe, qui exige généralement des considérations différentes de celles qui ont servi dans la démonstration du théorème primitif, et souvent aussi des difficultés différentes.

§ I. — *Théorèmes divers.*

1. Les droites menées d'un point Q aux pieds des normales abaissées d'un point N rencontrent les coniques en des points situés sur une courbe de l'ordre $6\mu + \nu$, qui a en Q un point multiple d'ordre 4μ.

a. Si d'un point Q on mène des droites aux points des coniques situés sur une droite D, et qu'aux points où ces droites rencontrent de nouveau les coniques on mène les normales, ces normales enveloppent une courbe de la classe $6\mu + \nu$.

b. Si des pieds des normales abaissées d'un point N on mène des droites aux points des coniques situés sur une droite D, ces droites enveloppent une courbe de la classe $6\mu + \nu$.

2. Par un point N, on mène les normales à chaque conique; chacune d'elles rencontre les autres en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $6\mu + 9\nu$, qui a en N un point multiple d'ordre $3\mu + 6\nu$.

La courbe a $6\mu + 9\nu$ points à l'infini; d'où l'on conclut que :

Un point N étant donné, il y a $6\mu + 9\nu$ coniques dans lesquelles deux des normales menées par ce point sont rectangulaires.

3. D'un point S on mène deux tangentes à chaque conique; la normale au point de contact de l'une rencontre l'autre en un point dont le lieu est une courbe d'ordre $\mu + 3\nu$ qui a en S un point multiple d'ordre $\mu + 2\nu$.

4. D'un point S, on mène à chaque conique des tangentes et le diamètre; les normales aux points de contact des tangentes rencontrent le diamètre en des points situés sur une courbe de l'ordre $\mu + 4\nu$, qui a en S un point multiple d'ordre $\mu + 2\nu$.

5. Si d'un point S on mène deux tangentes à chaque conique, les normales aux points de contact se coupent sur une courbe de l'ordre $\mu + 2\nu$.

6. Les normales aux points de contact des tangentes menées d'un point S ont leurs extrémités sur une courbe d'ordre $3\mu + 3\nu$.

a. Si des points de chaque conique sur une droite D on abaisse des normales, les tangentes aux pieds de ces normales enveloppent une courbe de la classe $3\mu + 3\nu$.

7. Les normales abaissées des points de contact des tangentes issues d'un point S ont leurs pieds sur une courbe de l'ordre $5\mu + 3\nu$.

Les points de la courbe situés à l'infini sont : 1° deux points multiples imaginaires, d'ordre 2μ, aux points circulaires; 2° les points de contact des $\mu + \nu$ asymptotes des coniques, qui passent par S; et 3° les points de contact des ν coniques tangentes à la droite de l'infini, dont chacun compte pour deux.

8. Si des points de contact des tangentes issues d'un point S on abaisse des normales sur les coniques, ces normales enveloppent une courbe de la classe $3\mu + 2\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre $\mu + \nu$ à l'infini.

a. Si d'un point N on abaisse des normales sur les coniques, les tangentes à leurs extrémités enveloppent une courbe de la classe $3\mu + 2\nu$.

9. Si des points de contact des tangentes issues d'un point S on abaisse des normales, les tangentes en leurs pieds enveloppent une courbe de la classe $2\mu + 3\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre 2ν à l'infini.

a. Si l'on mène les normales aux points de contact des tangentes issues d'un point S, les tangentes aux extrémités de ces normales enveloppent une courbe de la classe $2\mu + 3\nu$.

10. Si l'on mène les normales aux points de contact

des tangentes issues d'un point S, les tangentes aux extrémités de ces normales rencontrent les tangentes issues de S en des points dont le lieu est une courbe d'ordre $2\mu + 2\nu$, qui a en S un point multiple d'ordre $2\mu + \nu$.

11. Les normales aux deux points de chaque conique sur une droite D ont leurs points d'intersection sur une courbe d'ordre $\mu + \nu$.

12. La tangente en l'un des deux points de chaque conique sur une droite D rencontre la normale à l'autre point, sur une courbe de l'ordre $3\mu + 2\nu$.

13. Aux points a des coniques sur une droite D on mène les normales, et par des points a' d'une autre droite D', qui correspondent anharmoniquement aux points a, on mène des parallèles à ces normales : ces parallèles enveloppent une courbe de la classe $3\mu+\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre $2\mu+\nu$, coïncidante avec D'.

14. Par un point N on mène des normales et des tangentes à chaque conique, et aux points de contact de ces tangentes on mène d'autres normales : celles-ci rencontrent les premières en des points situés sur une courbe de l'ordre $6\mu + 10\nu$, qui a en N un point multiple d'ordre $2\mu + 2\nu$.

15. Les diamètres qui partent des pieds des normales abaissées d'un point N enveloppent une courbe de la classe $3\mu + 2\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre ν à l'infini.

a. Les normales aux extrémités des diamètres menés par un point P enveloppent une courbe de la classe $3\mu + 2\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre $\mu + 2\nu$ à l'infini.

16. Si d'un point N on mène les normales et les cordes qui leur sont perpendiculaires, les extrémités de ces cordes sont sur une courbe de l'ordre $6\mu + 2\nu$ qui a en N un point multiple d'ordre 4μ.

17. Si d'un point N on mène des normales, les droites qui joignent leurs pieds aux pôles d'une droite fixe enveloppent une courbe de la classe $3\mu + 3\nu$.

a. Si d'un point on mène des droites aux pôles d'une droite, les normales aux points où ces droites rencontrent les coniques enveloppent une courbe de la classe $3\mu + 3\nu$.

18. Si l'on mène d'un point N des normales et des tangentes à chaque conique, ces tangentes rencontrent les tangentes aux pieds des normales en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $\mu + 6\nu$, qui a un point multiple d'ordre $\mu + 2\nu$ en N.

19. Si par les pôles d'une droite on mène les normales, elles enveloppent une courbe de la classe $2\mu + 3\nu$.

a. Si d'un point N on mène des normales, il y a $2\mu + 3\nu$ coniques dans lesquelles une normale passe par le pôle d'une droite donnée.

20. Les normales abaissées d'un point N rencontrent les polaires d'un point P en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $5\mu + \nu$, qui a un point multiple d'ordre 4μ en N.

a. Si par les points où les polaires d'un point P rencontrent une droite D on mène les normales, ces normales enveloppent une courbe de la classe $5\mu + \nu$, qui a une tangente multiple d'ordre $\mu + \nu$, coïncidante avec D.

§ II. — *Théorèmes dans lesquels une série de droites rencontrent une droite fixe Δ en des points d'où partent d'autres droites.*

21. Si d'un point N on mène des normales, et que par les points où elles rencontrent une droite Δ on mène de nouvelles normales, celles-ci enveloppent une courbe de la classe $7\mu + 7\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre $4\mu + 4\nu$ coïncidante avec Δ.

a. Si de deux points N, N′ on mène des normales à chaque conique, les points d'intersection de ces normales sont sur une courbe de l'ordre $7\mu + 7\nu$, qui a deux points multiples d'ordre $3\mu + 3\nu$, en N et N′.

22. Si d'un point N on mène des normales, et que par les points où elles rencontrent une droite Δ on mène de nouvelles normales : celles-ci ont leurs pieds sur une courbe de l'ordre $8\mu + 5\nu$.

a. Si aux points des coniques sur une droite D on mène les normales, et que par les points où elles rencontrent une droite Δ on mène de nouvelles normales, celles-ci enveloppent une courbe de la classe $8\mu + 5\nu$.

b. Les normales menées par un point N rencontrent les normales aux points d'une droite D en des points situés sur une courbe de l'ordre $8\mu + 5\nu$, qui a en N un point multiple de l'ordre $6\mu + 3\nu$.

23. Les normales menées d'un point N rencontrent une droite Δ en des points d'où l'on mène de nouvelles normales : celles-ci rencontrent les tangentes aux pieds des premières, en des points situés sur une courbe de l'ordre $10\mu + 13\nu$.

24. Par un point N on mène les normales, et par les points où les tangentes en leurs pieds rencontrent une droite Δ on mène d'autres normales : celles-ci rencontrent les premières en des points dont le lieu est une courbe d'ordre $10\mu + 13\nu$, qui a en N un point multiple d'ordre $6\mu + 9\nu$.

25. D'un point N on mène des normales, et par les points où elles rencontrent une droite Δ on mène les diamètres : ces diamètres enveloppent une courbe de la classe $\mu + 5\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre 4ν coïncidante avec Δ.

a. Si d'un point P on mène les diamètres des coniques, les normales menées par les points où ils rencontrent une droite Δ enveloppent une courbe de la classe $\mu + 5\nu$.

b. Les normales menées par un point N rencontrent les diamètres menés par un point P en des points situés sur une courbe d'ordre $\mu + 5\nu$, qui a en N un point multiple d'ordre 4ν, et en P un point multiple d'ordre $\mu + \nu$.

26. D'un point N on mène des normales, et par les points où elles rencontrent une droite Δ on mène les diamètres des coniques : les conjuguées de ces diamètres enveloppent une courbe de la clase $5\mu + 5\nu$.

a. D'un point P on mène les diamètres des coniques, et par les points où les diamètres conjugués rencontrent une droite Δ on mène les normales : ces normales enveloppent une courbe de la classe $5\mu + 5\nu$.

b. D'un point N on mène des normales, et d'un point P les diamètres : les diamètres conjugués rencontrent les normales en des points situés sur une courbe de l'ordre $5\mu + 5\nu$, qui a un point multiple d'ordre $4\mu + 4\nu$ en N.

27. D'un point N on mène les normales, et par les points où elles rencontrent une droite Δ on mène les tangentes : ces tangentes enveloppent une courbe de la classe $2\mu + 6\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre 4ν coïncidante avec Δ.

a. Si d'un point S on mène des tangentes, et que par les points où elles rencontrent une droite Δ on mène des normales, ces normales enveloppent une courbe de la classe $2\mu + 6\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre $2\mu + 2\nu$ coïncidante avec Δ.

b. Si d'un point N on mène des normales, et d'un point S des tangentes, ces tangentes rencontrent les normales en des points dont le lieu est une courbe d'ordre $2\mu + 6\nu$, qui a un point multiple d'ordre 4ν en N, et un point multiple d'ordre $2\mu + 2\nu$ en S.

28. Si d'un point N on mène les normales aux coniques, et que par les points où elles rencontrent une droite Δ on mène des tangentes, les normales aux points de contact de ces tangentes enveloppent une courbe de la classe $8\mu + 12\nu$.

a. Si d'un point N on mène des normales, et par leurs pieds des tangentes, et que par les points où ces tangentes rencontrent une droite Δ on mène d'autres normales, celles-ci enveloppent une courbe de la classe $8\mu + 12\nu$.

b. Si de deux points N, N' on mène des normales, les normales issues de N' rencontrent les tangentes aux pieds des normales issues de N, en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $8\mu + 12\nu$, qui a en N' un point multiple d'ordre $4\mu + 8\nu$.

29. D'un point N on mène des normales, et par leurs pieds on mène les tangentes; par les points où ces tangentes rencontrent une droite Δ on mène de nouvelles tangentes : celles-ci enveloppent une courbe de la classe $\mu + 6\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre 4ν coïncidante avec Δ.

a. Si d'un point S on mène des tangentes, et que par les points où elles rencontrent une droite Δ on mène de nouvelles tangentes, les normales en leurs points de contact enveloppent une courbe de la classe $\mu + 6\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre 4ν coïncidante avec Δ.

b. D'un point N on mène des normales, et d'un point S des tangentes : ces tangentes rencontrent les tangentes aux pieds des normales en des points situés sur une courbe de l'ordre $\mu + 6\nu$, qui a en S un point multiple de l'ordre $\mu + 2\nu$.

30. D'un point N on mène les normales, et par les

points où elles rencontrent une droite Δ on mène les tangentes : les points de contact de ces tangentes sont sur une courbe d'ordre $6\mu + 6\nu$.

a. Si l'on mène les tangentes aux coniques en leurs points sur une droite D, et que par les points où ces tangentes rencontrent une droite Δ on mène les normales, ces normales enveloppent une courbe de la classe $6\mu + 6\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre $2\mu + 2\nu$ coïncidante avec D.

b. Les normales menées par un point N rencontrent les tangentes aux points d'une droite en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $6\mu + 6\nu$, qui a un point multiple d'ordre $4\mu + 4\nu$ en N.

31. Si par les points où les normales aux points d'une droite D rencontrent une droite Δ on mène de nouvelles normales, les pieds de celles-ci sont sur une courbe de l'ordre $8\mu + 4\nu$.

a. Les coniques étant coupées par deux droites D, D′, les normales aux points de l'une rencontrent les normales aux points de l'autre en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $8\mu + 4\nu$, qui a un point multiple d'ordre μ en (D, D′).

32. Aux points des coniques sur une droite D on mène les normales, et par les points où elles rencontrent une droite Δ on mène des tangentes : ces tangentes enveloppent une courbe de la classe $4\mu + 4\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre 2ν coïncidante avec Δ.

a. Si d'un point S on mène des tangentes, et que par les points où elles rencontrent une droite Δ on mène des normales, les pieds de ces normales sont sur une courbe de l'ordre $4\mu + 4\nu$.

b. Si aux points des coniques sur une droite D on mène les normales, et que par un point S on mène des tangentes, ces tangentes rencontrent les normales en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $4\mu + 4\nu$, qui a en S un point multiple d'ordre $4\mu + 2\nu$.

33. Si par les points où les normales aux points d'une droite D rencontrent une droite Δ on mène des tangentes, les points de ces tangentes sont sur une courbe de l'ordre $6\mu + 4\nu$.

a. Si par les points où les tangentes aux points d'une droite rencontrent une droite Δ on mène des normales, les pieds de ces normales sont sur une courbe de l'ordre $6\mu + 4\nu$.

b. Les coniques étant coupées par deux droites D, D', aux points de D on mène les normales, et aux points de D' les tangentes : ces tangentes rencontrent les normales en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $6\mu + 4\nu$, qui a un point multiple d'ordre μ au point (D, D').

34. Au point *a* de chaque conique sur une droite D on mène la normale, et par le point où elle rencontre une droite Δ on mène des tangentes, lesquelles rencontrent la tangente du point *a* en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $3\mu + 4\nu$, qui a un point multiple d'ordre μ au point (D, Δ).

a. Si en chaque point *a* d'une droite D on mène la tangente et la normale, et que par le point où la tangente rencontre une droite Δ on mène une seconde tangente, celle-ci rencontre la normale en un point situé sur une courbe d'ordre $3\mu + 4\nu$, qui a un point multiple d'ordre μ en (D, Δ).

35. Aux points des coniques sur une droite D on mène les normales, et par les points où elles rencontrent une droite Δ on mène les diamètres : ces diamètres enveloppent une courbe de la classe $2\mu + 3\nu$.

a. Si par un point P on mène les diamètres des coniques, et que par les points où ils rencontrent une droite Δ on mène les normales, les pieds de ces normales sont sur une courbe de l'ordre $2\mu + 3\nu$.

b. Les normales aux points *a* des coniques sur une droite D rencontrent les diamètres menés par un point P en des points situés sur une courbe de l'ordre $2\mu + 3\nu$, qui a un point multiple d'ordre $2\mu + \nu$ en P.

36. Si des points des coniques sur une droite D on abaisse les normales, et que par les points où elles rencontrent une droite Δ on mène les diamètres, ces diamètres enveloppent une courbe de la classe $4\mu + 7\nu$.

a. Si d'un point P on mène les diamètres des coniques, et que par les points où ils rencontrent une droite Δ on mène les normales, les extrémités de ces normales sont sur une courbe de l'ordre $4\mu + 7\nu$.

b. Des points des coniques sur une droite D on abaisse les normales, et d'un point P on mène les diamètres : ces diamètres rencontrent les normales en des points situés sur une courbe de l'ordre $4\mu + 7\nu$, qui a un point multiple d'ordre μ en P, et $\mu + 2\nu$ points triples sur D.

37. Les normales aux points de contact des tangentes issues d'un point S rencontrent une droite Δ en des points par lesquels on mène des tangentes : ces tangentes enveloppent une courbe de la classe $2\mu + 6\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre 2ν coïncidante avec Δ.

a. Si d'un point S on mène des tangentes, et que des points où elles rencontrent une droite D on abaisse des normales, les tangentes menées par les pieds de ces normales enveloppent une courbe de la classe $2\mu + 6\nu$.

b. Si de deux points S, S′ on mène des tangentes aux coniques, les normales aux points de contact des tangentes issues de S rencontrent les tangentes issues de S′ en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $2\mu + 4\nu$ en S′.

38. D'un point S on mène des tangentes, et des points où elles rencontrent une droite Δ on mène d'autres tangentes : les normales aux points de contact de celles-ci

rencontrent les premières tangentes en des points situés sur une courbe de l'ordre $\mu + 7\nu$.

a. Si d'un point S on mène des tangentes, et que des points où elles rencontrent une droite Δ on mène des normales, les tangentes aux pieds de ces normales rencontrent les tangentes issues de S en des points situés sur une courbe de l'ordre $\mu + 7\nu$, qui a un point multiple d'ordre $\mu + 3\nu$ en S.

39. D'un point S on mène des tangentes; les normales aux points de contact rencontrent une droite Δ en des points d'où l'on mène d'autres tangentes : celles-ci rencontrent les premières en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $2\mu + 8\nu$, qui a un point multiple d'ordre $2\mu + 6\nu$ en S.

a. D'un point S on mène des tangentes, et par les points où elles rencontrent une droite Δ on mène d'autres tangentes : celles-ci rencontrent les normales aux points de contact des premières, en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $2\mu + 8\nu$.

40. Les normales aux points de contact des tangentes issues d'un point S rencontrent une droite Δ en des points par lesquels on mène les diamètres : ces diamètres enveloppent une courbe de la classe $\mu + 4\nu$.

a. Les diamètres menés d'un point P rencontrent une droite Δ en des points d'où l'on mène les normales : les tangentes aux pieds de ces normales enveloppent une courbe de la classe $\mu + 4\nu$.

b. Les normales aux points de contact des tangentes issues d'un point S rencontrent les diamètres menés d'un point P en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $\mu + 4\nu$, qui a en P un point multiple d'ordre $\mu + 2\nu$.

41. Des points de contact des tangentes issues d'un point S on abaisse des normales, et par les points où elles rencontrent une droite Δ on mène les diamètres : ces

diamètres enveloppent une courbe de la classe $3\mu + 8\nu$.

a. Si par les points où les diamètres issus d'un point P rencontrent une droite Δ on mène les normales, les tangentes aux extrémités de ces normales enveloppent une courbe de la classe $3\mu + 8\nu$.

b. Les normales abaissées des points de contact des tangentes issues d'un point S rencontrent les diamètres menés par un point P en des points situés sur une courbe de l'ordre $3\mu + 8\nu$, qui a un point multiple d'ordre $3\mu + 2\nu$ en P.

42. Par un point P on mène les diamètres des coniques; les normales à leurs extrémités rencontrent une droite Δ en des points par lesquels on mène d'autres diamètres : ceux-ci enveloppent une courbe de la classe $3\mu + 4\nu$.

a. On mène par un point P les diamètres des coniques, et par les points où ils rencontrent une droite Δ, les normales : les diamètres qui passent par les pieds de ces normales enveloppent une courbe de la classe $3\mu + 4\nu$.

b. De deux points P, P', on mène les diamètres de chaque conique : les normales aux extrémités du premier rencontrent le deuxième en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $3\mu + 4\nu$, qui a un point multiple d'ordre $3\mu + 2\nu$ en P'.

43. Par les points où les tangentes aux pieds des normales abaissées d'un point N rencontrent une droite Δ on mène de nouvelles tangentes : celles-ci rencontrent les normales en des points situés sur une courbe de l'ordre $2\mu + 7\nu$.

a. Si par les points où les normales abaissées d'un point N rencontrent une droite Δ on mène des tangentes : ces tangentes rencontrent les tangentes aux pieds des normales en des points situés sur une courbe d'ordre $2\mu + 7\nu$.

44. Si par les points où les polaires d'un point P ren-

contrent une droite Δ on mène les normales, ces normales enveloppent une courbe de la classe $5\mu + \nu$, qui a une tangente multiple d'ordre $\mu + \nu$ coïncidante avec Δ.

a. Les normales abaissées d'un point N rencontrent les polaires d'un point P en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $5\mu + \nu$, qui a en N un point multiple d'ordre 4μ.

45. Si par les points où les polaires d'un point P rencontrent une droite Δ on mène des normales, leurs pieds sont sur une courbe de l'ordre $4\mu + \nu$.

a. Les normales aux points des coniques sur une droite D rencontrent les polaires d'un point P en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $4\mu + \nu$.

46. Les normales menées par les points où les axes des coniques rencontrent une droite Δ enveloppent une courbe de la classe $2\mu + 2\nu$.

a. Les normales menées d'un point N rencontrent les axes des coniques ou des points situés sur une courbe de l'ordre $2\mu + 2\nu$.

47. Les normales menées par les points où les directrices des coniques rencontrent une droite Δ enveloppent une courbe de la classe $12\mu + 8\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre $4\mu + 4\nu$ coïncidante avec Δ.

a. Les normales menées d'un point N rencontrent les directrices en des points situés sur une courbe de l'ordre $12\mu + 8\nu$, qui a en N un point multiple d'ordre $8\mu + 4\nu$.

§ III. — *Théorèmes dans lesquels se trouvent des conditions de parallélisme ou de perpendicularité de certaines séries de Normales.*

48. Les normales parallèles aux normales menées par un point N enveloppent une courbe de la classe $\mu + 4\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre 3ν à l'infini.

49. Les normales parallèles aux tangentes issues d'un point S enveloppent une courbe de la classe $2\mu + 6\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre $2\mu + 4\nu$ à l'infini.

a. Les tangentes parallèles aux normales abaissées d'un point N enveloppent une courbe de la classe $2\mu + 6\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre 4ν à l'infini.

50. Les tangentes parallèles aux normales abaissées d'un point N rencontrent les tangentes aux pieds de ces normales en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $2\mu + 7\nu$.

51. Si aux points des coniques sur une droite D on mène les normales, les tangentes parallèles à ces normales enveloppent une courbe de la classe $2\mu + 4\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre 2ν à l'infini.

a. Les normales parallèles aux tangentes menées d'un même point ont leurs pieds sur une courbe de l'ordre $2\mu + 4\nu$.

52. Les normales parallèles aux diamètres des coniques menés d'un même point enveloppent une courbe de la classe $\mu + 4\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre $\mu + 2\nu$ à l'infini.

a. Les diamètres parallèles aux normales abaissées d'un point N enveloppent une courbe de la classe $\mu + 4\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre 3ν à l'infini.

53. Les normales parallèles aux diamètres qui partent des points des coniques sur une droite D enveloppent une courbe de la classe $6\mu + 8\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre $4(\mu + \nu)$ à l'infini.

a. Les diamètres parallèles aux normales abaissées d'un point N ont leurs extrémités sur une courbe de l'ordre $6\mu + 8\nu$.

54. Les normales parallèles aux tangentes aux points des coniques sur une droite D enveloppent une courbe de la classe $6\mu + 6\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre $4\mu + 4\nu$ à l'infini.

a. Les tangentes parallèles aux normales abaissées d'un point N ont leurs points de contact sur une courbe de l'ordre $6\mu + 6\nu$.

55. Les normales parallèles aux normales aux points des coniques sur une droite D enveloppent une courbe de la classe $2\mu + 3\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre $\mu + 2\nu$ à l'infini.

a. Si d'un point N on abaisse des normales sur les coniques, les normales parallèles ont leurs pieds sur une courbe de l'ordre $2\mu + 3\nu$.

56. Les normales parallèles aux normales aux points de contact des tangentes issues d'un point S enveloppent une courbe de la classe $\mu + 4\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre $\mu + 3\nu$ à l'infini.

a. Les tangentes parallèles aux tangentes aux pieds des normales abaissées d'un point N enveloppent une courbe de la classe $\mu + 4\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre 3ν à l'infini.

57. Les normales parallèles aux asymptotes des coniques enveloppent une courbe de la classe $4\mu + \nu$, qui a une tangente multiple d'ordre $2\mu + \nu$ à l'infini.

58. Les normales parallèles aux asymptotes des coniques ont leurs pieds sur une courbe de l'ordre $4\mu + 2\nu$.

a. Le lieu des points de contact des tangentes perpendiculaires aux asymptotes des coniques est une courbe de l'ordre $4\mu + 2\nu$.

59. Les normales perpendiculaires aux diamètres qui passent par un même point enveloppent une courbe de la classe $\mu + 4\nu$.

a. Les diamètres perpendiculaires aux normales abaissées d'un point N enveloppent une courbe de la classe $\mu + 4\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre 4ν à l'infini.

60. Les normales perpendiculaires aux diamètres qui partent des points d'une droite D enveloppent une courbe de la classe $3\mu + 6\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre $\mu + 2\nu$ à l'infini.

a. Les diamètres perpendiculaires aux normales abaissées d'un point N ont leurs extrémités sur une courbe de l'ordre $3\mu + 6\nu$.

SUR LA CYCLIDE;

PAR J. CLERK. MAXVELL,
du collége de la Trinité, à Cambridge.

(Traduit de l'anglais de *The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics.*)

Dans les traités d'optique, les foyers primaire et secondaire d'un faisceau délié sont quelquefois représentés par deux lignes droites coupant l'axe du faisceau à angle droit et situées dans des plans à angle droit l'un sur l'autre. Chaque rayon de ce faisceau est supposé passer par ces deux lignes et former ainsi ce que M. Plucker a appelé une *congruence du premier ordre.*

Le système de rayons ainsi définis ne peut remplir la condition essentielle des faisceaux optiques, qui est que tous les rayons doivent avoir une surface d'onde commune, car on ne peut mener aucune surface qui coupe tous les rayons d'un pareil faisceau à angle droit.

Sir W.-R. Hamilton a prouvé que les foyers primaire et secondaire sont en général les points de contact du rayon avec la surface des centres de la surface d'onde, laquelle forme un double caustique. Si l'on prend un faisceau de rayons correspondant à une petite aire de la surface d'onde, leurs points de contact se trouvent sur deux petites aires des deux nappes de la surface caustique. Les sections du faisceau par deux plans perpendiculaires à son axe apparaîtront, si le faisceau est suffisamment délié, comme deux petites droites situées dans des plans rectangulaires.

Je me propose de déterminer la forme de la surface d'onde telle, qu'il y ait une ou deux des lignes ainsi appelées *lignes focales* formant réellement une ligne et non plus seulement la projection d'une petite aire de surface courbe.

Déterminons d'abord la condition pour que toutes les normales d'une surface passent par une courbe fixe.

Soit R un point d'une surface, RP une normale en R rencontrant la courbe fixe en P, PT la tangente en P à la courbe fixe, et RPT un plan passant par R et PT.

Des deux lignes de courbure en R, l'une touche le plan RPT, et l'autre lui est perpendiculaire. Donc, si le plan RPT tourne autour de la tangente PT comme axe, il sera toujours normal à la seconde ligne de courbure; cette seconde ligne de courbure est donc un cercle, et PT passe sur son centre perpendiculairement à son plan. Toutes les normales le long de la seconde ligne de courbure sont égales et également inclinées sur PT, de sorte que l'on peut les considérer comme les génératrices d'un cône droit dont l'axe est la tangente à la courbe fixe, ou comme les rayons d'une sphère de centre P qui touche la surface tout le long de la ligne de courbure.

La surface peut donc être considérée comme l'enveloppe d'une série de sphères dont les centres sont sur une courbe fixe et dont les rayons varient suivant une certaine loi.

Si les normales passent par deux courbes fixes, la surface doit être aussi l'enveloppe d'une seconde série de sphères dont les centres sont sur la seconde courbe, et telles que chacune d'entre elles touche toutes les sphères de la première série.

Si l'on prend trois quelconques des sphères de la première série, la surface peut être considérée comme l'enveloppe de toutes les sphères qui touchent continuellement les trois sphères données.

Telle est la définition donnée par Dupin, dans ses *Applications de Géométrie* (p. 200), de la surface du quatrième ordre appelé *cyclide*, parce que ses deux séries de lignes de courbure sont des cercles.

Si les trois sphères fixes sont données, elles peuvent être toutes les trois du même côté (à l'intérieur ou à l'extérieur) de la sphère tangente, ou bien l'une d'elles peut être située d'une manière opposée par rapport aux deux autres. Il y a donc quatre séries différentes de sphères que l'on peut mener tangentes aux trois mêmes sphères; mais on ne peut pas passer d'une manière continue de l'une à l'autre, et les normales aux cylides correspondantes passent par des courbes fixes différentes.

Cherchons la nature des deux courbes fixes. Puisque toutes les normales passent par les deux courbes, et puisque toutes celles qui passent en un point P sont également inclinées sur la tangente en P, la seconde courbe doit être sur un cône droit. Si maintenant le point P est pris de telle sorte que sa distance à un point P de la seconde courbe soit un minimum, alors PQ sera perpendiculaire à PT, et le cône droit deviendra un plan. Donc la seconde courbe est une conique plane. On verrait de la même manière que la première courbe est une conique plane.

Les deux courbes sont donc deux coniques planes telles, que le cône dont la base est l'une de ces coniques et le sommet un point quelconque de l'autre soit de révolution. Ces courbes sont donc dans des plans rectangulaires, et les foyers de l'une sont les sommets de l'arc transverse de l'autre. Nous appellerons ces courbes les *coniques focales* de la cyclide.

Soient

$$(1) \qquad x = \cos\alpha, \quad y = (c^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} \sin\alpha, \quad z = 0$$

les équations d'un point de l'ellipse, α étant l'angle excentrique, et soient les équations d'un point de l'hyperbole

$$(2) \qquad x = a\,\text{séc}\,B, \quad y = 0, \quad z = (c^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} \text{tang}\,B,$$

dans lesquelles B est un angle tel, que ces deux coniques remplissent les conditions proposées.

Pour l'uniformité, nous ferons usage quelquefois des fonctions hyperboliques

$$(3) \qquad \cosh\beta = \tfrac{1}{2}(e^{\beta} + e^{-\beta}), \quad \sinh\beta = \tfrac{1}{2}(e^{\beta} - e^{-\beta}),$$

et l'on suppose que β et B sont liés par les relations

$$(4) \qquad \begin{cases} \cosh\beta = \text{séc}\,B, & \text{d'où} \quad \sinh\beta + \text{tang}\,B, \\ \text{séch}\,\beta = \cos B, & \text{d'où} \quad \text{tangh}\,\beta = \sin B. \end{cases}$$

Les équations d'un point de l'hyperbole peuvent donc s'écrire

$$(5) \qquad x = b\cosh\beta, \quad y = 0, \quad z = (c^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} \sinh\beta.$$

Première construction de la cyclide par points. — Soient P un point de l'ellipse, O un point de l'hyperbole; alors

$$(6) \qquad PQ = c\,\text{séc}\,B - b\cos\alpha.$$

Prenons sur PQ un point R tel que

$$(7) \qquad PR = r - b\cos\alpha,$$

ou

$$(8) \qquad QR = r - c\,\text{séc}\,B,$$

où r est une constante. Alors, si α et B varient, R donnera un système de points de la cyclide (bcr).

Car, si P est fixe et Q variable, R décrit un cercle; si Q est fixe pendant que R varie, R décrit un autre cercle, et ces cercles se coupent à angle droit et sont perpendiculaires à PQR à leur intersection, et puisque P et Q sont des points des deux coniques, le système entier de cercles forme une cyclide.

Le cercle correspondant à un point fixe P sur l'ellipse est dans un plan qui coupe celui des xz le long de la ligne

$$x = \frac{br}{c}, \quad y = 0, \tag{9}$$

et fait avec lui un angle φ donné par la relation

$$\tang\varphi = \frac{c}{(c^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}} \tang\alpha.$$

Le cercle correspondant à un point fixe Q sur l'hyperbole a donc un plan qui coupe le plan des xy suivant la ligne

$$x = \frac{cr}{b}, \quad z = 0, \tag{10}$$

et fait avec lui un angle ψ tel que l'on ait

$$\tang\psi = \frac{b^2}{(c^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}} \sin B.$$

Donc, tous les plans des cercles de chaque série passent par l'une de ces deux droites fixes, qui sont à angle droit l'une sur l'autre, et dont la plus courte distance est

$$r\frac{c^2 - b^2}{bc}.$$

La ligne d'intersection des plans des deux cercles qui passent par le point R doit donc rencontrer ces deux lignes en des points S et T, et les coordonnées de S sont

$$(11)\qquad x = \frac{cr}{b},\quad y = \frac{(c^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}}{b}\operatorname{tang}\alpha,\quad z = 0,$$

et celles de T

$$(12)\qquad x = \frac{br}{c},\quad y = 0,\quad z = -\frac{(c^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}}{c}\sin B,$$

et il est facile de prouver que

$$(13)\qquad \frac{\mathrm{SR}}{\mathrm{TR}} = \frac{1 - \frac{r}{b}\operatorname{séc}\alpha}{1 - \frac{r}{c}\cos B} = \rho.$$

On en déduit ce qui suit.

Seconde construction par points. — On trace les deux lignes fixes, on détermine les deux points S et T donnés par les équations (11) et (12), et l'on trace ST, que l'on partage en R de telle sorte que le rapport des segments soit celui donné par l'équation (13). R est un point de la cyclide.

Cette construction est très-convenable pour tracer une projection de la cyclide lorsque les distances sont mesurées sur les projections des lignes fixes, et cette ligne ST peut être divisée dans le rapport donné au moyen de la règle et du compas, en ne traçant sur le papier aucun autre point que la position du point R cherché.

Formes de la cyclide. — Nous supposons que b et c sont donnés, et nous allons chercher à déterminer la forme suivant les différentes valeurs de r. Puisque les cyclides correspondant aux valeurs négatives de r ne diffèrent de celles qui correspondent aux valeurs positives égales que parce que leurs limites positive et négative sur l'axe des x sont renversées, nous étudierons seulement les valeurs positives.

1. Lorsque r est compris entre zéro et b, la section dans le plan de l'ellipse consiste en deux cercles, dont les centres sont les foyers, et qui se coupent en un point de l'ellipse. La section dans le plan de l'hyperbole consiste en deux cercles extérieurs l'un à l'autre, dont les centres sont les sommets de l'ellipse. La cyclide elle-même est formée de deux lobes extérieurs l'un à l'autre, dont le plus large est le négatif, et augmente avec r, tandis que le lobe positif décroît. Chaque lobe se termine en deux points coniques suivant lesquels il rencontre l'autre lobe. Le cône de contact en ces points singuliers est un cône droit, dont l'axe est tangent à l'ellipse, et dont le demi-angle au sommet est

$$\text{arc cos}\left(\frac{b^2 - r^2}{c^2 - r^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

La figure complète ressemble à deux paires de cornes, les cornes d'une paire étant réunies par la base et les deux paires se touchant par leurs sommets (*).

2. Lorsque r est compris entre b et c, la cyclide consiste en une seule nappe, en forme d'anneau, dont la section la plus grande est du côté négatif.

3. Lorsque r est plns grand que c, la cyclide se compose de deux nappes, l'une intérieure, l'autre extérieure,

(*) Nous regrettons de ne pouvoir donner ici les remarquables figures tracées par l'auteur et reproduites par le *Quarterly Journal*, figures qui ont surtout l'avantage de parfaitement faire comprendre les formes de la surface, puisqu'elles sont disposées pour être vues au moyen d'un stéréoscope. (Note du Traducteur.)

qui se rencontrent en deux points coniques situés sur la branche positive de l'hyperbole. Le demi-angle au sommet pour ces points a pour mesure

$$\text{arc cos}\left(\frac{r^2 - c^2}{r^2 - b^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Il y a en outre dans toutes les formes de cyclides un plan tangent singulier, qui touche la cyclide le long du cercle correspondant à $B = \frac{\pi}{2}$.

Dans ce cas, la nappe extérieure avec ses cercles de contact et ses points coniques rentrants, et la nappe intérieure avec ses points coniques rencontrant ceux de la nappe extérieure, offre une certaine ressemblance avec les nappes extérieure et intérieure de la surface d'onde de Fresnel; et si l'on se rappelle que la surface d'onde a quatre points singuliers pareils, tandis que la cyclide n'en a que deux, on pourra se servir de la figure de cette dernière pour se faire une idée des points singuliers de la surface d'onde.

Si l'on donne à r toutes les valeurs entre $+\infty$ et $-\infty$, la cyclide prend successivement les formes (3), (2), (1), (— 1), (— 2), (— 3), et chaque point est rencontré quatre fois par la surface. En effet, lorsque r est infini, un point quelconque R est dans le noyau ou nappe intérieure de (3). Si r diminue, le noyau se contracte, et, pour $r = c$, il est nul.

Donc, pour une certaine valeur $r_1 > c$, la surface du noyau passe par le point R. A ce moment, la nappe extérieure de la cyclide est encore au-delà de R, mais si r diminue la surface se contracte, et, finalement, s'évanouit pour $r = -b$. Donc r doit avoir passé par une valeur r_2 pour laquelle la surface contient le point R. A ce moment, la surface peut avoir l'une des formes de la nappe extérieure de (3), ou de la cyclide en anneau à une nappe (2) ou du lobe négatif de (1).

Le lobe positif de (1) commence à paraître lorsque r devient inférieur à b, et augmente lorsque r diminue, de sorte que pour $r = -b$ il devient un anneau, et, pour $r = -c$, il devient la nappe extérieure de (— 3).

La surface, par suite, pour une certaine valeur r_3 de r, passe par le point R. Cette valeur est nécessairement inférieure à r_2.

Lorsque r a atteint la valeur $(-c)$, la nappe intérieure de (— 3) se développe et augmente indéfiniment lorque r diminue, de telle sorte que, pour une certaine valeur r_4 de r, laquelle est inférieure à r_3, le point R est sur la surface intérieure de cette nappe.

On voit ainsi que l'on peut dire que la cyclide a quatre nappes, mais que deux seulement au plus sont réelles simultanément. Ces quatre nappes se touchent en trois points coniques.

La première nappe, correspondant à r_1, est la nappe intérieure de la cyclide (3) et touche toujours la seconde nappe en un point conique sur la branche positive de l'hyperbole.

La seconde nappe, correspondant à r_2, a trois formes différentes, pouvant être la nappe extérieure de (3), la cyclide anneau à une nappe (2) ou le lobe négatif de (1). Si la première nappe existe, elle la rencontre en un point conique sur la branche positive de l'hyperbole, et, si la troisième nappe existe, elle la rencontre en un point conique sur l'ellipse.

La troisième nappe, correspondant à r_3, a aussi trois formes différentes. Elle peut être le lobe positif de (1), la cyclide anneau (— 2) ou la nappe extérieure de (— 3). Dans le premier cas, elle a un point conique sur l'ellipse, où elle rencontre la seconde nappe; dans le second cas, elle n'a pas de point conique, et, dans le troisième, elle rencontre la quatrième nappe en un point situé sur la branche négative de l'hyperbole.

La quatrième nappe est la nappe intérieure de la cyclide (— 3) et rencontre toujours la troisième nappe en un point conique situé sur la branche négative de l'hyperbole.

Cyclides paraboliques. — Si les valeurs de b, c, r, x sont augmentées chacune de la même quantité et si cette quantité croît indéfiniment, les deux coniques deviennent, à la limite, deux paraboles dans des plans perpendiculaires, le foyer de l'une étant le sommet de l'autre, et la cyclide devient ce que l'on peut appeler *parabolique*.

Si r est compris entre b et c, la cyclide consiste en une nappe indéfinie, entièrement située entre les plans $x = 2b - r$, $x = 2c - r$. Les portions de l'espace situées sur les côtés positif et négatif de la nappe sont reliées entre elles, comme la terre et l'air sont reliés entre eux, par une surface de séparation, les terres, dont la surface fait partie, embrassant l'air par-dessous, pendant que l'air embrasse la surface par-dessus.

Lorsque r n'est pas compris entre b et c, la cyclide consiste en un lobe ayant deux points coniques, et une masse infinie avec deux points coniques rencontrant ceux du lobe.

Surfaces de révolution. — Lorsque $b = 0$, la cyclide est la surface formée par la révolution d'un cercle de rayon r autour d'une ligne de son plan située à une distance c du centre.

Si r est inférieur à c, la forme est celle d'un anneau régulier (tore); si $r > c$, la surface consiste en deux nappes, l'une intérieure, l'autre extérieure, se rencontrant en deux points coniques. Pour $b = c$, la cyclide se résout d'elle-même en deux sphères tangentes extérieurement si $b > r$, et intérieurement si $r > b$. Si $b = c = 0$, les deux sphères se confondent.

Si l'origine est transférée en un point conique, et si les dimensions de la figure augmentent indéfiniment, la cyclide devient finalement un cône droit ayant le même angle conique que la cyclide originale. Si $b = c$, le cône devient un plan.

Lorsque b restant fini, les quantités c, r, x sont augmentées d'une même quantité infiniment grande, la cyclide devient finalement un cylindre droit dont le rayon est $r - c$.

Inversion de la cyclide. — Puisque toute sphère, lorsqu'on la transforme au moyen de l'inverse des rayons menés par un point fini, devient une autre sphère, toute cyclide transformée de cette manière devient une autre cyclide. Il y a cependant certaines relations entre les paramètres de l'une des cyclides et ceux de l'autre, à savoir :

$$\frac{r^2 - b^2}{r^2 - c^2} = \frac{r'^2 - b'^2}{r'^2 - c'^2}, \tag{14}$$

ou

$$\frac{r^2 - b^2}{r^2 - c^2} = \frac{r'^2 - c'^2}{r'^2 - b'^2}. \tag{15}$$

Si le point d'inversion est pris sur l'un des cercles

$$x^2 + y^2 - \frac{2brx}{c} + b^2 + r^2 - c^2 = 0, \quad z = 0, \tag{16}$$

ou

$$x^2 + z^2 - \frac{2crx}{b} - b^2 - r + c^2 = 0, \quad y = 0, \tag{17}$$

la cyclide devient une surface de révolution dans laquelle $b' = 0$, et

$$\frac{r'^2}{c'^2} = \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} \tag{18}$$

si le point d'inversion est sur le premier cercle, ou

$$(19) \qquad \frac{r'^2}{c'^2} = \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2}$$

si le point d'inversion est sur le second cercle.

Lorsque r est inférieur à c, le premier cercle est réel; si $r > b$, le second est réel. Dans la cyclide anneau, r est compris entre b et, c, et, par suite, cette cyclide peut être transformée en tore de deux manières différentes.

Si la cyclide a des points coniques, et que l'on y prenne l'un d'eux pour point d'inversion, la cyclide devient un cône droit, dont le demi-angle au sommet a pour cosinus

$\left(\frac{b^2 - r^2}{c^2 - r^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ si $r < b$, ou $\left(\frac{r^2 - c^2}{r^2 - b^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ si $r > c$.

Si le point d'inversion est

$$x = \frac{bc}{r}, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

la surface est inverse d'elle-même.

Fonctions isothermales conjuguées de la cyclide. Définition. — Si sur une surface on mène deux systèmes de courbes, chaque courbe individuelle étant définie par la valeur d'un paramètre qui lui correspond, et si les deux systèmes de courbes se coupent toujours à angle droit; si enfin le rapport du segment compris sur une courbe du second système entre deux courbes consécutives du premier au segment compris sur une courbe du premier système entre deux courbes consécutives du second est égal à celui de la différence entre les paramètres des deux courbes du premier système à la différence des paramètres des deux courbes du second système; on appelle alors ces deux systèmes de courbes des *lignes isothermales conjuguées*, et les deux paramètres sont des *fonctions isothermales conjuguées*. Si la surface est supposée une lame conductrice uniforme placée entre deux milieux non conducteurs, l'une des séries de ces lignes sera les lignes isothermales pour la chaleur ou équipotentielles pour l'électricité, et l'autre série les lignes de conductibilité (*voir* LAMÉ, *Fonctions isothermales*).

Cette propriété des lignes de la surface n'est pas changée par l'inversion.

Dans la cyclide, on trouve que le segment ds_1 d'une ligne de courbure du premier système est

$$(20) \qquad ds_1 = \frac{r + c\cosh\beta}{c\cosh\beta - b\cos\alpha}(c^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} d\alpha,$$

et le segment ds_2 d'une ligne de courbure du second système est

$$(21) \qquad ds_2 = \frac{r - b\cos\alpha}{c\cosh\beta - b\cos\alpha}(c^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} d\beta.$$

Si maintenant θ est une fonction de α et φ de β, telles que

$$\frac{ds_1}{ds_2} = \frac{d\theta}{d\varphi},$$

θ et φ seront des fonctions isothermales conjuguées.

Si

$$(22) \qquad \theta = \mathrm{K}\int \frac{d\alpha}{r - b\cos\alpha}, \quad \varphi = \mathrm{K}\int \frac{d\beta}{r - c\cosh\beta},$$

la condition est satisfaite. Si r est plus grand que b, on trouve :

$$(23) \qquad \operatorname{tang} \frac{\theta}{(r^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(r^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} \sin\alpha}{b - r\cos\alpha}.$$

Il est plus commode d'avoir α en fonction de θ de la manière suivante :

$$\sin\alpha = \frac{(r^2 - b^2)^{\frac{1}{2}} \sin \dfrac{\theta}{(r^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}}}{r + b \cos \dfrac{\theta}{(r^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}}},$$

$$(24) \qquad \cos\alpha = \frac{b + r \cos \dfrac{\theta}{(r^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}}}{r + b \cos \dfrac{\theta}{(r^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}}}.$$

Si r est plus petit que b, on substituera $(b^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}$ à $(r^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}$, et on changera les fonctions circulaires en fonctions hyperboliques.

De même, on obtiendra pour les relations entre β et φ, lorsque r est plus grand que c,

$$\operatorname{tang} B = \sinh \beta = \frac{(r^2 - c^2)^{\frac{1}{2}} \sinh \dfrac{\varphi}{(r^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}}}{r + c \cosh \dfrac{\varphi}{(r^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}}},$$

$$(25) \qquad \operatorname{séc} B = \cosh \beta = \frac{c + r \cosh \dfrac{\varphi}{(r^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}}}{r + c \cosh \dfrac{\varphi}{(r^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}}}.$$

Si r est plus petit que c, on substituera $(c^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}$ à $(r^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}$, et l'on changera les fonctions hyperboliques en fonctions circulaires.

Ayant trouvé ces couples de fonctions isothermales conjuguées, on peut en déduire d'autres couples, comme

θ_1 et φ_1, pour lesquels on a

$$(26) \qquad \frac{d\theta_1}{d\theta} = \frac{d\varphi_1}{d\varphi}, \quad \frac{d\theta_1}{d\varphi} = -\frac{d\varphi_1}{d\theta}.$$

Cyclides confocales. — Un système de cyclides dans lesquelles l'ellipse et l'hyperbole focales restent les mêmes, r étant une quantité variable, peut s'appeler un *système confocal.*

Ce système de cyclides et les deux systèmes de cônes droits qui ont leurs sommets sur l'une des coniques et passent par l'autre forment trois systèmes de surfaces orthogonales, qui, par conséquent, se coupent le long de leurs lignes de courbure. Par l'inversion on peut obtenir trois systèmes de cyclides se coupant orthogonalement.

Un système de cyclides confocales peut être considéré encore comme un système de surfaces d'onde dans un milieu isotrope, correspondant à un faisceau de rayons, dont chaque rayon coupe les deux coniques focales. Chaque cyclide correspond à une certaine valeur de r, que l'on peut appeler la *longueur du rayon de la cyclide.*

Considérons maintenant le système de surfaces confocales

$$(27) \qquad \frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1.$$

En posant $\rho = c$, on trouve l'ellipse

$$(28) \qquad \frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2 - b^2} = 1, \quad z = 0;$$

en faisant $\rho = b$, on a l'hyperbole

$$(29) \qquad \frac{x^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2 - b^2} = 1, \quad y = 0.$$

Ces deux coniques font donc partie du système et peuvent être appelées ses *coniques focales.*

Si d'un point R, comme sommet, on mène deux cônes passant par l'ellipse et l'hyperbole, ces cônes seront des cônes confocaux, et leurs trois axes seront les normales aux trois systèmes de surfaces confocales passant par le point R. Ces cônes se couperont à angle droit le long des quatre génératrices r_1, r_2, r_3, r_4, qui seront normales aux quatre cyclides passant par le point R.

La normale à l'ellipsoïde passant par le point R sera l'axe réel du cône passant par l'ellipse, lequel axe bissecte l'angle de r_1 et r_2, ainsi que celui de r_3 et r_4. Si l'ellipsoïde est une surface réfléchissante, un rayon incident de direction r_1 devra se réfléchir suivant la direction r_2. Donc, d'après la théorie des ondes, $r_1 + r_2$ est constant pour l'ellipsoïde. Au point de l'ellipsoïde ($\rho =$ const.) où il est coupé par l'axe des x, on a

$$x = \rho, \quad r_1 = x + c, \quad r_2 = x - c;$$

de sorte que l'équation de l'ellipsoïde ($\rho =$ const.) peut être exprimée en fonction de ρ comme il suit :

$$r_1 + r_2 = 2\rho. \tag{30}$$

La normale à l'ellipsoïde bissecte en outre l'angle formé par r_3 et r_4, d'où l'on déduit cette autre formule

$$r_3 + r_4 = -2\rho. \tag{31}$$

Par suite, la relation générale entre les valeurs de r est

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 0. \tag{32}$$

La normale à l'hyperboloïde à une nappe ($\mu =$ const.) bissecte l'angle des lignes r_1 et r_3, ainsi que celui des lignes r_2 et r_4, et l'on a les équations

$$r_1 + r_3 = 2\mu = -(r_2 + r_4). \tag{33}$$

La normale à l'hyperboloïde à deux nappes ($\nu =$ const.)

bissecte les angles (r_2, r_3) et (r_1, r_4); d'où

$$(34) \qquad r_2 + r_3 = 2\nu = -(r_1 + r_4).$$

Telles sont les équations des surfaces en fonction des quatre rayons du faisceau. Les équations des quatre cyclides en fonction des coordonnées elliptiques s'en déduisent facilement :

$$(35) \qquad \begin{cases} r_1 = \rho + \mu - \nu, \\ r_2 = \rho - \mu + \nu, \\ r_3 = -\rho + \mu + \nu, \\ r_4 = -\rho - \mu - \nu. \end{cases}$$

Puisque les quantités

$$\rho, \quad c, \quad \mu, \quad b, \quad \nu, \quad 0$$

sont rangées par ordre de grandeur décroissante, il est évident que

$$r_1, \quad \rho, \quad r_2, \quad r_3, \quad -\rho, \quad r_4$$

sont aussi rangés par ordre de grandeur décroissante.

L'équation générale de la cyclide en coordonnées elliptiques est

$$(36) \quad (r-\rho-\mu+\nu)(r-\rho+\mu-\nu)(r+\rho-\mu-\nu)(r+\rho+\mu+\nu) = 0,$$

et peut être exprimée en coordonnées cartésiennes comme il suit :

$$(37) \quad \begin{cases} (x^2+y^2+z^2-r^2)^2 - 2(x^2+r^2)(b^2+c^2) \\ \qquad - 2(y^2-z^2)(c^2-b^2) + 8bcrx + (c^2-b^2)^2 = 0. \end{cases}$$

Lorsque $b = c$, il y a deux points focaux F et F′, et les valeurs des rayons sont

$$(38) \qquad \begin{cases} r_1 = \mathrm{RF} + c, \\ r_2 = \mathrm{RF}' - c, \\ r_3 = -\mathrm{RF} + c, \\ r_4 = -\mathrm{RF} - c. \end{cases}$$

L'équation de l'ellipsoïde

$$(39) \qquad r_1 + r_2 = 2\rho = \mathrm{RF} + \mathrm{RF'}$$

exprime dans ce cas la propriété de l'ellipsoïde allongé, que la somme des distances d'un point quelconque aux deux foyers est constante.

De la même manière, l'équation

$$r_2 + r_3 = 2\nu = \mathrm{RF'} - \mathrm{RF}$$

exprime la propriété de l'hyperboloïde de révolution à deux nappes, que la différence des distances focales est constante.

Dans le but d'étendre une propriété analogue aux autres surfaces confocales, concevons la construction mécanique suivante.

Supposons les courbes focales représentées par des fils déliés et polis, et une tige droite et indéfinie restant toujours sur les deux courbes, r étant compté sur cette tige à partir d'un de ses points. Un fil, dont la longueur est $(c + b)$, est attaché par l'une de ses extrémités au foyer négatif de l'ellipse, et par l'autre au point $(+ b)$ de la tige et glisse sur l'ellipse au point où cette courbe rencontre la tige. Pour le tenir toujours tendu, un autre fil égal passe par le foyer positif de l'ellipse, rencontre l'ellipse et se fixe au point $(- b)$ de la tige. Ce fil détermine le point de la tige qui reste sur un point donné de l'ellipse. Supposons que la tige reste aussi sur l'hyperbole, de sorte que la portion positive de la tige soit sur la branche positive de l'hyperbole, ou la portion négative sur la branche négative. Alors le point r de la tige est sur la surface de la cyclide de paramètre r; et comme la tige glisse sur l'ellipse et l'hyperbole, le point r décrit toute la surface de la cyclide.

Considérons un point R de l'espace ; la tige passera par ce point dans quatre positions différentes, considérant aux quatre lignes d'intersection des cônes dont le sommet est R, et qui passent par l'ellipse et l'hyperbole.

La première position r_1 correspond à la première nappe de la cyclide qui passe par le point R. Si je désigne l'intersection de l'ellipse et de la tige par E, l'intersection avec les branches positive ou négative de l'hyperbole par $+H$ ou $-H$, l'ordre des intersections, dans ce cas, sera

$$E, \quad +H, \quad R.$$

La seconde position r_2 correspond à la seconde nappe, et l'ordre des intersections est

$$E, \quad R, \quad +H, \quad \text{ou} \quad -H, \quad E, \quad R.$$

La position r_3 correspond à la troisième nappe, et donne pour l'ordre des intersections

$$R, \quad E, \quad +H, \quad \text{ou} \quad -H, \quad R, \quad E.$$

La quatrième position r_4 correspond à la quatrième nappe, et l'ordre des intersections est

$$R, \quad -H, \quad E,$$

les lettres étant toujours disposées dans l'ordre de croissance de r.

Ce système complet de rayons est un exemple de congruence linéaire du quatrième ordre.

Maintenant, si deux tiges suivant les conditions précédentes se coupent en R en deux quelconques de leurs positions, et si un fil de longueur suffisante est fixé à un point suffisamment éloigné dans la région négative de la première tige, passe sur le point R et se fixe à un point suffisamment éloigné dans la région négative de l'autre fil, et si les deux tiges se déplacent en laissant toujours le fil tendu en leur point d'intersection R, alors R trace une surface confocale.

Si les tiges sont dans la première et la deuxième position, ou dans la troisième et la quatrième, cette surface est un ellipsoïde.

Si elles sont dans la première et la troisième, ou dans la deuxième et la quatrième, c'est un hyperboloïde à une nappe.

Si elles sont dans la première et la quatrième, ou dans la deuxième et la troisième, c'est un hyperboloïde à deux nappes.

Dans le système confocal parabolique, la quatrième nappe de la cyclide est un plan, et r_4 est parallèle à l'axe des x.

Donc, si les rayons parallèles à l'axe d'un paraboloïde sont réfléchis par la surface, ils passeront toujours par les deux paraboles focales du système, et la surface d'onde, après la réflexion, est une cyclide; et si les rayons sont réfléchis deux fois, ils redeviennent parallèles à l'axe.

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 881

(voir 2e série, t. VII, p. 240);

PAR M. TOUBIN,

à Lons-le-Saunier.

Lorsqu'un nombre premier est de la forme $1+2^n$, *l'exposant* n *est nul ou de la forme* 2^α.

(LIONNET.)

Ce théorème est un cas particulier de celui-ci : *Lors-*

qu'un nombre premier est de la forme $A^n + 1$, *l'exposant* n *est nul ou de la forme* 2^α.

Pour démontrer ce dernier, supposons que n ne soit pas nul et ne soit pas de la forme 2^α; il sera forcément de la forme $2^p k$, k étant impair; le nombre premier $A^n + 1$ sera de la forme $P^k + 1$; or cette conclusion est absurde, puisque, k étant impair, $P^k + 1$ est divisible par $P + 1$.

Question 896

(voir 2e série, t. VII, p. 557);

PAR M. VALLIER,
Élève du collége Rollin.

Soit I *un point d'inflexion d'une cubique : par* I *menons des tangentes en* P, Q, R *à la courbe, et par* P *des tangentes en* A, B, C, D. *Montrer que* I, Q, R *sont les points de rencontre respectifs des trois couples de côtés opposés du quadrilatère* ABCD. (SYLVESTER.)

Je prends le triangle IQR pour triangle de référence. L'équation

$$\gamma(l\beta\gamma + m\gamma\alpha + n\alpha\beta) = \alpha\beta(A\alpha + B\beta)$$

représente une cubique circonscrite au triangle et tangente en QR : comme elle contient encore quatre paramètres, c'est l'équation générale.

Je vais exprimer que le point I est un point d'inflexion en écrivant que sa conique polaire se réduit à deux droites, dont l'une est la droite QR ; cette conique a pour équation

$$2l\beta\gamma + 2m\gamma\alpha + n\alpha\beta = 0.$$

Il faut donc que l'on ait

$$n = 0.$$

et il vient

$$j^2(l\beta + m\alpha) = \alpha\beta(A\alpha + B\beta).$$

Le point P, étant à l'intersection de QR avec la courbe, est donné par

$$j = 0, \quad A\alpha + B\beta = 0;$$

l'équation de sa conique polaire est

$$B(mj^2 - 2A\alpha\beta - B\beta^2) = A(lj^2 - 2B\alpha\beta - A\alpha^2),$$

ou

$$A^2\alpha^2 - B^2\beta^2 + (Bm - Al)j^2 = 0.$$

Ainsi les points A, B, C, D sont sur une conique conjuguée au triangle de référence. Je vais démontrer qu'ils sont sur une seconde conique conjuguée aussi, et tout sera démontré. Or ces points sont aussi sur la courbe

$$j^2(l\beta + m\alpha) = \alpha\beta(A\alpha + B\beta).$$

Ils sont donc sur le lieu obtenu en divisant les deux équations membre à membre, ou

$$\frac{A^2\alpha^2 - B^2\beta^2}{\alpha\beta(A\alpha + B\beta)} = \frac{Al - Bm}{l\beta + m\alpha},$$

ce qui donne d'abord

$$A\alpha + B\beta = 0,$$

équation de IP, qui est la tangente issue de I, et ne fait pas partie du faisceau ABCD, et

$$(A\alpha - B\beta)(l\beta + m\alpha) = \alpha\beta(Al - Bm),$$
$$Am\alpha^2 - Bl\beta^2 = 0.$$

C'est encore une conique conjuguée au triangle (ici c'est le système de deux des sécantes); donc le théorème est démontré.

Question 910

(voir 2ᵉ série, t. VIII, p. 47);

PAR M. A. MOREL.

Deux triangles OAB, OA′B′ *ont un sommet commun;* OAB *est donné en grandeur et en position*, OA′B′ *est donné en grandeur seulement. Placer* OA′B′ *de façon que les droites* AA′, BB′ *fassent un angle donné* (*).

(E. LEMOINE.)

Si je suppose le problème résolu, je remarque que les points A′ et B′ appartiendront respectivement à deux circonférences concentriques décrites avec OA′ et OB′ comme rayons; de plus, la ligne A′B′ a une longueur et une direction données, en vertu de la condition imposée dans l'énoncé. Le problème revient donc au problème suivant : *Mener entre deux circonférences données une ligne droite de longueur donnée et parallèle à une direction donnée.* Ce problème est très-connu, et je ne fais qu'en rappeler ici la solution. Du centre O, je mène une ligne égale et parallèle à A′B′, j'obtiens ainsi un point O′. Du point O′ comme centre, avec OA′ comme rayon, je décris un arc de cercle qui coupe en B'_1, B'_2 le cercle de rayon OB′. Je joins le point O′ à l'un des points B'_1, B'_2, et je mène les rayons parallèles OA'_1, OA'_2. En joignant les lignes OA'_1, OB'_1, $B'_1A'_1$, j'ai une solution de la question.

Il est à remarquer que le problème comporte toujours quatre solutions; en effet, on peut d'abord faire l'angle donné avec la droite AB de deux côtés différents; puis, e triangle OA′B′ étant supposé exister, la ligne A′B′ est plus petite que la somme des deux autres côtés, et plus

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

grande que leur différence; donc les cercles OB'_1 et $O'B'_1$ se couperont toujours.

Le nombre des solutions se réduirait à deux si l'on supposait l'angle donné compté de 0 à 180 degrés au-dessus de la ligne AB, et dans le sens AB et non BA.

Question 941

(voir 2e série, t. VIII, p. 275);

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

I.

THÉORÈME. — *Tout nombre pair est égal à un cube, qui n'est pas nul, plus trois carrés.*

(DÉSIRÉ ANDRÉ.)

Pour le démontrer, nous rappellerons ce théorème bien connu : « Tout nombre de la forme $8n+3$ est la somme de trois carrés »; et nous ferons remarquer : d'une part, que les cubes des nombres, 1, 3, 5, 7, divisés chacun par 8, donnent respectivement pour restes 1, 3, 5, 7; de l'autre, que tout nombre pair, 2 excepté, est de l'une des formes

$$8n+4,\quad 8n+6,\quad 8n+8,\quad 8n+10,$$

n étant zéro ou un nombre entier.

Cela étant, il est visible que le théorème est vrai :

1° Pour tous les nombres pairs de la forme $8n+4$, car

$$8n+4 = 1^3 + (8n'+3);$$

2° Pour tous les nombres pairs de la forme $8n+6$, dès qu'ils dépassent 3^3, car

$$8n+6 = 3^3 + (8n'+3);$$

3° Pour tous les nombres pairs de la forme $8n + 8$, dès qu'ils dépassent 5^3, car

$$8n + 8 = 5^3 + (8n' + 3);$$

4° Enfin pour tous les nombres pairs de la forme $8n + 10$, dès qu'ils dépassent 7^3, car

$$8n + 10 = 7^3 + (8n' + 3).$$

Pour étendre le théorème à tous les nombres pairs, il suffit donc de le vérifier pour tous les nombres pairs autres que les précédents, c'est-à-dire pour 2; pour les trois nombres de la forme $8n + 6$ qui sont inférieurs à 3^3; pour les quinze nombres de la forme $8n + 8$ qui sont inférieurs à 5; enfin pour les quarante-deux nombres de la forme $8n + 10$ qui sont inférieurs à 7^3. Vérifications faites, le théorème s'applique à tous ces nombres; donc il est général.

Remarque. — Il est évident que, quand les nombres pairs considérés sont suffisamment grands, on peut remplacer les cubes des nombres 1, 3, 5, 7 par les cubes de nombres impairs supérieurs à ceux-ci. Il en résulte que la décomposition en un cube et trois carrés peut, en général, s'effectuer de plusieurs manières.

II.

Au lieu des cubes de 1, 3, 5, 7, considérons les puissances $(2\alpha + 1)^{ièmes}$ de ces nombres, $2\alpha + 1$ étant un nombre impair quelconque; nous trouvons que ces puissances, divisées par 8, donnent respctivement pour restes 1, 3, 5, 7. Par suite, quel que soit un nombre pair supérieur à $7^{2\alpha+1}$, nous pourrons toujours, en en retranchant l'un des nombres $1^{2\alpha+1}$, $3^{2\alpha+1}$, $5^{2\alpha+1}$, $7^{2\alpha+1}$, obtenir un résultat de la forme $8n + 3$. Or, on sait que tout nombre de la forme $8n + 3$ est la somme de trois carrés *impairs*; donc on peut énoncer le théorème général suivant :

THÉORÈME. — *Tout nombre pair supérieur à $7^{2\alpha+1}$ est égal à une puissance $(2\alpha + 1)^{ième}$, différente de zéro, plus trois carrés, tous différents de zéro.*

Remarque. — On voit que le théorème qui fait l'objet de la question 941 n'est autre chose que le théorème précédent, réduit au cas de $\alpha = 1$, étendu, soit par démonstration, soit par vérification, aux nombres pairs inférieurs à 7^3, et délivré de la condition que les carrés soient tous différents de zéro. Le maintien de cette dernière conditon eût empêché d'étendre le théorème à certains nombres pairs, à 2 par exemple.

Question 971

(voir 2ᵉ série, t. VIII, p. 562);

PAR M. E. KRUSCHWITZ,
Étudiant en mathématiques, à Berlin.

Trouver la loi de formation des nombres dont les carrés sont terminés par deux chiffres égaux.

(H. BROCARD.)

Nous n'avons à examiner que les nombres inférieurs à 50, vu qu'un multiple de 50 ajouté à un nombre n'influe pas sur les deux derniers chiffres de son carré. De ces nombres inférieurs à 50, il faut rejeter tous ceux qui sont impairs et tous ceux qui sont terminés par 4 ou 6, puisque les deux derniers chiffres de leurs carrés, étant l'un pair, l'autre impair, ne peuvent être égaux. Reste donc à considérer les nombres terminés par 0, 2 ou 8.

Tous les nombres terminés par zéro, ayant leurs carrés terminés par deux zéros, répondent à la question.

Si x est l'avant-dernier chiffre d'un nombre terminé par 2, il faut que $4x$ soit terminé par 4; et, x étant inférieur à 5, cela n'arrive que pour $x = 1$. Donc 12 est le seul nombre inférieur à 50 et terminé par 2, qui réponde à la question.

Si x est l'avant-dernier chiffre d'un nombre terminé par 8, il faut que $16x + 6$ se termine par 4, ou $16x$ par 8, ce qui n'a lieu que pour $x = 3$, puisque x est inférieur à 5. Donc 38 est le seul nombre, inférieur à 50 et terminé par 8, qui réponde à la question.

Ainsi tous les nombres cherchés sont de l'une des trois formes

$$10\alpha,\quad 50\alpha + 12,\quad 50\alpha + 38,$$

ou bien

$$10\alpha,\quad 50\alpha + 12,\quad 50\alpha - 12.$$

La série de ces nombres est

$$0,\ 10,\ 12,\ 20,\ 30,\ 38,\ 40,\ 50,\ 60,\ 62,\ 70,\ldots.$$

On peut remarquer que les différences premières sont

$$10,\ 2,\ 8,\ 10,\ 8,\ 2,\ 10;\ 10,\ 2,\ 8,\ldots,$$

et qu'elles forment une série périodique dont chaque période contient cinq nombres, symétriquement placés par rapport à celui du milieu.

Note. — La même question a été traitée par MM. Adrien Guébhard, étudiant en médecine, à Paris; Charles Bloch, du lycée Napoléon; Émile Laclais; H.-V. Duruy, élève du lycée de Metz; Octave Espanet, du lycée de Nîmes; O. Callaudreau, à Angoulême; Moret-Blanc, professeur au lycée du Havre; Lucien Bignon, à Lima (Pérou); H. Rumpen, étudiant en mathématiques, à Bonn.

Remarque. — M. H. Brocard nous a fait observer que tous les nombres de la forme $50\alpha + 14$ ont leurs cubes terminés par 44.

CORRESPONDANCE.

Monsieur le rédacteur,

Je ne sais pas, en réalité, pourquoi les éditions successives des programmes portent toutes, à propos de l'emploi des Tables de logarithmes, ces mots : « Tables de Callet », c'est-à-dire, en bonne traduction, Tables à sept décimales. Certes, il est très-bon de savoir se servir de toutes les Tables de logarithmes, voire même celles à sept décimales; mais vous voyez beaucoup d'élèves qui seraient bien embarrassés si vous leur mettiez entre les mains des tables de Hoüel ou de Lalande, par exemple; et pourtant, pour la plupart des calculs, les tables à cinq décimales sont bien suffisantes, puisque même on se sert souvent de quatre décimales seulement. Pourquoi donc n'apprendrait-on pas à se servir des petites tables, plus portatives que ces volumes, qui s'appellent des *tables à sept décimales*? Je dois dire qu'un progrès a été réalisé en ce sens dans l'enseignement appelé *spécial*. En effet, je trouve dans le programme du *Cours d'Algèbre* ces mots : « Usage des tables à cinq et à sept décimales ». Si du moins on n'a pas supprimé les grandes tables, on a daigné accorder le droit de cité à leurs petites sœurs, aux tables vraiment usuelles.

Mais il est une lacune qui n'a pas été comblée, même dans l'enseignement spécial, où l'on cherche à préparer les élèves en vue de la pratique. Pourquoi les Tables de Gauss, ou Tables de logarithmes d'addition et de soustraction, sont-elles inconnues en France? Le recueil de M. Hoüel en contient de petites, c'est vrai; mais, pour la plupart des élèves, pour ne pas dire tous, ces tables sont lettres mortes. Et pourtant elles peuvent rendre de grands services. Sans m'étendre sur les exemples donnés par M. Hoüel dans son Introduction, je vais prendre un cas d'intérêt *pratique*. Je veux parler des annuités. Lorsque l'on fait aux élèves la théorie des annuités, après être arrivé à la formule

$$a = \frac{A(1+r)^n r}{(1+r)^n - 1},$$

on a soin d'ajouter : « Cette formule n'est pas calculable par logarithmes ». Or, au moyen des logarithmes de soustraction, on arrive rapidement à lever cette difficulté. En effet, si nous appelons B la correction donnée par ces tables, on a, d'après l'usage de ces tables,

$$\log[(1+r)^n - 1] = \log(1+r)^n - B);$$

donc la formule devient

$$\log a = \log A + \log r + B.$$

Donc, au moyen de quatre lectures de logarithmes, savoir :

1° $\operatorname{Log} A$;

2° $\operatorname{Log} r$;

3° $\operatorname{Log}(1+r)$, d'où l'on déduit $\log(1+r)^n$;

4° B, déduit de $\log(1+r)^n$ au moyen de la table de soustraction,

On arrive à calculer a par une addition de trois nombres seulement, et sans avoir besoin de prendre de complément logarithmique, ce qui simplifie aussi les calculs. On pourrait donc dire, si l'emploi des logarithmes d'addition et de soustraction était connu, que la formule qui donne l'annuité est aussi bien calculable par logarithmes que celle qui donne les intérêts simples ou les intérêts composés, par exemple, excepté dans le cas où l'inconnue serait le taux r. Mais, comme le fait remarquer très-judicieusement M. Sonnet dans ses *Problèmes et exercices d'Algèbre et d'Arithmétique,* on n'a jamais, dans la pratique *réelle,* qu'à choisir entre quelques valeurs pour r, et par suite on peut arriver facilement à trouver la solution du problème.

A. MOREL.

QUESTIONS.

1018. Si deux ellipses de même centre et de mêmes axes ont une aire égale, les angles excentriques au point commun sont supplémentaires. Considérer le point limite où les ellipses approchent de la similitude; trouver le lieu du point limite d'intersection. (A. WITWORTH.)

1019. Trouver le maximum de l'angle sous lequel une ellipse donnée est coupée par le cercle de courbure. (A. WITWORTH.)

1020. Un point matériel décrit une ellipse sous l'action d'une force tendant vers un point fixe O : démontrer que la loi de la force est donnée par

$$F = \frac{\overline{DD'}^6}{\overline{OP}^2 . \overline{PP'}^3},$$

P désignant la position de la molécule, PP' la corde passant par le point O, et DD' le diamètre parallèle à cette corde. (A. WITWORTH.)

1021. Un mobile est lancé dans une atmosphère dont la résistance varie comme le cube de la vitesse. Si f est l'accélération lorsque le mobile descend sous l'inclinaison α à l'horizon, f_0 quand il se meut horizontalement, et f' quand il monte sous l'inclinaison α, on a

$$\frac{1}{f'} + \frac{1}{f} = \frac{2\cos^3\alpha}{f_0},$$

$$\frac{1}{f'} - \frac{1}{f} = \frac{2\sin\alpha(3 - 2\sin^2\alpha)}{g}.$$

(A. Witworth.)

1022. Démontrer qu'en un point quelconque d'une spirale équiangle, la conique osculatrice est une ellipse et que le point de contact est à l'extrémité de l'un des diamètres conjugués égaux de l'ellipse, et la tangente de l'angle de ces diamètres est égale à trois fois la tangente de l'angle de la spirale. (A. Witworth.)

1023. Le triangle ABC et le triangle A'B'C' formé en joignant les pieds des hauteurs de ABC ont leur axe d'homologie perpendiculaire à la ligne qui joint le point de concours des hauteurs au centre du cercle circonscrit. (Lemoine.)

1024. Lieu des centres des coniques qui ont leurs quatre sommets sur quatre droites données. Discussion. Construire une conique, connaissant cinq droites. Sur quatre d'entre elles se trouvent les sommets, sur la cinquième le centre. (Lemoine.)

1025. Trois cercles quelconques passent par un même point. On mène les cordes d'intersection des cercles pris deux à deux, et on les prolonge de manière à ce qu'elles coupent chaque fois le troisième cercle. En joignant les points d'intersection des cercles à ces points nouveaux, on forme un hexagone. Démontrer que le produit des côtés de rang impair est égal au produit des côtés de rang pair. (Callaudreau.)

PROPRIÉTÉS DES SYSTÈMES DE CONIQUES, DANS LESQUELS SE TROUVENT DES CONDITIONS DE PERPENDICULARITÉ ENTRE DIVERSES SÉRIES DE DROITES;

Par M. CHASLES.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXII.)

Une série de droites perpendiculaires à d'autres droites donne lieu généralement à trois questions principales : la recherche de la courbe enveloppe de ces droites, celle de la courbe sur laquelle se trouvent leurs pieds de perpendicularité, et celle de la courbe lieu des points de rencontre de ces droites et des coniques auxquelles elles appartiennent.

Lorsque les perpendiculaires sont des tangentes aux coniques, la troisième question se change en celle du lieu de leurs points de contact.

Je réunirai sous un même numéro ces trois questions, bien qu'elles soient différentes, pour éviter de répéter dans les énoncés des théorèmes l'hypothèse qui leur est commune.

61. Les diamètres perpendiculaires aux tangentes des coniques en leurs points sur une droite D :

1° Enveloppent une courbe de la classe $\mu + 8\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre 2ν à l'infini;

2° Rencontrent les tangentes en des points situés sur une courbe de la classe $2\mu + 4\nu$, ayant deux points multiples d'ordre $\mu + \nu$ aux deux points circulaires à l'infini;

3° Ont leurs extrémités sur une courbe de l'ordre $4\mu + 6\nu$.

62. Les diamètres perpendiculaires aux tangentes issues d'un point S :

1° Enveloppent une courbe de la classe 3ν, qui a une tangente multiple d'ordre 2ν à l'infini ;

2° Rencontrent les tangentes en des points situés sur une courbe de l'ordre 4ν, qui a en S un point multiple d'ordre 3ν ;

3° Ont leurs extrémités sur une courbe d'ordre $2\mu + 6\nu$.

63. Les diamètres perpendiculaires aux droites qui vont d'un point Q aux points des coniques sur une droite D :

1° Enveloppent une courbe de la classe $\mu + 2\nu$;

2° Rencontrent les droites auxquelles ils sont perpendiculaires en des points situés sur une courbe de l'ordre $2\mu + 2\nu$, qui a deux points multiples d'ordre μ aux points circulaires de l'infini ;

3° Ont leurs extrémités sur une courbe de l'ordre $4\mu + 4\nu$.

64. Les diamètres perpendiculaires aux droites menées d'un point Q aux points de contact des tangentes issues d'un point S :

1° Enveloppent une courbe de la classe $\mu + 3\nu$.

2° Rencontrent les droites auxquelles elles sont perpendiculaires sur une courbe de l'ordre $2\mu + 4\nu$, qui a deux points multiples d'ordre $\mu + \nu$ aux deux points circulaires de l'infini ;

3° Ont leurs extrémités sur une courbe de l'ordre $4\mu + 6\nu$.

65. Les diamètres perpendiculaires d'un point P :

1° Enveloppent une courbe de la classe $\mu + \nu$, qui a une tangente multiple d'ordre ν à l'infini ;

2° Rencontrent les polaires en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $2\mu + \nu$, qui a deux points multiples d'ordre μ aux deux points circulaires à l'infini;

3° Ont leurs extrémités sur une courbe de l'ordre $3\mu + 2\nu$.

66. Les tangentes perpendiculaires aux points d'une droite D :

1° Enveloppent une courbe de la classe $2\mu + 4\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre 3ν à l'infini;

2° Rencontrent les tangentes auxquelles elles sont perpendiculaires sur une courbe de l'ordre $2\mu + 4\nu$, qui a deux points multiples d'ordre $\mu + \nu$ aux deux points circulaires à l'infini;

3° Ont leurs points de contact sur une courbe de l'ordre $4\mu + 4\nu$.

67. Les tangentes perpendiculaires aux tangentes issues d'un point S :

1° Enveloppent une courbe de la classe 4ν, qui a une tangente multiple d'ordre 2ν à l'infini;

2° Rencontrent les tangentes issues du point S, sur une courbe d'ordre 4ν, qui a un point multiple d'ordre 2ν en S, et deux points multiples d'ordre ν aux deux points circulaires à l'infini;

3° Ont leurs points de contact sur une courbe de l'ordre $2\mu + 4\nu$.

68. Les tangentes perpendiculaires aux droites menées d'un point Q aux points des coniques sur une droite D :

1° Enveloppent une courbe de l'ordre $2\mu + 2\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre 2ν à l'infini;

2° Rencontrent les droites auxquelles elles sont perpendiculaires en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $2\mu + 6\nu$, qui a un point multiple d'ordre $2\mu + 2\nu$ en Q, et deux points multiples d'ordre 4ν aux deux points circulaires de l'infini;

3° Ont leurs points de contact sur une courbe de l'ordre $4\mu + 2\nu$.

69. Les tangentes perpendiculaires aux diamètres qui partent des coniques sur une droite D :

1° Enveloppent une courbe de la classe $2\mu + 6\nu$;

2° Rencontrent les diamètres sur une courbe de l'ordre $4\mu + 10\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre $2\mu + 4\nu$ aux points circulaires de l'infini;

3° Ont leurs points de contact sur une courbe de l'ordre $4\mu + 6\nu$.

70. Les tangentes perpendiculaires aux diamètres qui partent des points de contact des tangentes issues d'un point S :

1° Enveloppent une courbe de la classe $4\mu + 4\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre 2ν à l'infini;

2° Rencontrent les diamètres en des points situés sur une courbe de l'ordre $8\mu + 6\nu$, qui a deux points multiples d'ordre $4\mu + 2\nu$ aux deux points circulaires de l'infini;

4° Ont leurs points de contact sur une courbe de l'ordre $6\mu + 4\nu$.

71. Les tangentes perpendiculaires aux asymptotes des coniques :

1° Enveloppent une courbe de la classe $2\mu + 2\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre 2ν à l'infini;

2° Rencontrent les asymptotes en des points situés sur une courbe de l'ordre $2\mu + 3\nu$;

3° Ont leurs points de contact sur une courbe de l'ordre $4\mu + 2\nu$.

72. Les tangentes perpendiculaires aux polaires d'un point P :

1° Enveloppent une courbe de la classe $2\mu + \nu$, qui a une tangente multiple d'ordre ν à l'infini ;

2° Rencontrent les polaires sur une courbe de l'ordre

$4\mu + \nu$, qui a deux points multiples d'ordre 2ν aux deux points circulaires à l'infini;

3° Ont leurs points de contact sur une courbe de l'ordre $3\mu + \nu$.

73. Des points des coniques sur une droite D, on abaisse des perpendiculaires sur les diamètres qui passent par un point P :

1° Ces perpendiculaires enveloppent une courbe de la classe $\mu + 2\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre 2ν coïncidante avec D, et une tangente multiple d'ordre μ à l'infini;

2° Les pieds des perpendiculaires sont sur une courbe de l'ordre $\mu + 4\nu$, qui a en P un point multiple de l'ordre $\mu + 2\nu$;

3° Les perpendiculaires rencontrent les coniques en des points situés sur une courbe de l'ordre $3\mu + 4\nu$.

74. Si des points des coniques sur une droite D on abaisse des perpendiculaires sur les tangentes issues d'un point S :

1° Ces perpendiculaires enveloppent une courbe de la classe $2\mu + 2\nu$;

2° Leurs pieds sont sur une courbe de l'ordre $2\mu + 4\nu$, qui a un point multiple d'ordre $2\mu + 2\nu$ en S, et deux points multiples d'ordre 2ν aux deux points circulaires de l'infini;

3° Les points où elles rencontrent les coniques sont sur une courbe de l'ordre $6\mu + 4\nu$.

75. Des points des coniques sur une droite D, on abaisse des perpendiculaires sur les diamètres qui passent par les points d'une autre droite D' :

1° Ces perpendiculaires enveloppent une courbe de la classe $4\mu + 4\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre μ à l'infini;

2° Leurs pieds sur les diamètres sont sur une courbe de l'ordre $6\mu + 8\nu$, qui a deux points multiples d'ordre $2\mu + 4\nu$ aux deux points circulaires de l'infini, et un point multiple d'ordre μ au point de rencontre de D et D';

3° Les points où les perpendiculaires rencontrent les coniques sont sur une courbe de l'ordre $10\mu + 8\nu$.

76. Si d'un point de chaque conique sur une droite D on mène une perpendiculaire sur la tangente en l'autre point :

1° Ces perpendiculaires enveloppent une courbe de la classe $2\mu + \nu$, qui a une tangente multiple d'ordre $\mu + \nu$ coïncidante avec D, et une tangente multiple d'ordre μ à l'infini;

2° Les pieds des perpendiculaires sont sur une courbe de la classe $3\mu + 2\nu$, qui a deux points multiples d'ordre $(\mu + \nu)$ aux deux points circulaires à l'infini;

3° Les perpendiculaires rencontrent les coniques en des points situés sur une courbe de l'ordre $5\mu + 2\nu$.

77. D'un point de chaque conique sur une droite D on abaisse une perpendiculaire sur le diamètre qui passe par l'autre point :

1° Ces perpendiculaires enveloppent une courbe de la classe $2\mu + 2\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre $\mu + 2\nu$ coïncidante avec D, et une tangente multiple d'ordre μ à l'infini;

2° Leurs pieds sont sur une courbe de l'ordre $3\mu + 4\nu$;

3° Les points où elles rencontrent les coniques sont sur une courbe de l'ordre $5\mu + 4\nu$.

78. Si les coniques sont coupées par deux droites D, D':

1° Les diamètres perpendiculaires aux cordes interceptées entre ces droites enveloppent une courbe de la classe $3\mu + 4\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre 4ν à l'infini;

2° Ces diamètres rencontrent les cordes en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $6\mu + 4\nu$, qui a deux points multiples d'ordre 3μ aux deux points circulaires de l'infini;

3° Les extrémités des diamètres sont sur une courbe de l'ordre $10\mu + 8\nu$.

79. Les perpendiculaires abaissées d'un point Q sur les diamètres qui passent par un point P rencontrent les coniques en des points situés sur une courbe de l'ordre $\mu + 2\nu$, qui a un point multiple d'ordre μ en Q.

80. Si d'un point Q on mène des perpendiculaires aux diamètres qui partent des points des coniques sur une droite D :

1° Ces perpendiculaires ont leurs pieds sur une courbe de l'ordre $2\mu + 4\nu$, qui a trois points multiples d'ordre $\mu + 2\nu$, l'un en Q et les deux autres aux points circulaires à l'infini;

2° Elles rencontrent les coniques sur une courbe de l'ordre $4\mu + 4\nu$, qui a un point multiple d'ordre 2μ en Q.

81. Les perpendiculaires abaissées d'un point Q sur les diamètres qui partent des points de contact des tangentes issues d'un point S :

1° Ont leurs pieds sur une courbe de l'ordre $4\mu + 2\nu$, qui a un point multiple d'ordre $2\mu + \nu$ en Q;

2° Rencontrent les coniques en des points situés sur une courbe de l'ordre $4\mu + 2\nu$, qui a un point multiple d'ordre $2\mu + \nu$ en Q.

82. Les perpendiculaires abaissées d'un point Q sur les tangentes aux points d'une droite :

1° Ont leurs pieds sur une courbe de l'ordre $2\mu + 2\nu$, qui a en Q un point multiple d'ordre $\mu + \nu$;

2° Rencontrent les coniques en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $4\mu + 2\nu$, qui a en Q un point multiple d'ordre 2μ.

83. Les perpendiculaires abaissées d'un point sur les

tangentes issues d'un point S rencontrent les coniques en des points situés sur une courbe de l'ordre $2\mu + 2\nu$, qui a un point multiple d'ordre 2μ en Q.

84. Les perpendiculaires abaissées d'un point Q sur les polaires d'un point P :

1° Ont leurs pieds sur une courbe de l'ordre 2μ, qui a trois points multiples d'ordre μ, l'un en P et les deux autres aux points circulaires à l'infini;

2° Rencontrent les coniques en des points situés sur une courbe de l'ordre 3μ, qui a en Q un point multiple d'ordre μ.

85. Les perpendiculaires abaissées d'un point Q sur les polaires d'un point P rencontrent les diamètres menés d'un point P_1 en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $\mu + \nu$, qui a deux points multiples, l'un d'ordre μ en P_1, et l'autre d'ordre ν en Q.

86. Les perpendiculaires abaissées d'un point Q sur les polaires d'un point P rencontrent les diamètres qui partent des points des coniques sur une droite D, en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $3\mu + 2\nu$, qui a en Q un point multiple d'ordre $\mu + 2\nu$.

87. Les perpendiculaires abaissées d'un point Q sur les polaires d'un point P rencontrent les tangentes issues d'un point S, en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $2\mu + \nu$, qui a en S un point multiple d'ordre 2μ, et en Q un point multiple d'ordre ν.

88. Les perpendiculaires abaissées d'un point Q sur les polaires d'un point P rencontrent les tangentes aux points d'une droite D en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $3\mu + \nu$, qui a un point multiple d'ordre $\mu + \nu$ en Q.

89. Par le pôle d'une droite D dans chaque conique, on mène les deux droites rectangulaires conjuguées par rapport à la conique :

1° Ces droites enveloppent une courbe de la classe $\mu + 2\nu$, qui a deux tangentes multiples d'ordre ν, l'une coïncidante avec D, et l'autre à l'infini ;

2° Le lieu des points où elles rencontrent les coniques est une courbe d'ordre $2\mu + 5\nu$.

90. Si par un point Q on mène dans chaque conique les deux droites conjuguées rectangulaires, ces droites rencontrent les coniques en des points situés sur une courbe d'ordre $2\mu + 2\nu$, qui a un point multiple d'ordre 2μ en Q.

91. Si des points où les diamètres menés d'un point P_1 rencontrent une droite Δ, on abaisse des perpendiculaires sur les polaires d'un point P :

1° Ces perpendiculaires enveloppent une courbe de la classe $\mu + \nu$;

2° Leurs pieds sur les polaires sont sur une courbe d'ordre $2\mu + \nu$, qui a deux points multiples d'ordre μ aux deux points circulaires de l'infini ;

3° Les points où elles rencontrent les coniques sont sur une courbe de l'ordre $3\mu + 2\nu$.

92. Si aux points où les diamètres issus d'un point P rencontrent une droite Δ on mène les perpendiculaires à ces diamètres, ces perpendiculaires rencontrent les coniques en des points situés sur une courbe d'ordre $\mu + 4\nu$.

93. Si par les points où les diamètres qui partent d'une droite D rencontrent une droite Δ on mène des perpendiculaires à ces diamètres :

1° Ces perpendiculaires enveloppent une courbe de la classe $2\mu + 4\nu$;

2° Les points où elles rencontrent les coniques sont sur une courbe de l'ordre $6\mu + 8\nu$.

94. Si par les points où les diamètres qui partent des points des coniques sur une droite D rencontrent une

droite Δ on mène des perpendiculaires aux polaires d'un point P :

1° Ces perpendiculaires enveloppent une courbe de la classe $3\mu + 2\nu$;

2° Rencontrent les coniques en des points situés sur une courbe de l'ordre $8\mu + 4\nu$.

95. Si des points où les tangentes aux coniques en leurs points sur une droite D rencontrent une droite Δ on abaisse des perpendiculaires sur les polaires d'un point P :

1° Ces perpendiculaires enveloppent une courbe de la classe $3\mu + \nu$, qui a une tangente multiple d'ordre 2μ coïncidante avec Δ ;

2° Leurs pieds sur les polaires ont pour lieu une courbe de l'ordre $5\mu + \nu$, qui a deux points multiples d'ordre 2ν aux points circulaires de l'infini ;

3° Les points où elles rencontrent les coniques sont sur une courbe de l'ordre $8\mu + 2\nu$.

96. Si des points où les tangentes issues d'un point S rencontrent une droite Δ on abaisse des perpendiculaires sur les polaires d'un point P :

1° Ces perpendiculaires enveloppent une courbe de la classe $2\mu + \nu$;

2° Leurs pieds sur les polaires de P sont sur une courbe de l'ordre $4\mu + \nu$, qui a deux points multiples d'ordre 2μ aux deux points circulaires de l'infini ;

3° Les points où elles rencontrent les coniques sont sur une courbe d'ordre $6\mu + 2\nu$.

97. Si par les points où les perpendiculaires abaissées d'un point Q sur les polaires d'un point P rencontrent une droite Δ on mène les diamètres des coniques :

1° Ces diamètres enveloppent une courbe de la classe $\mu + 2\nu$;

2° Leurs extrémités sont sur une courbe de l'ordre $3\mu + 2\nu$.

98. Si par les points où les perpendiculaires abaissées d'un point Q sur les polaires d'un point P rencontrent une droite Δ on mène des tangentes :

1° Ces tangentes enveloppent une courbe de la classe $2\mu + \nu$;

2° Leurs points de contact sont sur une courbe d'ordre $3\mu + \nu$.

99. Par chaque point d'une conique sur une droite D on mène la perpendiculaire au diamètre qui passe par ce point :

1° Ces perpendiculaires enveloppent une courbe de la classe $2\mu + 2\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre $\mu + 2\nu$ coïncidante avec D, et une tangente multiple d'ordre μ à l'infini;

2° Elles coupent les coniques en des points dont le lieu est une courbe d'ordre $5\mu + 4\nu$.

100. Les tangentes perpendiculaires aux diamètres menés d'un point P :

1° Enveloppent une courbe de la classe 3ν;

2° Rencontrent les diamètres en des points situés sur sur une courbe d'ordre 5ν, qui a en P un point multiple d'ordre 3ν;

3° Ont leurs points de contact sur une courbe d'ordre $\mu + 3\nu$.

101. Les perpendiculaires abaissées d'un point Q sur les diamètres passant par un point P rencontrent les coniques en des points situés sur une courbe d'ordre 3ν; et les tangentes en ces points enveloppent une courbe de la classe $\mu + 3\nu$.

102. Les perpendiculaires abaissées d'un point P sur les polaires de ce point rencontrent les coniques en des points situés sur une courbe d'ordre 2μ; et les tangentes

en ces points enveloppent une courbe de la classe 5μ.

103. Si des points de contact des tangentes issues d'un point S on mène des perpendiculaires aux cordes comprises entre deux droites D, D' :

1° Ces perpendiculaires enveloppent une courbe de la classe $10\mu + 4\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre $4\mu + 4\nu$ à l'infini ;

2° Leurs pieds sur les cordes sont sur une courbe de l'ordre $16\mu + 4\nu$, qui a deux points multiples d'ordre 6μ aux deux points circulaires de l'infini ;

3° Leurs points de rencontre avec les coniques auxquelles elles se rapportent sont sur une courbe de l'ordre $24\mu + 4\nu$.

104. Si les coniques sont coupées par trois droites D, D', D'', et que de leurs points D'' on abaisse des perpendiculaires sur les cordes comprises entre D et D' :

1° Ces perpendiculaires enveloppent une courbe de la classe 10μ, qui a une tangente multiple d'ordre 6μ coïncidante avec D'', et une d'ordre 4μ à l'infini ;

2° Les pieds des perpendiculaires sont sur une courbe de l'ordre 16μ, qui a deux points multiples d'ordre 6μ aux deux points circulaires de l'infini ;

3° Les perpendiculaires coupent les coniques en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre 24μ.

NOTE SUR LA RÉSOLUTION EN NOMBRES ENTIERS ET POSITIFS DE L'ÉQUATION (1) $x^m = y^n + 1$

(voir 2e série, t. IX, p. 469).

2. Lorsque l'inconnue y représente un nombre premier, la seule solution que l'équation (1) puisse admettre, en valeurs entières plus grandes que l'unité, est, comme pour le cas de x premier,

$$x=3,\ m=2,\ \ y=2,\ n=3.$$

La démonstration relative à ce second cas diffère peu de celle que nous avons donnée (n° 1) pour le premier.

L'équation $x^m=y^n+1$ donne

$$(x-1)[\mathrm{M}(x-1)+m]=y^n,$$

où M désigne la partie entière du quotient de la division de $x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots+x+1$, par $x-1$, et le reste, m, de cette division peut être considéré comme un nombre premier (*voir* le n° 1).

Le facteur $(x-1)$ représente un nombre entier supérieur à l'unité, car l'égalité $(x-1)=1$ donnerait $x=2$, et l'on sait déjà que x ne peut être égal à un nombre premier autre que 3 (*voir* le n° 1).

De là, on conclura (n° 1)

$$y=m=(x-1).$$

Par suite, l'équation proposée $x^m=y^n+1$ devient

$$(y+1)^y=y^n+1;$$

d'où

$$\left(1+\frac{1}{y}\right)^y=y^{n-y}+\frac{1}{y^y}.$$

Or, la valeur de $\left(1+\frac{1}{y}\right)^y$ étant comprise entre 2 et 3, les deux nombres entiers y et n doivent satisfaire aux deux inégalités

$$y^{n-y}+\frac{1}{y^y}>2,\quad \text{et}\quad y^{n-y}+\frac{1}{y^y}<3,$$

ce qui exige qu'on ait $y=2$ et $n=3$. Il s'ensuit

$$m=2,\quad x=3.$$

Remarque. — Lorsque l'un des deux nombres x, y est premier, la résolution, en nombres entiers positifs et plus grands que l'unité, de l'équation $x^m = y^n + 1$ se ramène à celle de l'équation $x^y = y^x + 1$.

THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. J. G.,

Étudiant à l'Université de Turin.

Les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point M de la circonférence circonscrite à un triangle ABC sur les trois côtés sont les points d'intersection des circonférences qui ont pour diamètres MA, MB, MC. Donc, *si trois circonférences coupent au même point la circonférence de leurs centres, leurs points d'intersection sont en ligne droite.*

La réciproque est vraie. Donc *les centres* O_1, O_2, O_3, O_4 *des circonférences circonscrites aux quatre triangles formés par quatre droites* A, B, C, D *sont sur une même circonférence avec le point* M *d'intersection des circonférences* O_1, O_2, O_3, O_4.

Considérant A, B, C, D comme les droites qui joignent les pieds des perpendiculaires abaissées de M sur le quadrilatère qui a pour sommets les points diamétralement opposés à M, on conclut que : *Si d'un point* M *de la circonférence circonscrite à un quadrilatère on abaisse des perpendiculaires sur les côtés et les diagonales de ce quadrilatère, leurs pieds donnent lieu à quatre droites; les pieds des perpendiculaires abaissées de* M *sur ces droites sont en ligne droite.*

THÉORÈMES D'ARITHMÉTIQUE;

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

THÉORÈME I. — *Le nombre n étant entier et supérieur à 1, l'équation*

$$x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)=y^n$$

est impossible en nombres entiers supérieurs à zéro.

Pour le démontrer, nous distinguerons deux cas, suivant que n est égal ou supérieur à 2.

1° $n=2$. L'équation

$$x(x+1)=y^2$$

est impossible en nombres entiers supérieurs à zéro. En effet, si elle admettait la solution $x=\alpha$, $y=\beta$, le nombre entier β serait compris entre α et $\alpha+1$, ce qui est impossible, puisque α et $\alpha+1$ sont deux entiers consécutifs.

2° $n>2$. L'équation

$$x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)=y^n$$

est encore impossible en nombres entiers supérieurs à zéro. En effet, si l'équation admettait la solution $x=\alpha$, $y=\beta$, le nombre entier β serait évidemment l'un des nombres $\alpha+1, \alpha+2, \ldots, \alpha+n-2$; alors le premier membre contiendrait $\beta-1$ en facteur, et β^n serait divisible par $\beta-1$, ce qui est impossible.

THÉORÈME II. — *Le nombre n étant entier et supérieur à 2, l'équation*

$$x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)=y^n+1$$

est impossible en nombres entiers supérieurs à zéro.

En effet, si cette équation admettait la solution $x=\alpha$, $y=\beta$, le nombre entier β serait évidemment l'un des nombres $\alpha+1$, $\alpha+2,\ldots,\alpha+n-2$; alors le premier membre contiendrait $\beta+1$ en facteur, et β^n+1 serait divisible par $\beta-1$, ce qui est impossible.

Remarque. — Dans le cas où $n=2$, il est facile de démontrer que l'équation considérée n'admet que la solution unique $x=y=1$.

Théorème III. — *Le nombre n étant entier, impair et supérieur à* 1, *l'équation*

$$x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)=y^n-1$$

est impossible en nombres entiers supérieurs à zéro.

En effet, si elle admettait la solution $x=\alpha$, $y=\beta$, le nombre entier β serait évidemment l'un des nombres $\alpha+1$, $\alpha+2,\ldots,\alpha+n-2$; alors le premier membre contiendrait $\beta+1$ en facteur, et β^n-1 serait divisible par $\beta+1$, ce qui est impossible, puisque n est impair.

NOTE SUR LES PODAIRES CENTRALES DES CONIQUES;

Par M. Samuel ROBERTS.

Je ne sache pas que les relations suivantes, malgré leur simplicité élémentaire, aient été remarquées. L'équation d'une ellipse étant $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, on sait que la podaire centrale, c'est-à-dire le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du centre sur les tangentes, se trouve représentée par

$$(a)\qquad \rho^2=a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha=\frac{a^2-b^2}{2}\cos 2\alpha+\frac{a^2+b^2}{2}.$$

Nous appellerons *cercle focal* d'une ellipse ou d'une hyperbole le cercle construit sur la droite limitée au centre et à un foyer réel comme diamètre. Donc, l'équation des deux cercles focaux de l'ellipse est

$$(b) \qquad \rho^2 = (a^2 - b^2)\cos^2\alpha = \frac{a^2 - b^2}{2}\cos 2\alpha + \frac{a^2 - b^2}{2}.$$

Le cercle dont le petit axe d'une ellipse est un diamètre peut être appelé le *cercle inscrit*, et le cercle dont le grand axe d'une conique est un diamètre peut être appelé le *cercle circonscrit*. En désignant par P l'aire de la podaire comprise entre les limites angulaires $\alpha = \omega_1$, $\alpha = \omega_2 < \omega_1$; par C l'aire des cercles focaux comprise entre les mêmes limites et par A l'aire du cercle inscrit entre les mêmes limites, on a, en vertu de la formule $\frac{1}{2}\int_{\omega_2}^{\omega_1} \rho^2 d\alpha$,

$$\mathrm{P} - \mathrm{A} = \mathrm{C}.$$

Il résulte de là qu'*étant données une ellipse et sa podaire centrale, si l'on mène deux rayons vecteurs centraux, l'espace compris entre les rayons vecteurs, la podaire et le cercle inscrit est égal à l'espace compris entre les mêmes rayons vecteurs et les cercles focaux.*

En effet, soient AB, CD (*) les axes de l'ellipse, O le centre, F, F' les foyers, OR_1, OR_2 deux rayons vecteurs centraux qui coupent un cercle focal en a, b; le cercle inscrit en c, d; la podaire en e, f; le cercle circonscrit en g, h: on aura

$$\text{aire } Oab = \text{aire } cdef.$$

Pour un système d'ellipses homofocales, les deux cercles focaux restent invariables. Par conséquent, *étant*

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

donné un système de podaires centrales d'ellipses homofocales, l'aire comprise entre deux rayons vecteurs centraux donnés, une podaire et le cercle inscrit correspondant, est constante pour tout le système.

Si l'on mène Or_1, Or_2, deux rayons vecteurs, perpendiculaires à OR_1, OR_2 respectivement, il est facile de voir qu'on aura

$$\text{aire } Or_1r_2 = \text{aire } efgh,$$

en supposant que Or_1, Or_2 coupent le cercle focal en r_1, r_2.

Il est bon de remarquer que les deux cercles focaux forment une podaire centrale par rapport à la droite limitée aux foyers F, F′, c'est-à-dire par rapport à la conique infiniment aplatie FF′.

Passons à l'hyperbole. Il faut observer que le centre est un point double de la podaire centrale de l'hyperbole. Par conséquent, le rayon vecteur de la courbe s'évanouit en passant par ce point, et l'on doit prendre les aires entre des limites définies. Les équations correspondantes à (a), (b) sont

$$\rho^2 = \frac{a^2+b^2}{2}\cos 2\alpha + \frac{a^2-b^2}{2},$$

$$\rho^2 = \frac{a^2+b^2}{2}\cos 2\alpha + \frac{a^2+b^2}{2}.$$

Nous appellerons *cercle adjoint* de l'hyperbole le cercle concentrique dont le rayon est b. En désignant par P_1 l'aire de la podaire centrale comprise entre les limites angulaires $\alpha = \omega_1$, $\alpha = \omega_2 < \omega_1$; par C l'aire d'un cercle focal entre les mêmes limites et par A l'aire correspondante du cercle adjoint on aura

$$P_1 = C_1 - A_1.$$

On sait que les rayons vecteurs coupent la même branche de la podaire. Il résulte de là qu'*étant données une hyperbole et sa podaire centrale, si l'on méne deux rayons vecteurs qui coupent la même branche de la podaire et un cercle focal correspondant, l'aire de la podaire comprise entre les rayons est égale à l'aire comprise entre les rayons, le cercle focal et le cercle adjoint.*

En effet, soient AB (*) le grand axe de l'hyperbole; O le centre; F, F′ les foyers; OF′ un cercle focal; soient OR_1, OR_2 deux rayons vecteurs qui rencontrent la podaire en a, b; le cercle circonscrit en c, d; le cercle adjoint en e, f; le cercle focal en g, h, on aura

$$\text{aire } Oab = \text{aire } efgh.$$

Soient Or_1, Or_2 deux rayons perpendiculaires à OR_1, OR_2 respectivement. Il est aisé de voir qu'on aura

$$\text{aire } Or_1r_2 = \text{aire } abcd.$$

Lorsqu'il s'agit d'un système d'hyperboles homofocales, les cercles focaux restent les mêmes. Il suit de là qu'entre des limites convenables, la somme aire Oab + aire Oef est constante pour les mêmes rayons vecteurs.

Pour la lemniscate, le cercle circonscrit et le cercle adjoint coïncident.

Ces relations simples entre les aires des podaires centrales et des cercles associés conduisent à plusieurs constructions particulières qui offrent de l'intérêt.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

QUELQUES PROBLÈMES RELATIFS A L'ELLIPSE ET A L'ELLIPSOIDE;

PAR M. L. LINDELÖF.

(Extrait des *Comptes rendus de la Société des Sciences de Finlande* pour l'année 1868-1869.)

Les problèmes concernant les maxima et les minima des polygones inscrits ou circonscrits à une ellipse se résolvent très-simplement en considérant l'ellipse comme projection d'un cercle. Les polygones en question doivent être alors considérés comme les projections de polygones de même espèce inscrits ou circonscrits au cercle. Le rapport entre la surface d'une figure quelconque et celle de sa projection ayant, dans ce cas, une valeur constante, savoir : la sécante de l'angle des deux plans, une figure donnée sera donc maximum ou minimum en même temps que sa projection. De cette simple considération, il s'ensuit immédiatement que le polygone d'espèce donnée (c'est-à-dire d'un nombre donné de côtés) et de surface maximum ou minimum, parmi ceux que l'on peut inscrire ou circonscrire à une ellipse, n'est autre chose que la projection du polygone maximum ou minimum de même espèce, inscrit ou circonscrit au cercle. Nous allons développer rapidement quelques conséquences de ce théorème général.

1. *Trouver le plus grand triangle inscriptible à une ellipse donnée.*

La figure cherchée est la projection du plus grand triangle qui puisse être inscrit dans un cercle. Or celui-ci est le triangle équilatéral. Mais dans le cercle il existe une infinité de pareils triangles, et ils sont, à leur tour, circonscrits à un cercle moindre, concentrique au premier, et dont le rayon est à celui du premier comme $\cos 60^\circ : 1$, ou comme $1 : 2$. Les triangles maxima inscrits dans une ellipse sont donc aussi en nombre infini, et ils sont tous, à leur tour, circonscrits à une ellipse concentrique et semblable à la première, et de dimensions moitié moindres, et cela de telle manière que chaque côté touche en son milieu la petite ellipse. La surface de chacun de ces triangles est $\frac{3\sqrt{3}}{4}ab$, a et b désignant les demi-axes de l'ellipse donnée.

On peut construire le triangle cherché en déterminant à volonté, sur la circonférence du cercle circonscrit à l'ellipse, trois points distants les uns des autres de 120 degrés, et abaissant de ces points des perpendiculaires sur le grand axe. Les points où ces perpendiculaires rencontrent la périphérie de l'ellipse seront les sommets du triangle cherché.

2. *Trouver le plus grand quadrilatère inscriptible à une ellipse donnée.*

La figure cherchée est la projection d'un carré inscrit dans le cercle. Ses diagonales forment un système de diamètres conjugués, puisqu'elles sont les projections de deux diamètres du cercle rectangulaires entre eux.

Les quadrilatères de cette nature inscrits dans l'ellipse sont en nombre infini, et sont, à leur tour, circonscrits à une autre ellipse, dont les axes sont à ceux de l'ellipse donnée dans le rapport de $\cos 45^\circ : 1$, ou de $1 : \sqrt{2}$. La surface de chacun de ces quadrilatères est $2ab$.

3. *Trouver le plus grand polygone d'un nombre*

donné de côtés, qui soit inscriptible dans une ellipse donnée.

La figure correspondante inscrite dans le cercle est un polygone régulier, qui, à son tour, est circonscrit à un cercle plus petit. Si n est le nombre des côtés, le rayon du petit cercle est à celui du grand comme $\cos\frac{\pi}{n} : 1$.

La figure cherchée est donc pareillement circonscrite à une ellipse concentrique et semblable à l'ellipse donnée, et dont les axes sont moindres dans le rapport ci-dessus que ceux de l'ellipse donnée.

La construction s'effectue très-simplement en partageant la circonférence du cercle circonscrit à l'ellipse en n parties égales, et abaissant des perpendiculaires des points de division sur le grand axe. Les points où ces perpendiculaires rencontrent la périphérie de l'ellipse seront les sommets du polygone cherché.

On peut encore parvenir au même but de la manière suivante. Construisons une ellipse dont les axes coïncident avec ceux de l'ellipse donnée, mais soient moindres que ces derniers dans le rapport de $\cos\frac{\pi}{n} : 1$. Par un point pris à volonté sur l'ellipse extérieure, menons une corde qui soit en même temps tangente à l'ellipse intérieure; par l'autre extrémité de cette corde, menons une nouvelle corde tangente, et ainsi de suite. En continuant cette construction, on revient finalement au point de départ, et l'on obtient un polygone fermé, jouissant de la propriété de maximum demandée.

Les côtés du polygone sont partagés en leurs milieux par les points de contact. Chaque côté partage le diamètre qui lui est conjugué en deux segments qui sont entre eux dans le rapport de $1 - \cos\frac{\pi}{n}$ à $1 + \cos\frac{\pi}{n}$, ou, plus simplement, de $\tang^2 \frac{\pi}{n}$ à 1. On obtient ainsi cette proposition réciproque : *Si l'on partage un diamètre d'une ellipse, par une corde conjuguée, en deux segments qui soient entre eux comme* $\tang^2 \frac{\pi}{n} : 1$, *l'enveloppe de cette corde est une ellipse concentrique à la première, et dont les axes sont moindres que ceux de l'ellipse donnée dans le rapport de* $\cos \frac{\pi}{n} : 1$. Il faut remarquer qu'ici n peut être un nombre quelconque, entier, fractionnaire, ou même irrationnel.

4. *Trouver le plus petit polygone d'un nombre donné de côtés, qui soit circonscriptible à une ellipse donnée.*

Ce problème se résout de la même manière que le précédent. On trouve que le polygone est pareillement inscrit dans l'ellipse que l'on obtient en augmentant les dimensions de l'ellipse donnée dans le rapport de $\cos \frac{\pi}{n} : 1$, n désignant le nombre des côtés. La construction peut se faire en partageant la circonférence du cercle circonscrit à l'ellipse en n parties égales, et abaissant des points de division des perpendiculaires sur le grand axe de l'ellipse. Les points de l'ellipse ainsi déterminés seront les points de contact des côtés du polygone cherché.

La méthode suivie dans la solution des problèmes précédents consiste proprement en ceci : que l'on conçoit un cercle, avec les figures régulières correspondantes, inscrites ou circonscrites, qui soit contracté suivant une certaine direction, ou qui soit transformé de telle manière, que toutes ses ordonnées soient diminuées dans un certain rapport, sans que les abscisses soient altérées.

Une transformation de cette espèce, appliquée aux figures dans l'espace, est ce qu'on appelle la *transformation homographique,* laquelle consiste en ce que la figure est dilatée ou contractée suivant les directions des trois axes coordonnés, mais d'après une échelle différente pour chacune de ces directions. Ces échelles peuvent, par exemple, être choisies de manière qu'un ellipsoïde donné à trois axes se change par là en une sphère.

Considérée au point de vue de la géométrie analytique, la transformation en question consiste à faire correspondre à un point (x, y, z) de l'une des figures un point (ξ, η, ζ) de l'autre, en supposant ξ proportionnelle à x, η proportionnelle à y, et ζ proportionnelle à z. En posant

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad \zeta = \frac{z}{c},$$

alors, à un ellipsoïde ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

correspondra une sphère dont l'équation sera

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1.$$

Une équation du premier degré entre x, y, z se transforme en une équation de même degré entre ξ, η, ζ, d'où résulte qu'à un plan dans l'une des figures correspond un plan dans l'autre. De plus, on voit facilement que les plans diamétraux et les diamètres conjugués se correspondent dans les deux figures.

Considérons un élément de volume $dx\,dy\,dz$ dans l'une des figures; il aura pour correspondant un élément de volume $abc\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$ dans l'autre figure. Les éléments de volume correspondants, et par suite aussi les volumes finis correspondants, sont donc proportionnels dans l'ellipsoïde et dans la sphère, et sont entre eux dans le rapport de *abc* : 1. Une telle proportionnalité n'a pas lieu entre les lignes ou les surfaces correspondantes en général, mais elle a lieu entre les *parties* correspondantes de deux lignes droites homologues ou de deux plans homologues. De là résulte, en particulier, que les centres de gravité, tant des lignes droites que des surfaces planes et des volumes, conservent leur propriété caractéristique dans la transformation dont il s'agit.

Si l'on compare de cette manière l'ellipsoïde avec une sphère, et que l'on considère l'un d'eux comme une transformation homographique de l'autre; si l'on imagine en même temps des figures inscrites ou circonscrites à la sphère, à ces figures correspondront des figures de même espèce, inscrites ou circonscrites à l'ellipsoïde. Or, le rapport entre les volumes n'étant pas altéré par la transformation, la propriété de maximum ou de minimum subsistera encore pour le volume que peut prendre une figure. Une telle comparaison donne le moyen d'établir très-simplement une multitude de propositions relatives à l'ellipsoïde, et en particulier de résoudre les problèmes suivants.

5. *Trouver le plus grand tétraèdre que l'on puisse inscrire dans un ellipsoïde.*

La figure cherchée est homologue au tétraèdre régulier inscrit dans la sphère. Elle est donc également circonscrite à un ellipsoïde moindre, concentrique et semblable au proposé. Le point de contact de chaque face coïncide avec son centre de gravité.

Ces tétraèdres maxima sont en nombre infini. Pour en construire un, on peut prendre à volonté un diamètre de l'ellipsoïde, et au tiers de sa longueur mener un plan conjugué à ce diamètre. Dans la section ainsi obtenue, on inscrira un triangle d'aire maximum. Ce triangle sera la base du tétraèdre cherché, et l'extrémité du diamètre la plus éloignée en sera le sommet.

Si par les sommets de la figure ainsi déterminée on mène des plans tangents à l'ellipsoïde, on obtient un tétraèdre circonscrit de volume minimum, lequel, à son tour, est inscrit dans un ellipsoïde semblable au proposé.

On résoudra d'une manière analogue les problèmes relatifs à l'hexaèdre, à l'octaèdre, au dodécaèdre et à l'icosaèdre.

6. *Le polyèdre minimum d'un nombre donné de faces, que l'on puisse circonscrire à un ellipsoïde, est tel, que toutes ses faces touchent l'ellipsoïde en leurs centres de gravité respectifs.*

On peut se convaincre, par un raisonnement très-simple, de la nécessité de la condition que nous venons d'énoncer. Car si le centre de gravité d'une face ne coïncide pas avec son point de contact, et que l'on fasse tourner la face infiniment peu autour d'une droite menée dans son plan par son centre de gravité, on voit, en vertu du théorème de Guldin, que le volume du polyèdre n'a pas varié, bien que la face, dans sa nouvelle position, tombe en dehors de l'ellipsoïde. Si l'on transporte ensuite cette face parallèlement à elle-même vers l'ellipsoïde, jusqu'à ce qu'elle lui redevienne tangente, on obtiendra un nouveau polyèdre circonscrit, moindre que le polyèdre donné, lequel par conséquent ne saurait être un minimum.

Du reste, on voit facilement que le dernier théorème énoncé a généralement lieu pour les polyèdres circonscrits à une surface convexe et fermée, quelle que soit d'ailleurs sa forme.

En renversant les propositions que nous venons de démontrer, on en peut déduire de nouveaux résultats. A ce point de vue, nous allons encore traiter quelques problèmes.

7. *Trouver l'ellipse minimum, circonscrite à un triangle donné.*

Le rapport entre les surfaces de l'ellipse et du triangle doit être un minimum, et cela a lieu si le triangle, de son côté, est un des triangles maxima que l'on puisse inscrire dans l'ellipse, auquel cas le rapport en question devient égal à sa limite, qui est $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$. Cette dernière condition peut toujours se réaliser. En effet, le triangle donné peut être considéré comme la projection d'un certain triangle équilatéral, et l'ellipse cherchée sera alors la projection d'un cercle circonscrit à ce triangle.

De là résulte, d'après le n° 1, que le centre de gravité du triangle donné doit être le centre de l'ellipse cherchée, et qu'ainsi chacun des côtés du triangle est conjugué au diamètre mené par le sommet opposé. Comme on connaît de cette manière un diamètre et une corde conjuguée à ce diamètre, l'ellipse est déterminée et peut facilement se construire par points.

8. *Trouver l'ellipse maximum, inscrite à un triangle donné.*

Le rapport entre les surfaces de l'ellipse et du triangle doit être un maximum, et cela a lieu lorsque le triangle, de son côté, est un triangle d'aire minimum circonscrit à l'ellipse. Il s'ensuit donc, d'après le n° 2, que le centre de gravité du triangle est le centre de l'ellipse, et que celle-ci touche chacun des côtés en son milieu.

9. *Trouver l'ellipsoïde minimum, circonscrit à un tétraèdre donné.*

Le tétraèdre donné peut toujours être considéré comme une transformation homographique d'un tétraèdre régulier. Pour s'en assurer, le plus simple est de rapporter les deux tétraèdres à un système particulier de coordonnées obliques, en prenant le sommet du tétraèdre pour origine et les trois arêtes qui y aboutissent pour axes coordonnés. Si l'on désigne ces trois arêtes par a, b, c pour le tétraèdre donné, et par 1 pour le tétraèdre régulier, on voit qu'entre les coordonnées x, y, z du premier système et les coordonnées ξ, η, ζ du second, il faudra poser les relations

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad \zeta = \frac{z}{c}.$$

Il est clair que, dans cette transformation, comme dans la transformation avec des coordonnées rectangulaires, les éléments de volume correspondants dans les deux figures sont proportionnels, et aussi que les lignes droites, les plans et les surfaces du second degré conservent leur caractère général, etc.

Maintenant, le rapport entre les volumes de l'ellipsoïde et du tétraèdre devant être un minimum, et la plus petite valeur dont ce rapport soit snsceptible s'obtenant lorsque le tétraèdre de son côté est un maximum parmi tous ceux que l'on peut inscrire dans l'ellipsoïde, il est clair que, dans la transformation homographique en question, l'ellipsoïde doit avoir pour figure correspondante la sphère circonscrite au tétraèdre régulier. De là on déduit facilement que le centre de gravité du tétraèdre donné doit être le centre de l'ellipsoïde; que chacune des faces est conjuguée au diamètre mené par le sommet opposé, lequel rencontre la face en son centre de gravité, en même temps que la section faite par le plan d'une face est l'ellipse la plus petite qui puisse être circonscrite à cette face.

Connaissant ainsi un diamètre et une section conjuguée à ce diamètre, l'ellipsoïde sera complétement déterminé.

10. *Trouver l'ellipsoïde maximum, inscrit dans un tétraèdre déterminé.*

On démontre, comme dans le problème précédent, que le centre de l'ellipsoïde coïncide avec le centre de gravité du tétraèdre, en même temps que l'ellipsoïde touche chaque face en son centre de gravité.

Le problème traité au n° 7 a été proposé pour la première fois par Euler, et résolu par lui analytiquement; il a été repris, depuis, d'une manière différente, par Liouville, par Bertrand et par d'autres géomètres. Relativement à une autre solution géométrique du problème 9, on trouve une courte indication de Liouville dans le tome VII de son *Journal de Mathématiques*.

SUR LES COMBINAISONS SIMPLES;

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

I.

PROBLÈME. — *On forme tous les produits différents de $n+p$ lettres n à n; on considère les fractions qui ont pour numérateurs ces produits et pour dénominateur commun l'un quelconque d'entre eux; on réduit chacune d'elles à sa plus simple expression, et l'on demande combien il y a, après cette réduction, de fractions conservant k lettres à chaque terme.*

Évidemment, les k lettres qui restent au numérateur sont différentes des k lettres qui restent au dénominateur. Ces dernières sont l'une quelconque des combinaisons k à k des n lettres du dénominateur primitif; les premières sont l'une quelconque des combinaisons k à k des p lettres qui n'entraient pas dans ce dénominateur primitif. Le nombre cherché est donc $C_n^k C_p^k$.

Ainsi, il y a une fraction qui se réduit à un; il y en a $C_n^1 C_p^1$ qui conservent une seule lettre à chaque terme; il y en a $C_n^2 C_p^2$ qui en conservent deux; et ainsi de suite.

Remarque. — Il convient, dans cette question et les suivantes, comme dans toutes celles qui concernent les combinaisons simples, de regarder comme égaux à 1 les nombres de combinaisons dont l'indice supérieur est zéro, et comme nuls ceux dont l'indice supérieur surpasse l'inférieur.

II.

Problème. — *Étant données toutes les combinaisons simples de $n+p$ lettres n à n, on demande combien il y en a qui aient k lettres communes avec l'une de ces combinaisons.*

Si l'on divise toutes les combinaisons qui répondent à la question par celle à laquelle on les compare, les fractions obtenues, réduites à leur plus simple expression, ne conserveront plus que $n-k$ lettres à chaque terme. D'après le problème précédent, le nombre cherché est donc $C_n^{n-k} C_p^{n-k}$.

Remarque. — Il est évident que ce problème et le précédent conduisent à un même mode de classification pour les combinaisons de $n+p$ lettres n à n.

III.

Théorème. — *Quels que soient les nombres entiers positifs n et p, on a identiquement*

$$C_{n+p}^n = C_n^1 C_p^1 + C_n^2 C_p^2 + C_n^3 C_p^3 + \ldots$$

Si nous nous reportons, en effet, à la solution du premier problème, nous voyons que cette égalité exprime simplement que le nombre total des fractions considérées est égal au nombre de celles qui se réduisent à 1, plus le nombre de celles qui ne conservent qu'une lettre à chaque terme, plus le nombre de celles qui en conservent deux, et ainsi de suite.

La solution du second problème suffirait de même à rendre évidente l'identité qui précède.

Remarque. — Le second membre de l'identité précédente est symétrique par rapport aux deux lettres n et p : il en résulte immédiatement ce théorème si connu

$$C_{n+p}^{n} = C_{n+p}^{p}.$$

IV.

THÉORÈME. — *La somme des carrés des coefficients du développement de $(a+b)^n$ est égale au plus grand coefficient, c'est-à-dire au coefficient du milieu, dans le développement de $(a+b)^{2n}$.*

En effet, si, dans l'identité précédente, on fait $p = n$, on a immédiatement

$$C_{2n}^{n} = 1^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + (C_n^3)^2 + \ldots + (C_n^n)^2.$$

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Questions 758 *et* 759

(voir 2e série, t. V, p. 191);

PAR LE P. PEPIN, S. J.

QUESTION 758. *Le nombre a n'étant pas divisible par p nombre premier impair, on sait que* $a^{\frac{p-1}{2}} = Ap \pm 1$;

le reste ± 1 *est représenté par* $\left(\frac{a}{p}\right)$, *notation de Legendre. Cela posé, on a*

$$\Sigma (ax^2 + b)^{p-1} = Bp - \left[1 + \left(\frac{-ab}{p}\right)\right],$$

$$\Sigma (ax^2 + by^2 + c)^{p-1} = Cp + \left(\frac{-ab}{p}\right).$$

a, b, c *sont des entiers non divisibles par* p; A, B, C *sont des entiers; les sommes sont prises en donnant à* x *et à* y *les valeurs* $0, 1, 2, \ldots, p-1$.

(Le Besgue.)

J'ajouterai que le nombre a est résidu quadratique de p ou non-résidu, suivant que l'on a

$$\left(\frac{a}{p}\right) = 1, \quad \text{ou} \quad \left(\frac{a}{p}\right) = -1;$$

de telle sorte que le nombre des solutions de l'équation indéterminée

$$x^2 - a = py \tag{1}$$

est toujours représenté par la somme

$$1 + \left(\frac{a}{p}\right). \tag{2}$$

Considérons d'abord la première des sommes proposées. D'après le théorème de Fermat, les termes de cette somme, qui ne sont pas divisibles par p, se réduisent chacun à un multiple de p plus un. Par suite, la somme entière est égale à un multiple de p, plus l'unité répétée autant de fois que la formule

$$ax^2 + b$$

a de valeurs non divisibles par p. Or le nombre de ces valeurs est égal au nombre p des valeurs de x diminué du nombre S_1 des solutions de l'équation indéterminée

$$ax^2 + b = py$$

ou de l'équation équivalente

$$(ax)^2 - (-ab) = py.$$

D'après la formule (2), ce nombre est donné par l'équation

$$S_1 = 1 + \left(\frac{-ab}{p}\right). \tag{3}$$

On a donc

$$\Sigma(ax^2 + b)^{p-1} = Bp - \left[1 + \left(\frac{-ab}{p}\right)\right].$$

De même, la seconde somme est un multiple de p augmenté du nombre des valeurs de la formule

$$ax^2 + by^2 + c$$

qui ne sont pas divisibles par p. Or ce nombre s'obtient en retranchant de p^2, nombre total des valeurs de cette formule, le nombre S_2 des valeurs divisibles par p. Tout revient donc à déterminer le nombre S_2 des solutions de l'équation indéterminée

$$ax^2 + by^2 + c = \mathfrak{M}p,$$

$\mathfrak{M}p$ désignant un multiple de p qui variera en passant d'une formule à l'autre.

Multiplions par a cette équation, et posons

$$ax = z + \mathfrak{M}p, \quad -ab = \beta + \mathfrak{M}p, \quad ac = \alpha + \mathfrak{M}p;$$

nous aurons l'équation équivalente

$$z^2 + \alpha = \beta y^2 + \mathfrak{M}p, \tag{4}$$

où la variable z doit prendre, comme la variable y, les valeurs $0, 1, 2, \ldots, p-1$.

Pour évaluer le nombre des solutions de cette équation, considérons simultanément les deux équations

$$(a) \qquad z^2 + \alpha = y^2 + \mathfrak{M}p,$$
$$(b) \qquad z^2 + \alpha = ny^2 + \mathfrak{M}p,$$

en désignant par n un non-résidu quadratique de p. Désignons par m le nombre des solutions de la première, et par m' celui des solutions de la seconde. On aura

$$m + m' = 2p.$$

En effet, si l'on donne à z les p valeurs 0, 1, 2, 3,..., $p-1$, pour chaque valeur de z, on obtiendra deux solutions dans l'ensemble des équations (a) et (b), savoir: deux solutions de l'équation (a), quand la somme $z^2+\alpha$ est résidu de p, deux solutions de l'équation (b), quand la même somme est non-résidu, et enfin une solution de l'équation (a) et une de l'équation (b), quand cette somme est un multiple de p.

Le nombre m se détermine aisément. L'équation (a) peut s'écrire

$$(y+z)(y-z) = \alpha + \mathfrak{M}p.$$

Or posons

$$y + z = h + \mathfrak{M}p, \quad y - z = k + \mathfrak{M}p,$$

h et k désignant des nombres compris, comme y et z, dans la suite 0, 1, 2,..., $p-1$. Nous aurons la relation

$$hk = \alpha + \mathfrak{M}p,$$

qui, pour chaque valeur de k, déterminera pour h une valeur unique, et les équations précédentes donneront pour y et pour z un seul système de valeurs. Le nombre de ces systèmes, c'est-à-dire le nombre m des solutions de l'équation (a) est donc égal à $p-1$.

Ce nombre m a été déterminé à peu près de la même manière par M. Camille Jordan. (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXII, p. 689.)

L'équation

$$m + m' = 2p$$

nous donnera par conséquent

$$m' = p + 1.$$

Le nombre des solutions de l'équation (4) est donc égal à $p - 1$ ou à $p + 1$, suivant qu'elle se ramène à l'équation (a) ou à l'équation (b), c'est-à-dire suivant que β est résidu ou non-résidu de p. Ce nombre est donc représenté dans tous les cas par la formule

$$p - \left(\frac{\beta}{p}\right).$$

En remplaçant β par sa valeur $-ab + \mathfrak{M}p$, on aura

$$(5) \qquad S_2 = p - \left(\frac{-ab}{p}\right).$$

Or nous avons vu que la somme $\Sigma(ax^2 + by^2 + c)^{p-1}$ est égale à un multiple de p diminué de S_2. On a donc

$$\Sigma(ax^2 + by^2 + c)^{p-1} = Cp + \left(\frac{-ab}{p}\right).$$

C. Q. F. T.

Question 759. *Les nombres* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m, a_{m+1}$ *sont des entiers* $< p$ *et non divisibles par* p. *On représente par* S_m^0, S_m *les nombres de solutions des équations indéterminées*

$$(\mathrm{I}) \qquad a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + \ldots + a_m x_m^2 = py,$$

$$(\mathrm{II}) \qquad a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + \ldots + a_m x_m^2 + a_{m+1} = py,$$

en prenant $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$ *parmi les nombres* 0, 1, 2, ..., $p - 1$.

On demande la démonstration des formules

$$(1)\qquad (p-1)\,S_m = S^0_{m+1} - S^0_m,$$

$$(2)\qquad S^0_1 - 1 = 0,$$

$$(3)\qquad S_1 - 1 = \left(\frac{-a_1 a_2}{p}\right),$$

$$(4)\qquad S^0_2 - p = (p-1)\left(\frac{-a_1 a_2}{p}\right),$$

$$(5)\qquad S_2 - p = -\left(\frac{-a_1 a_2}{p}\right),$$

$$(6)\qquad S^0\ - p^{m-1} = p\,(S^0_{m-2} - p^{m-3})\left(\frac{-a_{m-1} a_m}{p}\right),$$

$$(7)\qquad S^0_{2n+1} - p^{2n} = 0,$$

$$(8)\qquad S^0_{2n} - p^{2n-1} = p^{n-1}(p-1)\left[\frac{(-1)^n a_1 a_2 \ldots a_{2n}}{p}\right],$$

$$(9)\qquad S_{2n} - p^{2n-1} = -\,p^{n-1}\left[\frac{(-1)^n a_1 a_2 \ldots a_{2n}}{p}\right],$$

$$(10)\ (*)\qquad S_{2n+1} - p^{2n} = p^n\left[\frac{(-1)^{n+1} a_1 a_2 \ldots a_{2n+2}}{p}\right].$$

Les numéros indiquent l'ordre à suivre dans les démonstrations, qui sont fort simples. (Le Besgue.)

Si, désignant par z_{m+1} l'un quelconque des nombres $1, 2, 3, \ldots, p-1$, on multiplie l'équation (II) par z^2_{m+1}, et que l'on pose

$$\text{(III)}\qquad z_{m+1}\,x_i = z_i + py$$

pour toutes les valeurs $1, 2, 3, \ldots, m$ de l'indice i, cette équation pourra se mettre sous les deux formes suivantes :

$$\text{(IV)}\qquad z^2_{m+1}(a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + \ldots + a_m x_m^2 + a_{m+1}) = py,$$

$$\text{(V)}\qquad a_1 z_1^2 + a_2 z_2^2 + a_3 z_3^2 + \ldots + a_m z_m^2 + a_{m+1} z^2_{m+1} = py.$$

(*) Dans cette dernière formule, j'ai corrigé une faute d'impression.

Sous la dernière forme, elle est un cas particulier de l'équation (I). Si donc $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$ forment une solution de l'éqation (II), l'équation (III) donnera $(p-1)$ solutions de l'équation (V), pourvu que l'on donne successivement à z_{m+1} les $(p-1)$ valeurs $0, 1, 2, \ldots, p-1$. En employant successivement toutes les solutions de l'équation (II), on obtiendra toutes les solutions de l'équation (V), à l'exception de celles qui correspondent à la valeur particulière $z_{m+1} = 0$; en effet, les équations (III) et (IV) montrent qu'à toute solution de l'équation (V), dans laquelle z_{m+1} est différent de zéro, correspond toujours une solution de l'équation (II). D'un autre côté, toutes les solutions obtenues sont distinctes, parce qu'elles diffèrent ou bien par la valeur de z_{m+1}, ou bien par l'une des valeurs de $z_1, z_2, \ldots, z_m$, si elles correspondent à une même valeur de z_{m+1}. On a donc

$$(1) \qquad S^0_{m+1} - S^0_m = (p-1)S_m.$$

On a évidemment

$$(2) \qquad S^0_1 - 1 = 0;$$

car le nombre a_1 étant supposé non divisible par p, la congruence

$$a_1 x_1^2 = py$$

n'a qu'une solution $x_1 = 0$.

Si donc dans la formule (1) on fait $m = 1$, on aura

$$S^0_2 - 1 = (p-1) S_1.$$

Or S_1, désignant le nombre des solutions de l'équation

$$a_1 x_1^2 + a_2 = py,$$

a été déterminé dans la formule (3) de la question précédente : on a

$$(3) \qquad S_1 = 1 + \left(\frac{-a_1 a_2}{p}\right).$$

Substituant cette valeur dans l'équation précédente, nous obtiendrons

$$S_2^0 - 1 = (p-1) + (p-1)\left(\frac{-a_1 a_2}{p}\right),$$

d'où

$$(4) \qquad S_2^0 - p = (p-1)\left(\frac{-a_1 a_2}{p}\right).$$

Enfin, en remplaçant a, b, c par a_1, a_2, a_3 dans la formule (5) de la question précédente, nous avons

$$(5) \qquad S_2 - p = -\left(\frac{-a_1 a_2}{p}\right).$$

Reprenons les équations (I) et (II), et posons

$$a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 + \ldots + a_m x_m^2 + a_{m+1} = k.$$

La formule (5) établit une relation simple entre le nombre S_m des solutions de l'équation (II) et le nombre S_{m-2} des solutions de l'équation

$$(\text{VI}) \qquad a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 + \ldots + a_m x_m^2 + a_{m+1} = py.$$

Pour l'obtenir, partageons en deux groupes les solutions de l'équation (II), plaçant dans un premier groupe toutes celles qui répondent à des valeurs de k non divisibles par p, et dans un second groupe celles pour lesquelles k est un multiple de p. Le nombre des premières sera

$$(p^{m-2} - S_{m-2})\left[p - \left(\frac{-a_1 a_2}{p}\right)\right];$$

car, pour chacun des systèmes de valeurs $x_3, x_4, \ldots, x_m$ auxquels correspond une valeur de k non divisible par p, l'équation (II) admet le même nombre de solutions que l'équation

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + k = py.$$

En vertu de la formule (5), ce nombre est égal à

$$p - \left(\frac{-a_1 a_2}{p}\right).$$

Le nombre total des systèmes $x_3, x_4, \ldots, x_m$ est p^{m-2}. Celui de ces systèmes pour lesquels k est un multiple de p est égal au nombre S_{m-2} des solutions de l'équation (VI). La différence

$$p^{m-2} - S_{m-2}$$

exprime donc le nombre des systèmes $x_3, x_4, \ldots, x_m$, auxquels correspondent des valeurs de k non divisibles par p. Pour chacun de ces systèmes, nous avons vu que l'équation (II) admet un nombre de solutions égal à

$$p - \left(\frac{-a_1 a_2}{p}\right);$$

donc le nombre des solutions du premier groupe est égal au produit

$$(p^{m-2} - S_{m-2})\left[p - \left(\frac{-a_1 a_2}{p}\right)\right].$$

Si $k = py$, l'équation (II) se réduit à la suivante :

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 = py,$$

qui admet un nombre de solutions déterminé par la formule (4)

$$S_2^0 = p + (p-1)\left(\frac{-a_1 a_2}{p}\right).$$

Le nombre des solutions du second groupe est donc

$$S_{m-2}\left[p + (p-1)\left(\frac{-a_1 a_2}{p}\right)\right].$$

En réunissant les solutions des deux groupes, on a

$$S_m = (p^{m-2} - S_{m-2})\left[p - \left(\frac{-a_1 a_2}{p}\right)\right] + S_{m-2}\left[p + (p-1)\left(\frac{-a_1 a_2}{p}\right)\right],$$

d'où

$$(6)' \qquad S_m - p^{m-1} = (S_{m-2} - p^{m-3})\, p\left(\frac{-a_1 a_2}{p}\right).$$

On démontrerait de la même manière la formule

$$(6) \qquad S^0_m - p^{m-1} = (S^0_{m-2} - p^{m-3})\, p\left(\frac{-a_1 a_2}{p}\right).$$

Ces deux formules jointes aux formules (2), (3), (4) et (5) vont nous donner pour des valeurs quelconques de m le nombre des solutions des équations (I) et (II).

Supposons $m = 2n+1$. La formule (6) et l'équation (2) nous donnent les équations suivantes :

$$S^0_{2n+1} - p^{2n} = (S^0_{2n-1} - p^{2n-2})\, p\left(\frac{-a_1 a_2}{p}\right),$$

$$S^0_{2n-1} - p^{2n-2} = (S^0_{2n-3} - p^{2n-4})\, p\left(\frac{-a_3 a_4}{p}\right),$$

. . . . ,

$$S^0_3 - p^2 = (S_1 - 1)\, p\left(\frac{-a_{2n-1} a_{2n}}{p}\right),$$

$$S_1 - 1 = 0;$$

d'où l'on conclut successivement

$$S^0_3 - p^2 = 0, \quad S^0_5 - p^4 = 0, \ldots,$$

$$(7) \qquad S^0_{2n+1} - p^{2n} = 0.$$

De même la formule $(6)'$ et l'équation (3) donnent

$$S_{2n+1} - p^{2n} = (S_{2n-1} - p^{2n-2})\, p\left(\frac{-a_1 a_2}{p}\right),$$

$$S_{2n-1} - p^{2n-2} = (S_{2n-3} - p^{2n-4})\, p\left(\frac{-a_3 a_4}{p}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$S_1 - 1 = \left(\frac{-a_{2n+1} a_{2n+2}}{p}\right).$$

En multipliant ces équations membre à membre, on en déduit, après la suppression des facteurs communs,

$$(10) \qquad S_{2n+1} - p^{2n} = p^n \left(\frac{(-1)^{n+1} a_1 a_2 \ldots a_{2n+1} a_{2n+2}}{p}\right).$$

Supposons $m = 2n$. Les formules (6) et (4) donnent la suite d'équations

$$S^0_{2n} - p^{2n-1} = (S^0_{2n-2} - p^{2n-3})\, p\left(\frac{-a_1 a_2}{p}\right),$$

$$S^0_{2n-2} - p^{2n-3} = (S^0_{2n-4} - p^{2n-5})\, p\left(\frac{-a_3 a_4}{p}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$S^0_2 - p = (p-1)\left(\frac{-a_{2n-1} a_{2n}}{p}\right),$$

lesquelles, multipliées membre à membre, donnent, après suppression des facteurs communs,

$$(8) \qquad S^0_{2n} - p^{2n-1} = p^{n-1}(p-1)\left[\frac{(-1)^n a_1 a_2 \ldots a_{2n-1} a_{2n}}{p}\right].$$

De même les formules (6)′ et (5) donnent la suite d'équations

$$S_{2n} - p^{2n-1} = (S_{2n-2} - p^{2n-3})\,p\left(\frac{-a_1 a_2}{p}\right),$$

$$S_{2n-2} - p^{2n-3} = (S_{2n-4} - p^{2n-5})\,p\left(\frac{-a_3 a_4}{p}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$S_2 - p = -\left(\frac{-a_{2n-1} a_{2n}}{p}\right);$$

d'où l'on déduit

$$(9)\qquad S_{2n} - p^{2n-1} = -p^{n-1}\left[\frac{(-1)^n a_1 a_2 \ldots a_{2n}}{p}\right].$$

En employant la formule (1), nous aurions pu déduire les formules (9) et (10) des formules (7) et (8).

Question 860

(voir 2ᵉ série, t. VII, p. 190);

PAR MM. BROCARD ET GRASSAT.

Un cercle (C) *de centre* O *roule sur une droite. Trouver le lieu des points d'inflexion des cycloïdes raccourcies décrites par tous les points d'un cercle décrit sur un rayon du cercle* (C) *comme diamètre.*

(A. RIBAUCOUR.)

Soit M le point choisi sur le second cercle. Ce point décrit, pendant le roulement du cercle OB sur la droite IA, une cycloïde raccourcie dont le point le plus bas correspond à la position verticale de OM, qui coupe IA en un certain point I, que nous prenons pour origine. Soit $MOA = u$; on aura pour coordonnées du point M

$$x = au - b\sin u,$$

$$y = a - b\cos u,$$

a désignant OB, et b, OM. L'on peut avoir facilement la relation qui lie u à b pour le point d'inflexion. On trouve ainsi qu'en ce point

$$\cos u = \frac{b}{a}.$$

Cela indique que le rayon OM correspond au point d'inflexion M quand il bissecte l'angle BOA. D'après cela, l'élimination de u et de b entre les trois équations précédentes fournira le lieu des points d'inflexion M cherché. L'élimination est rapide et conduit à l'équation

$$x = a . \text{arc} \cos \frac{\sqrt{a^2 - ay}}{a} - \sqrt{a^2 - ay}\sqrt{\frac{y}{a}},$$

ou bien

$$x = a . \text{arc} \cos \sqrt{\frac{a-y}{a}} - \sqrt{ay - y^2},$$

l'équation d'une cycloïde ordinaire engendrée par un point d'une circonférence de rayon $\frac{a}{2}$ roulant sur la droite IA.

Ce résultat pouvait être prévu, car, la droite OM devant être la bissectrice de BOA, la ligne BM, qui lui est perpendiculaire, passe aussi par le point A. Le reste de la proposition s'en déduit facilement.

Note. — La question 860 a été résolue aussi par MM. P. Willière, professeur à Arlon; Fr. Conradt, étudiant à Berlin; G. Coridas, à Pau; A. Lemaître, à Besançon.

Question 910

(voir 2ᵉ série, t. VIII, p. 47) ;

PAR M. J. G.,

Étudiant à l'université de Turin.

Deux triangles OAB, OA'B' *ont un sommet commun :* OAB *est donné en grandeur et en position,* OA'B' *en* *grandeur seulement. Placer* OA'B' *de façon que les droites* AA', BB' *fassent entre elles un angle donné.*

(E. Lemoine.)

Supposons le problème résolu; faisons $AO = a$, $OB = b$; $A'O = a'$, $OB' = b'$, et appelons x, y; z, u les angles de OA et OA' avec AA', et de OB et OB' avec BB'. On a

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{a'}{a} = r,$$

$$\frac{\sin z}{\sin u} = \frac{b'}{b} = r'.$$

Les sommes ou les différences, selon le cas, des angles x et z, y et u sont connues. On déterminera à la fois les angles x, y, z, u de la manière suivante.

Soient $x + z = \varphi$, $y + u = \varphi_1$. Par un point M, menons trois droites MP, MQ, MR, de manière que

$$\widehat{PMQ} = \pi - \varphi, \quad \widehat{PMR} = \pi - \varphi_1,$$

et prenons sur QM et RM deux longueurs MQ, MR, telles que

$$\frac{MQ}{MR} = \frac{r}{r'}.$$

Déterminons le point P de telle sorte que

$$\frac{\sin QPM}{\sin RPM} = r;$$

cette détermination ne présente pas de difficulté. Cela fait, les angles QPM, RPM, PQM, PRM sont les angles cherchés.

On peut encore résoudre la question en cherchant les intersections des ellipses concentriques engendrées par les sommets des deux triangles donnés, lorsqu'ils se meuvent de façon que les autres sommets A, A', B, B' glissent sur deux droites faisant entre elles l'angle donné. Cependant cette solution est en défaut lorsque l'angle donné est zéro ou 180 degrés.

Note. — La question 910 a été aussi résolue par M. Moret-Blanc, professeur au lycée du Havre.

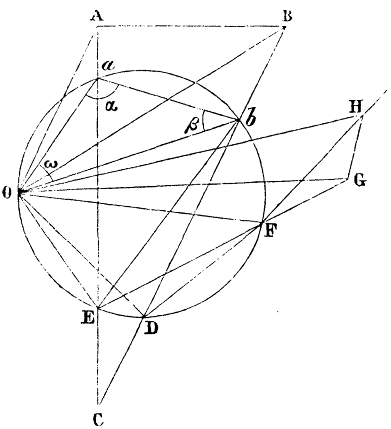
Solution géométrique de la question 910

(voir 2^e série, t. VIII, p. 47).

Deux triangles OAB, Oab *ont un sommet commun; OAB est donné en grandeur et en position;* Oab *en grandeur seulement. Placer* Oab *de façon que les droites* Aa, Bb *fassent entre elles un angle donné.*

(E. Lemoine.)

Soient C l'angle donné, et α, β, ω les angles du triangle Oab, qui ont leurs sommets au points a, b, O.



Supposant la question résolue, je circonscris au triangle Oab une circonférence qui rencontrera en des points E, D les droites Aa, Bb suffisamment prolongées, et je mène les droites OE, OD, bE; il en résultera évidemment ces égalités d'angles :

$$\text{AEO} = ab\text{O} = 6,$$
$$\text{BDO} = 2 \text{ droits} - ba\text{O} = 2 \text{ droits} - \alpha;$$

égalités qui montrent que les points E, D appartiennent respectivement à des arcs de segments capables des angles 6 et 2 droits — α, décrits sur les droites OA, OB. Les diamètres OG, OH des cercles dont ces deux segments font partie seront déterminés en grandeur et en position.

Actuellement, soit OF le diamètre de la circonférence circonscrite au triangle Oab, et issu du point O. Les trois points E, F, G seront en ligne droite, car les angles OEF, OEG sont droits, comme inscrits dans les demi-cercles dont les diamètres sont les droites OF, OG. De même, les points D, F, H appartiennent à une même droite. On aura donc

$$\text{GFH} = \text{DFE} = \text{D}b\text{E} = b\text{E}a - \text{C}.$$

Mais

$$b\text{E}a = b\text{O}a = \omega,$$

par conséquent

$$\text{GFH} = \omega - \text{C}.$$

Ainsi, le point F se trouve sur l'arc d'un segment capable de l'angle ω — C, décrit sur la droite GH. En outre, le point F appartient à une circonférence décrite du point O comme centre avec un rayon égal à la droite OF, dont la grandeur est connue, puisque cette droite est un diamètre de la circonférence circonscrite à un triangle Oab dont les côtés sont donnés en grandeur. Le point F sera donc déterminé par l'intersection de deux circonférences connues.

Pour achever la construction, on décrira sur OF comme diamètre une circonférence qui coupera les droites GF, HF aux points E, D, et les droites AE, BD aux points a, b; ce qui fera connaître la position qu'il faut donner au triangle Oab pour que les droites Aa, Bb fassent entre elles l'angle indiqué. G.

Rectifications. — 1. La solution donnée (numéro d'avril, p. 184) ne se rapporte pas à la question 910, mais au cas où l'angle que l'on donne serait celui des droites AB, A'B'.

2. La question 1017 (numéro de mars 1871) a déjà été proposée sous le n° 981, en février 1870.

CORRESPONDANCE.

Nous avons reçu de M. *Arthur Boulangier,* élève du lycée de *Rennes,* quelques *considérations géométriques* sur *les figures qui glissent sur d'autres figures données*; il en sera prochainement rendu compte.

BIBLIOGRAPHIE.

Revue de publications étrangères.

Bollettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche, pubblicato da B. Boncompagni. Roma, tipografia delle Scienze matematiche e fisiche, via Lata, n° 211.

Les cahiers de septembre et d'octobre 1870 de cette intéressante publication contiennent un exposé très-étendu des ouvrages et des instruments des arpenteurs hollandais de la fin du XVI^e siècle et du commencement du XVII^e siècle, par M. le professeur *G.-A. Vosterman van Oijen*.

Dans la livraison de novembre, on trouve :

Une Dissertation historique et critique sur l'arithmétique d'*Andrea Stiattesi*;

Une Notice bibliographique sur *Bernard Riemann*, par M. Ernest Schering (traduite de l'allemand par M. *Paul Mansion*);

Le Catalogue des travaux de *Bernard Riemann*.

QUESTIONS.

1026. La circonférence circonscrite à un polygone régulier de n côtés égaux à a est comprise entre na et $(n+1)a$. (LIONNET.)

1027. On donne un cercle et trois sommets d'un quadrilatère inscrit; déterminer le quatrième sommet par la condition que le quadrilatère soit circonscriptible. (TERRATS.)

1028. Étant donnée une ellipse, on lui circonscrit un triangle dont les hauteurs passent par les points de contact des côtés correspondants ; trouver le lieu des sommets de ces triangles. (F. V.)

1029. Les extrémités A et B d'une longueur constante $AB = l$ se meuvent sur les côtés d'un angle droit fixe AOB : trouver l'enveloppe de la perpendiculaire BM à AB; calculer la position des points de rebroussement et mener les tangentes en ces points. (BROCARD.)

THÉORÈMES DIVERS CONCERNANT LES SYSTÈMES DE CONIQUES REPRÉSENTÉS PAR DEUX CARACTÉRISTIQUES;

PAR M. CHASLES.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXII.)

§ I. — *Tangentes aux points d'une droite* D, *ou menées par un point* S.

105. D'un point S on mène des tangentes : les tangentes parallèles enveloppent une courbe de la classe 3ν; et leurs points de contact sont sur une courbe de l'ordre $\mu + 3\nu$.

106. Aux points des coniques sur une droite on mène les tangentes : les tangentes parallèles enveloppent une courbe de la classe $\mu + 3\nu$; et leurs points de contact sont sur une courbe de l'ordre $\mu + 2\nu$.

107. D'un point Q on mène des droites aux points de contact des tangentes issues d'un point S : ces droites rencontrent les coniques en des points situés sur une courbe d'ordre $3\mu + \nu$; et les tangentes en ces points enveloppent une courbe de la classe $2\mu + \nu$.

108. Par les points des coniques sur une droite D on mène des parallèles aux tangentes issues d'un point S : ces parallèles enveloppent une courbe de la classe $2\mu + 2\nu$.

109. D'un point S on mène des tangentes, et de leurs points de contact on mène des droites à un point Q : les tangentes parallèles à ces droites enveloppent une courbe de la classe $2\mu + 4\nu$; et leurs points de contact sont sur une courbe de la classe $4\mu + 4\nu$.

110. Les droites menées des points des coniques sur

une droite D aux points de contact des coniques issues d'un point S enveloppent une courbe de la classe $3\mu + \nu$.

111. Les tangentes issues d'un point S rencontrent les polaires d'un point P en des points d'où l'on mène d'autres tangentes : les tangentes parallèles à ces dernières enveloppent une courbe de la classe $2\mu + 3\nu$.

112. D'un point S on mène des tangentes, et par les points de contact on mène des parallèles aux polaires d'un point P : ces droites enveloppent une courbe de la classe $3\mu + \nu$.

113. D'un point S on mène des tangentes : les tangentes parallèles rencontrent les polaires d'un point P sur une courbe de l'ordre $2\mu + 3\nu$.

114. D'un point S on mène des tangentes, et des points où elles rencontrent les polaires d'un point P on mène des droites à ce point : les tangentes parallèles à ces droites enveloppent une courbe de la classe 4ν.

115. D'un point P on mène des droites aux points de contact des tangentes issues d'un point S, et par les points où ces droites rencontrent les polaires de P on mène des parallèles à ces tangentes : ces parallèles enveloppent une courbe de la classe $3\mu + 2\nu$.

116. Si par les points où les tangentes issues d'un point S rencontrent une droite Δ on mène des parallèles aux polaires du point S, ces droites enveloppent une courbe de la classe $2\mu + \nu$.

117. Par un point P on mène des droites aux points de contact des tangentes issues d'un point S, et par les points où ces droites rencontrent les polaires de P on mène des tangentes : ces tangentes rencontrent les tangentes issues de S sur une courbe de l'ordre $4\mu + 2\nu$.

118. D'un point Q on mène des parallèles aux tangentes issues d'un point S; ces parallèles rencontrent les coniques en des points situés sur une courbe d'ordre

$2\mu + 2\nu$; et les tangentes en ces points enveloppent une courbe de l'ordre $2\mu + 4\nu$.

119. D'un point S on mène des tangentes; par les points où elles rencontrent une droite Δ on mène de nouvelles tangentes, et par les points où celles-ci rencontrent une seconde droite Δ' d'autres tangentes : ces tangentes enveloppent une courbe de la classe 5ν.

120. Les tangentes parallèles aux tangentes issues d'un point S rencontrent les polaires de ce point sur une courbe de l'ordre $2\mu + 3\nu$.

121. Les tangentes parallèles aux polaires d'un point P enveloppent une courbe de la classe $2\mu + \nu$.

122. Aux points des coniques sur une droite D on mène les tangentes, et par les points où elles rencontrent les polaires d'un point P on mène de nouvelles tangentes: les tangentes parallèles à celles-ci enveloppent une courbe de la classe $3\mu + 3\nu$.

123. Si d'un point P on mène des droites aux points des coniques sur une droite D, et que par les points où ces droites rencontrent les polaires de P on mène les tangentes : ces tangentes enveloppent une courbe de la classe $6\mu + 2\nu$.

124. De deux points S, S' on mène des tangentes; par les points où les tangentes issues de S' rencontrent les polaires d'un point P on mène des droites aux points de contact des tangentes issues de S : ces droites enveloppent une courbe de la classe $4\mu + 2\nu$.

§ II. — *Tangentes et diamètres.*

125. Les diamètres menés par les points où les tangentes aux points d'une droite D rencontrent une droite Δ ont leurs extrémités sur une courbe de l'ordre $2\mu + 4\nu$.

126. Les tangentes aux points des coniques sur une

droite D rencontrent une droite Δ en des points par lesquels on mène les diamètres : ces diamètres enveloppent une courbe de la classe $\mu + 3\nu$; et les tangentes à leurs extrémités enveloppent une courbe de la classe $2\mu + 6\nu$.

127. Des points des coniques sur une droite D on mène les diamètres, et par les points où ils rencontrent une droite Δ on mène des tangentes : les points de contact de ces tangentes sont sur une courbe de l'ordre $4\mu + 6\nu$.

128. Les tangentes aux extrémités des diamètres qui partent des points des coniques sur une droite D enveloppent une courbe de la classe $\mu + 3\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre 2ν à l'infini.

129. Par les extrémités des diamètres qui partent des points de contact des tangentes issues d'un point S on mène des droites aux points des coniques sur une droite D : ces droites enveloppent une courbe de la classe $3\mu + 3\nu$.

130. Les diamètres menés par les points où les tangentes issues d'un point S rencontrent une droite Δ ont leurs extrémités sur une courbe de l'ordre $2\mu + 6\nu$;

Et les tangentes en ces points enveloppent une courbe de la classe $4\mu + 4\nu$.

131. Par les points de contact des tangentes issues d'un point S on mène les diamètres, et par les points où ils rencontrent une droite Δ on mène de nouvelles tangentes : ces tangentes enveloppent une courbe de la classe $4\mu + 4\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre 2ν coïncidante avec Δ; et leurs points de contact sont sur une courbe de l'ordre $2\mu + 6\nu$.

132. Les diamètres menés par les points où les tangentes issues d'un point S rencontrent une droite Δ enveloppent une courbe de la classe 3ν.

§ III. — *Diamètres.*

133. Par les points où les diamètres menés d'un point P rencontrent les polaires d'un point Q on mène des tangentes : ces tangentes enveloppent une courbe de la classe $3\mu + \nu$.

134. Par un point P on mène les diamètres, et par les points où ils rencontrent les polaires de P on mène des tangentes : les tangentes parallèles à celles-là enveloppnt une courbe de la classe $3\mu + 3\nu$.

135, Les diamètres menés par un point P rencontrent les polaires de ce point sur une courbe de l'ordre $\mu + \nu$.

136. Les cordes comprises dans les coniques entre une droite D et les diamètres qui passent par un point P enveloppent une courbe de la classe $3\mu + 2\nu$.

137. Les diamètres menés par les milieux des cordes que les coniques interceptent sur une droite D enveloppent une courbe de la classe $\mu + \nu$.

138. Les diamètres menés par un point P rencontrent les polaires de ce point sur une courbe de l'ordre $\mu + \nu$.

139. Si d'un point Q on mène des droites aux points des coniques sur une droite D, les diamètres parallèles à ces droites ont leurs extrémités sur une courbe de l'ordre 4μ.

140. Si d'un point Q on mène des droites aux points des coniques sur une droite D, et que par les points où ces droites rencontrent les coniques on mène les diamètres : ces diamètres enveloppent une courbe de la classe $3\mu + 3\nu$.

141. Les diamètres parallèles aux polaires d'un point P enveloppent une courbe de la classe $\mu + \nu$, et ont leurs extrémités sur une courbe de l'ordre $\mu + 3\nu$.

§ IV. — *Diamètres conjugués.*

142. Si par un point P on mène les diamètres et les cordes parallèles aux diamètres conjugués, les extrémités de ces cordes sont sur une courbe de l'ordre 3μ; et les tangentes en ces points enveloppent une courbe de la classe $3\mu + \nu$.

143. Par un point P on mène les diamètres, et par les points où ils rencontrent une droite Δ, des parallèles aux diamètres conjugués : ces parallèles enveloppent une courbe de la classe $\mu + \nu$.

144. Par un point P on mène les diamètres des coniques et des droites aux extrémités des diamètres conjugués : ces droites rencontrent les coniques en des points dont le lieu est sur une courbe de l'ordre $3\mu + 3\nu$, qui a en P un point multiple d'ordre 2μ.

145. Si des diamètres partent d'un point P, les cordes interceptées dans les coniques entre une droite D et les diamètres conjugués enveloppent une courbe de la classe $3\mu + 3\nu$.

146. Si des points où les diamètres issus d'un point P rencontrent une droite Δ on mène des droites aux extrémités des diamètres conjugués : ces droites rencontrent les coniques en des points situés sur une courbe de l'ordre $3\mu + 7\nu$.

147. Si des diamètres partent des points des coniques sur une droite D, les extrémités des diamètres conjugués sont sur une courbe d'ordre $\mu + 4\nu$.

148. Si, des points des coniques sur une droite D, on mène les diamètres et des droites aux points où leurs conjugués rencontrent une droite Δ : ces droites enveloppent une courbe de la classe $2\mu + 3\nu$.

149. Si, par les points des coniques sur une droite D, on mène les diamètres et des droites passant par les extrémités des diamètres conjugués : ces droites enveloppent une courbe de la classe $2\mu + 4\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre 4ν coïncidante avec D.

150. Si, par les points des coniques sur une droite D on mène les diamètres : les diamètres conjugués enveloppent une courbe de la classe $\mu + 3\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre 2ν à l'infini;

Et les extrémités de ces diamètres sont sur une courbe de l'ordre $\mu + 4\nu$.

151. Les cordes sous-tendues, dans chaque conique, par deux diamètres conjugués dont un passe par un point fixe, enveloppent une courbe de la classe $2\mu + \nu$.

152. D'un point Q on mène des droites aux points des coniques sur une droite D, et par les points où elles rencontrent les coniques, on mène les diamètres : les conjugués de ces diamètres enveloppent une courbe de la classe $3\mu + 3\nu$.

§ V. — *Asymptotes.*

153. Les parallèles aux asymptotes des coniques, menées par les points où les diamètres qui partent d'un point P rencontrent une droite Δ, enveloppent une courbe de la classe $\mu + 2\nu$.

154. Les parallèles aux asymptotes, menées par les points de contact des tangentes issues d'un point S, enveloppent une courbe de la classe $3\mu + \nu$, qui a une tangente multiple d'ordre $\mu + \nu$ à l'infini.

155. Les parallèles aux asymptotes, menées par les extrémités des diamètres qui passent par un point P, enveloppent une courbe de la classe $3\mu + 2\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre $\mu + 2\nu$ à l'infini.

156. Les parallèles aux asymptotes, menées par les

pôles d'une droite, enveloppent une courbe de la classe $\mu + 2\nu$.

157. Si, par un point Q, on mène des parallèles aux deux asymptotes de chaque conique, les cordes que ces parallèles interceptent dans les coniques enveloppent une courbe de la classe μ.

158. Les tangentes menées par les points où les asymptotes des coniques rencontrent une droite Δ enveloppent une courbe de la classe $\mu + 3\nu$.

159. Si, par les points où les tangentes issues d'un point S rencontrent les polaires d'un point P, on mène des parallèles aux asymptotes : ces parallèles enveloppent une courbe de la classe $6\mu + 2\nu$.

§ VI. — *Théorèmes concernant les deux tangentes menées d'un même point à chaque conique.*

160. Si, d'un point S, on mène les deux tangentes de chaque conique, les tangentes parallèles forment avec elles un parallélogramme :

Les sommets de ce parallélogramme opposés au point S sont sur une courbe d'ordre ν;

Et les deux autres sommets sont sur une courbe de l'ordre $\mu + 2\nu$.

161. D'un point S on mène deux tangentes à chaque conique, et d'un point Q on mène des droites aux points de contact : la tangente au point où l'une de ces droites coupe la conique rencontre l'autre droite sur une courbe de l'ordre $3\mu + 2\nu$.

162. D'un point S on mène deux tangentes à chaque conique; par un point Q on mène une droite au point de contact de l'une, et par le point où cette droite rencontre l'autre on mène une troisième tangente : celle-ci enveloppe une courbe de la classe $4\mu + \nu$.

163. Si d'un point S on mène deux tangentes à chaque conique, et que du point où l'une d'elles rencontre une droite Δ, on mène une droite au point de contact de l'autre, cette droite enveloppe une courbe de la classe $\mu + 2\nu$.

164. Si d'un point S on mène les tangentes, et que des points où elles rencontrent une droite Δ on mène des droites à un point fixe Q :

Les points où ces droites rencontrent la conique sont sur une courbe d'ordre 4ν; et les tangentes en ces points enveloppent une courbe de la classe $4\mu + 4\nu$.

165. Par un point S on mène deux tangentes à chaque conique, et par le point de contact de l'une on mène une parallèle à l'autre : ces parallèles enveloppent une courbe de la classe $\mu + 2\nu$.

166. D'un point S on mène deux tangentes à chaque conique, lesquelles rencontrent deux droites Δ, Δ' : les droites qui joignent les points de rencontre enveloppent une courbe de la classe 2ν.

167. D'un point S on mène deux tangentes à chaque conique, et par les points où elles rencontrent deux droites Δ, Δ' on mène deux autres tangentes : celles-ci se coupent sur une courbe de l'ordre 2ν.

168. Par un point S on mène deux tangentes à chaque conique; par le point où l'une d'elles rencontre la polaire d'un point P on mène une parallèle à l'autre : cette parallèle enveloppe une courbe de la classe $2\mu + 2\nu$.

169. Si d'un point S on mène deux tangentes à chaque conique, les tangentes parallèles se coupent sur une courbe de l'ordre ν.

170. Si d'un point S on mène deux tangentes à chaque conique, les diamètres menés de leurs points de contact les rencontrent sur une courbe de l'ordre $2\mu + 2\nu$, qui a un point multiple d'ordre $2\mu + \nu$ en S.

171. D'un point S on mène deux tangentes à chaque conique, et par le point où l'une d'elles rencontre la polaire d'un point P on mène une nouvelle tangente : celle-ci rencontre l'autre tangente sur une courbe de l'ordre 2ν.

172. D'un point S on mène deux tangentes à chaque conique, lesquelles rencontrent les polaires de deux points P, P' : les droites qui joignent les points de rencontre enveloppent une courbe de la classe 5μ.

173. Les tangentes issues d'un point S rencontrent les polaires d'un point P en des points par lesquels on mène des tangentes : celles-ci rencontrent les tangentes menées par le point P sur une courbe de l'ordre $2\mu + 3\nu$.

174. D'un point S on mène deux tangentes $S\varphi$, $S\varphi'$ à chaque conique, et par le point où $S\varphi$ rencontre la polaire d'un point P on mène une troisième tangente, qui rencontre la seconde tangente $S\varphi'$: la droite qui joint ce point de rencontre au point de contact de la tangente $S\varphi$ enveloppe une courbe de la classe $2\mu + \nu$.

175. Par un point S on mène deux tangentes à chaque conique, et par le point où l'une d'elles rencontre la polaire d'un point P on mène une droite au point de contact de l'autre : cette droite enveloppe une courbe de la classe 4μ.

176. Si d'un point S on mène deux tangentes à chaque conique, et que par le point où l'une d'elles rencontre une droite Δ on mène une nouvelle tangente : celle-ci rencontre l'autre tangente, issue de S, sur une courbe de l'ordre $\mu + 2\nu$, qui a un point multiple d'ordre $\mu + \nu$ en S.

177. Par un point S on mène deux tangentes à chaque conique : les droites qui joignent les points où elles rencontrent deux droites fixes enveloppent une courbe de la classe 2ν.

178. Par un point S on mène deux tangentes à chaque conique, et des points où elles rencontrent deux droites

fixes on mène de nouvelles tangentes : celles-ci se coupent sur une courbe d'ordre 2ν.

179. D'un point S on mène deux tangentes à chaque conique, et par les points où elles rencontrent une droite Δ on mène des parallèles à la polaire du point S : ces parallèles enveloppent une courbe de la classe $2\mu + \nu$.

180. Par deux points S, S' on mène des tangentes, et les points où les tangentes issues de S rencontrent les polaires d'un point P on mène des droites aux points de contact des tangentes issues de S' : ces droites enveloppent une courbe de la classe $4\mu + 2\nu$.

§ VII. — *Théorèmes relatifs aux deux points de chaque conique sur une droite.*

181. Si par l'un des deux points de chaque conique on mène une parallèle à la tangente en l'autre point :

Ces parallèles enveloppent une courbe de la classe $2\mu+\nu$, qui a deux tangentes multiples, l'une d'ordre $\mu + \nu$ coïncidante avec D, et l'autre d'ordre μ à l'infini ;

Le lieu de leurs points de rencontre avec les coniques est une courbe d'ordre $\mu + 3\nu$.

182. Par l'un des deux points de chaque conique sur une droite D on mène le diamètre, et par l'extrémité de ce diamètre on mène une parallèle à la tangente en l'autre point : ces parallèles enveloppent une courbe de la classe $2\mu + 3\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre $\mu + 2\nu$ à l'infini.

183. Par l'un des deux points de chaque conique sur une droite D on mène le diamètre et par l'autre une parallèle au diamètre : ces parallèles enveloppent une courbe de la classe $2\mu + 2\nu$, qui a deux tangentes multiples, l'une d'ordre $\mu + 2\nu$ coïncidante avec D, et l'autre d'ordre μ à l'infini.

184. Si par un des deux points de chaque conique sur une droite D on mène le diamètre, la corde qui joint l'extrémité de ce diamètre à l'autre point de la conique enveloppe une courbe de la classe 2μ, qui a une tangente multiple d'ordre μ coïncidante avec D.

185. Si par les deux points de chaque conique sur une droite D on mène deux droites se coupant sur la conique, et dont une passe par un point Q, l'autre droite enveloppe une courbe de la classe $2\mu + \nu$, qui a une tangente multiple d'ordre $\mu + \nu$ coïncidante avec D.

186. Par un des deux points de chaque conique sur une droite D on mène la tangente et le diamètre : la corde qui joint l'extrémité de ce diamètre à l'autre point rencontre la tangente sur une courbe de l'ordre $\mu + 2\nu$.

187. Si en l'un des deux points de chaque conique sur une droite D on mène la tangente, la parallèle à cette tangente menée par l'autre point enveloppe une courbe de la classe $2\mu + \nu$.

188. La tangente en un des points de chaque conique sur une droite D rencontre le diamètre qui part de l'autre point, sur une courbe de l'ordre 4ν.

189. Si des deux points de chaque conique sur une droite D on mène des droites à deux points fixes Q, Q' :

1° Ces droites se coupent sur une courbe de l'ordre 2μ;

2° Les cordes qu'elles interceptent dans les coniques enveloppent une courbe de la classe 2μ.

190. Si des deux points de chaque conique sur une droite D on mène deux droites, l'une au pôle d'une droite Δ et l'autre au pôle d'une droite Δ', ces deux droites se coupent sur une courbe de l'ordre 5ν.

191. D'un des deux points de chaque conique sur une droite D on mène une droite au pôle d'une droite Δ, et par l'autre point une parallèle à cette droite : cette parallèle enveloppe une courbe de la classe $2\mu + 2\nu$, qui a

deux tangentes multiples, l'une d'ordre 2ν coïncidante avec D, et l'autre d'ordre μ à l'infini.

192. La tangente en un des deux points de chaque conique sur une droite D rencontre une droite Δ en un point d'où l'on mène une droite à l'autre point de la conique : cette droite enveloppe une courbe de la classe $2\mu + \nu$.

§ VIII. — *Coniques coupées par deux droites.*

193. Les coniques étant coupées par deux droites D, D′, si par leurs points sur D on mène des parallèles aux tangentes aux points de D′, ces parallèles enveloppent une courbe de la classe $4\mu + 2\nu$.

194. Si aux points de D on mène les tangentes, et par les points de D′ les diamètres : ces diamètres rencontrent les tangentes en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $2\mu + 4\nu$.

195. Si des points de D′ on mène des droites aux extrémités des diamètres qui partent des points de D, ces droites enveloppent une courbe de la classe $3\mu + 2\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre $\mu + 2\nu$ coïncidante avec D′.

196. Si en l'un des points de chaque conique sur D on mène la tangente, les cordes menées de l'autre point aux deux points de D′ rencontrent cette tangente sur une courbe de l'ordre $\mu + 4\nu$.

197. Si d'un point Q on mène des droites aux points de D, et que par les points où elles rencontrent les coniques on mène des droites aux points de D′, ces droites enveloppent une courbe de la classe 5μ.

198. Si par des points de D′ on mène des cordes parallèles aux diamètres qui partent des points de D, ces cordes ont leurs extrémités sur une courbe d'ordre $4\mu + 4\nu$.

199. Les cordes interceptées entre les deux droites D, D′ ont leurs pôles sur une courbe de l'ordre $\mu + 2\nu$.

200. Les tangentes parallèles aux cordes comprises entre les deux droites D, D′ enveloppent une courbe de la classe $6\mu + 4\nu$, qui a une tangente multiple d'ordre 4ν à l'infini.

201. Les diamètres parallèles aux cordes comprises entre deux droites D, D′ enveloppent une courbe de la classe $3\mu + 4\nu$.

202. Les droites qui joignent les pôles des deux droites D, D′ dans chaque conique enveloppent une courbe de la classe μ.

203. Chaque conique intercepte sur les deux droites D, D' deux segments : la droite qui joint leurs milieux enveloppe une courbe de la classe 2μ, qui a une tangente multiple d'ordre μ coïncidante avec chacune des deux droites.

204. Les polaires d'un point P rencontrent les cordes interceptées entre les deux droites D, D′, dans les coniques respectives, en des points situés sur une courbe de l'ordre $3\mu + 2\nu$.

DES PERMUTATIONS;

PAR M. J. BOURGET.

---

1. Au lieu de considérer un nombre quelconque d'objets, nous supposerons qu'il s'agisse de 6, et nous les désignerons par les chiffres successifs 1, 2, 3, 4, 5, 6. On sait que le nombre total des permutations est

$$1.2.3.4.5.6 = 720.$$

2. *Ordre des permutations.* — Nous effectuerons les

diverses permutations de six objets dans l'ordre déterminé par la série des opérations suivantes :

1° Les deux premiers objets nous donneront les deux permutations successives

$$12, \quad 21.$$

2° Nous placerons le troisième objet à toutes les places possibles successivement dans chacune des permutations précédentes, et nous obtiendrons successivement les résultats suivants :

$$(1)\ 123, \quad (2)\ 132, \quad (3)\ 312,$$
$$(4)\ 213, \quad (5)\ 231, \quad (6)\ 321.$$

3° Chacune des permutations précédentes nous permettra de former une série de permutations de 4 objets, et nous les obtiendrons dans un ordre déterminé. Nous continuerons de la même manière pour avoir les permutations de 5 et de 6 objets.

Il est clair que chaque permutation de 6 objets a un rang déterminé.

3. *Notation relative à une permutation.* — On peut indiquer une permutation déterminée par une notation marquant immédiatement son mode de formation. Affectons chaque élément, sauf le premier, d'un indice désignant la place qu'il occupe dans la permutation précédente qui sert à le former, en nommant 1^re^ *place* le premier rang à droite du dernier élément de la permutation précédente ; 2^e^, 3^e^,... *places* celles qu'il occupe ensuite en avançant vers la gauche. Une permutation quelconque, par exemple

$$541362,$$

pourra s'écrire

$$1\, 2_1\, 3_2\, 4_4\, 5_5\, 6_2.$$

Cette notation laisse à chaque élément sa place primitive; elle permet, en outre, de raisonner sur le rang de chaque élément, comme nous allons le voir.

Remarquons aussi que l'indice ne peut pas surpasser le numéro de chaque élément, et il est au moins *un*.

Pour désigner la permutation de 6 objets, nous prendrons la notation P^6, et nous mettrons en indice inférieur le rang de cette permutation dans la série des 720 que l'on peut former.

4. Problème. — *Trouver la permutation de rang donné a*

La première des permutations de 6 objets est évidemment

$$1\,2\,3\,4\,5\,6\,;$$

donc, en vertu de nos notations conventionnelles,

$$P^6_1 = P^5_1 6_1\,;$$

car elle provient de la permutation de 5 objets à la suite de laquelle on a placé le dernier objet 6. On aura de même

$$\begin{aligned} P^6_2 &= P^5_1 6_2, \\ P^6_3 &= P^5_1 6_3, \\ P^6_4 &= P^5_1 6_4, \\ P^6_5 &= P^5_1 6_5, \\ P^6_6 &= P^5_1 6_6. \end{aligned}$$

Arrivés à P^6_6, si nous continuons, il faudra changer de permutation P^5, et prendre P^5_2 au lieu de P^5_1; nous aurons ainsi successivement

$$\begin{aligned} P^6_7 &= P^6_{6.1+1} = P^5_2 6_1, \\ P^6_8 &= P^6_{6.1+2} = P^5_2 6_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ P^6_{12} &= P^6_{6.1+6} = P^5_2 6_6. \end{aligned}$$

Nous continuerions en changeant P^5_2 en P^5_3, etc. Posons généralement

$$a = 6q + r$$

avec la restriction que r *soit au moins* 1 *et puisse être égal au diviseur* 6; nous aurons

$$P^6_a = P^5_{1+q}\, 6_r.$$

On démontrera sans peine la généralité de cette formule en faisant voir que, si elle est vraie pour le rang a, elle est encore vraie pour le rang $a+1$.

Maintenant posons de même

$$\begin{array}{llll}
1 + q = 5q_1 + r_1 & \text{et} \quad r_1 > 0 & \text{et} & \leqq 5, \\
1 + q_1 = 4q_2 + r_2 & \quad\quad r_2 > 0 & & \leqq 4, \\
1 + q_2 = 3q_3 + r_3 & \quad\quad r_3 > 0 & & \leqq 3, \\
1 + q_3 = 2q_4 + r_4 & \quad\quad r_4 > 0 & & \leqq 2;
\end{array}$$

nous obtiendrons la succession des relations

$$\begin{aligned}
P^6_a &= P^5_{1+q}\, 6_r, \\
P^5_{1+q} &= P^4_{1+q_1}\, 5_{r_1}, \\
P^4_{1+q_1} &= P^3_{1+q_2}\, 4_{r_2}, \\
P^3_{1+q_2} &= P^2_{1+q_3}\, 3_{r_3}, \\
P^2_{1+q_3} &= P^1_{1+q_4}\, 2_{r_4}.
\end{aligned}$$

Multiplions *symboliquement* toutes ces égalités membre à membre, ou substituons successivement, nous aurons

$$P^6_a = P_{1+q_4}\, 2_{r_4}\, 3_{r_3}\, 4_{r_2}\, 5_{r_1}\, 6_r.$$

Nous remarquerons maintenant que $P^2_{1+q_3}$ est 1 2 ou 2 1; donc on a $q_3 = 0$, ou bien $q_3 = 1$. Comme d'ailleurs les restes ne sont jamais nuls, il faut que $q_4 = 0$; donc

$P^1_{1+q_4} = P^1_1$. Or cette première permutation du premier objet 1 est cet objet lui-même; donc enfin nous avons

$$(1)\qquad P^6_a = 1\,.\,2_{r_4}\,3_{r_3}\,4_{r_2}\,5_{r_1}\,6_r$$

avec les égalités

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} a &= 6q + r\\ 1+q &= 5q_1 + r_1\\ 1+q_1 &= 4q_2 + r_2\\ 1+q_2 &= 3q_3 + r_3\\ 1+q_3 &= \phantom{3q_3 +{}} r_4 \end{aligned}\right\} \quad\text{et}\quad \left\{\begin{matrix} r\\ r_1\\ r_2\\ r_3\\ r_4\end{matrix}\right\} > 0 \leq \left\{\begin{matrix} 6\\ 5\\ 4\\ 3\\ 2\end{matrix}\right.$$

Exemple. — Proposons-nous de trouver la 450^e permutation de 6 objets. Nous posons

$$\begin{aligned} 450 &= 6.74 + 6, & 4 &= 3.1 + 1,\\ 75 &= 5.14 + 5, & 2 &= \phantom{3.1+{}} 2,\\ 15 &= 4.\ \ 3 + 3; \end{aligned}$$

donc nous aurons

$$\begin{aligned} P^6_{450} &= 1\ 2_2\,3_1\,4_3\,5_5\,6_6,\\ &= 2\,1\ \ 3\ \ 4_3\,5_5\,6_6,\\ &= 6\,5\ \ 2\ \ 4\ \ 1\ \ 3. \end{aligned}$$

On voit combien est simple notre règle et combien son application est facile.

5. *Dérangements.* — On dit que deux éléments d'une *disposition* présentent un *dérangement*, ou encore une *inversion*, lorsqu'ils sont rangés par ordre de grandeur décroissante, au lieu de l'être par ordre de grandeur croissante, comme dans la première disposition 1 2 3 4 5 6.

La disposition

$$652413$$

présente les 12 dérangements suivants :

65, 62, 64, 61, 63, 52, 54, 51, 53, 21, 41, 43.

La formule générale (1) nous donne en même temps la disposition des éléments de la permutation de rang a et le nombre Δ des dérangements. On peut formuler le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Le nombre des dérangements de la permutation de rang a est donné par la formule*

$$(3)\quad \Delta = (r-1)+(r_1-1)+(r_2-1)+(r_3-1)+(r_4-1).$$

En effet, un élément quelconque, 3 par exemple, donne un ou plusieurs dérangements s'il est placé à gauche des éléments antérieurs, et seulement dans ce cas; donc le nombre des dérangements relatifs à un élément est égal à son indice diminué d'une unité; donc le nombre total des dérangements d'une permutation est bien donné par la formule ci-dessus.

Nous poserons

$$(4)\quad \delta=r-1,\quad \delta_1=r_1-1,\quad \delta_2=r_2-1,\quad \delta_3=r_3-1,\quad \delta_4=r_4-1,$$

et nous aurons

$$(5)\qquad \Delta = \delta+\delta_1+\delta_2+\delta_3+\delta_4.$$

Chacun des δ représente un nombre de dérangements, et l'on voit que

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{lllll} \delta \geqq 0, & \delta_1 \geqq 0, & \delta_2 \geqq 0, & \delta_3 \geqq 0, & \delta_4 \geqq 0, \\ \quad \leqq 5, & \quad \leqq 4, & \quad \leqq 3, & \quad \leqq 2, & \quad \leqq 1. \end{array}\right.$$

6. Théorème. — *Si l'on permute deux éléments consécutifs, le nombre des dérangements varie d'une unité.*

Considérons celui des deux éléments qui a le rang le plus élevé dans la première disposition 1 2 3 4 5 6. S'il marche vers la gauche, son indice augmente d'une unité. S'il marche vers la droite, son indice diminue d'une unité. Dans les deux cas, l'indice de l'autre élément reste invariable. Donc, etc. C. Q. F. D.

7. Théorème. — *Si l'on permute deux éléments quelconques, le nombre des dérangements varie d'un nombre impair, et la permutation change de classe.*

En effet, soient g et h les deux éléments permutés, et p le nombre des éléments qui les séparent. Si h, en marchant vers g, arrive à sa gauche, le nombre des dérangements varie de $p+1$ unités positives ou négatives, d'après le théorème précédent; si ensuite g, en marchant en sens inverse, de gauche à droite, arrive à la place de h, le nombre des dérangements variera encore de p unités positives ou négatives; donc, par la permutation des deux éléments g et h, il aura varié de $2p+1$ unités positives ou négatives, donc, en résumé, d'un nombre impair d'unités.

8. Théorème. — *Le nombre total des dérangements d'une disposition de n objets ne peut pas surpasser* $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

En effet, nous avons trouvé

$$\Delta = \delta + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4;$$

d'où l'on voit, d'après le maximum des restes r, r_1, r_2, ...

que la valeur maximum de Δ est

$$(n-1)+(n-2)+\ldots+3+2+1,$$

ou

$$(7)\qquad \square=\frac{n(n-1)}{2}.$$

C. Q. F. D.

Dans le cas de 6 objets, cette valeur maximum est

$$\frac{6.5}{2}=15.$$

9. Problème. — *Étant donnée une permutation, trouver son rang dans la série des* 1, 2, 3,...n *permutations.*

Ce problème est l'inverse de celui que nous avons posé au début; il est facile de voir qu'il est résolu par la série des égalités (2).

Nous pouvons, en effet, mettre d'abord la permutation donnée sous la forme

$$1\ 2_{r_4}\ 3_{r_3}\ 4_{r_2}\ 5_{r_1}\ 6_r;$$

nous en tirerons

$$\begin{aligned} q_3&=r_4-1=\delta_4,\\ q_2&=3\delta_4+\delta_3,\\ q_1&=4.3\delta_4+4\delta_3+\delta_2,\\ q&=5.4.3\delta_4+5.4\delta_3+5\delta_2+\delta_1,\end{aligned}$$

et enfin

$$(8)\qquad a=6.5.4.3\delta_4+6.5.4\delta_3+6.5\delta_2+6\delta_1+\delta+1.$$

Remarque. — Cette formule nous montre que le rang d'une permutation est déterminé aussitôt que l'on connaît le nombre des dérangements de chacun des objets.

Considérons, comme exemple, la disposition

$$6\,5\,2\,4\,1\,3;$$

nous la mettons sous la forme

$$1\;2_2\;3_1\;4_3\;5_5\;6_6\,;$$

d'où

$$a = 6.5.4.3 + 6.5.2 + 6.4 + 5 + 1 = 450.$$

10. *Permutations conjuguées.* — Nous nommerons « permutations conjuguées » celles dont le nombre des dérangements est complémentaire au nombre $\square$ maximum et dont les nombres partiels de dérangements δ', δ'_1, δ'_2, δ'_3,... sont aussi complémentaires aux maxima. Nous avons donc, par définition, de Δ' et δ', δ'_1,..., les relations suivantes :

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} \delta + \delta' &= 5,\\ \delta_1 + \delta'_1 &= 4,\\ \delta_2 + \delta'_2 &= 3,\\ \delta_3 + \delta'_3 &= 2,\\ \delta_4 + \delta'_4 &= 1,\\ \Delta + \Delta' &= \square, \end{aligned}\right.$$

et aussi

$$(10)\qquad \Delta' = \delta' + \delta'_1 + \delta'_2 + \delta'_3 + \delta'_4.$$

11. Théorème. — *Deux permutations conjuguées sont également éloignées des extrêmes.*

En effet, nommons a' le rang de la permutation conjuguée de celle qui a pour rang a. Nous aurons, d'après la formule (8),

$$a' = 6.5.4.3\,\delta'_4 + 6.5.4\,\delta'_3 + 6.5\,\delta'_2 + 6\,\delta'_1 + \delta' + 1;$$

donc

$$\begin{aligned}
a + a' &= 6.5.4.3.1 + 6.5.4.2 + 6.5.3 + 6.4 + 5 + 2 \\
&= 6.5.4.3.1 + 6.5.4.2 + 6.5.3 + 6.4 + 6 + 1 \\
&= 6.5.4.3.2 - 6.5.4.3 \\
&\quad + 6.5.4.3 \quad - 6.5.4 \\
&\quad + 6.5.4 \quad - 6.5 \\
&\quad + 6.5 \quad - 6 \\
&\quad + 6 \quad + 1 \\
&= 6.5.4.3.2 + 1 = \text{nombre total des permutations} + 1.
\end{aligned}$$

Désignons par N le nombre total des permutations; nous aurons donc

$$(11) \qquad a + a' = \mathrm{N} + 1.$$

C. Q. F. D.

Prenons comme exemple la permutation conjuguée de $6\,5\,2\,4\,1\,3 = 1_2\,2_2\,3_1\,4_3\,5_5\,6_6$. Nous trouverons

$$\delta' = 0, \quad \delta'_1 = 0, \quad \delta'_2 = 1, \quad \delta'_3 = 2, \quad \delta'_4 = 0;$$

par suite

$$a' = 271.$$

Or la 271^e permutation en a 270 avant elle, et la 450^e permutation en a $720 - 452 = 270$ après elle.

12. Théorème. — *Le nombre des permutations ayant* Δ *dérangements est le même que le nombre des permutations ayant* Δ' *dérangements.*

En effet, pour trouver les permutations qui offrent Δ

dérangements; il faut résoudre l'équation

$$(12) \qquad \delta + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 = \Delta$$

en nombres entiers assujettis aux conditions (6). Admettons qu'on ait trouvé une solution. Si nous posons

$$\delta = 5 - \delta', \quad \delta_1 = 4 - \delta'_1, \ldots,$$

nous aurons

$$5 - \delta' + 4 - \delta'_1 + 3 - \delta'_2 + 2 - \delta'_3 + 1 - \delta'_4 = \Delta,$$

d'où

$$(13) \qquad \delta' + \delta'_1 + \delta'_2 + \delta'_3 + \delta'_4 = \square - \Delta = \Delta';$$

d'où l'on voit que chaque solution de l'équation (12) correspond à une solution de l'équation (13), et réciproquement. Donc le théorème est démontré.

13. Problème. — *Trouver toutes les permutations ayant un nombre donné Δ de dérangements, et trouver leur nombre.*

La résolution de l'équation

$$\delta + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 = \Delta$$

n'offre aucune difficulté dans la pratique; elle se fera méthodiquement en tenant compte des relations (6). Donnons un exemple de cette résolution en prenant $\Delta = 3$. Nous formerons un tableau dans lequel nous donnerons d'abord à δ_2, δ_3, δ_4 leur valeur 0, et la résolution sera ramenée à celle d'une équation à 2 inconnues; puis nous donnerons à δ_2 successivement les valeurs 1, 2, 3, ce qui ramènera chaque fois la résolution à celle d'une équation à 2 inconnues; puis nous ferons varier δ_3 et δ_4. Nous aurons évidemment le tableau suivant :

δ	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4
3	0	0	0	0
2	1	0	0	0
1	2	0	0	0
0	3	0	0	0
2	0	1	0	0
1	1	1	0	0
0	2	1	0	0
1	0	2	0	0
0	1	2	0	0
0	0	3	0	0
2	0	0	1	0
1	1	0	1	0
0	2	0	1	0
1	0	1	1	0
0	1	1	1	0
0	0	2	1	0
1	0	0	2	0
0	1	0	2	0
0	0	1	2	0
2	0	0	0	1
1	1	0	0	1
0	2	0	0	1
1	0	1	0	1
0	1	1	0	1
0	0	2	0	1
1	0	0	1	1
0	1	0	1	1
0	0	1	1	1
0	0	0	2	1

Nous pouvons remarquer, d'après la formation même de ce tableau, qu'en nommant N^5_Δ le nombre des solutions de l'équation à 5 inconnues, on a

$$N^5_\Delta = N^4_\Delta + N^4_{\Delta-1},$$

car la dernière inconnue prend successivement les valeurs o et 1.

De même, nous aurons

$$\begin{aligned} N^4_\Delta &= N^3_\Delta + N^3_{\Delta-1} + N^3_{\Delta-2}, \\ N^4_{\Delta-1} &= N^3_{\Delta-1} + N^2_{\Delta-2} + N^3_{\Delta-3}, \end{aligned}$$

car la dernière inconnue δ_3 prend successivement les valeurs o, 1, 2; par conséquent, la somme des trois autres est successivement 3, 2, 1 ou 2, 1, o; ou Δ, $\Delta - 1$, $\Delta - 2$, ou $\Delta - 1$, $\Delta - 2$, $\Delta - 3$. Donc

$$N^5_\Delta = N^3_\Delta + 2N^3_{\Delta-1} + 2N^3_{\Delta-2} + N^3_{\Delta-3}.$$

Nous aurons de même

$$\begin{aligned} N^3_\Delta &= N^2_\Delta + N^2_{\Delta-1} + N^2_{\Delta-2} + N^2_{\Delta-3}, \\ N^3_{\Delta-1} &= N^2_{\Delta-1} + N^2_{\Delta-2} + N^2_{\Delta-3} + N^2_{\Delta-4}, \\ N^3_{\Delta-2} &= N^2_{\Delta-2} + N^2_{\Delta-3} + N^2_{\Delta-4} + N^2_{\Delta-5}, \\ N^3_{\Delta-3} &= N^2_{\Delta-3} + N^2_{\Delta-4} + N^2_{\Delta-5} + N^2_{\Delta-6}; \end{aligned}$$

par suite

$$N^5_\Delta = N^2_\Delta + 3N^2_{\Delta-1} + 5N^2_{\Delta-2} + 6N^2_{\Delta-3} + 5N^2_{\Delta-4} + 3N^2_{\Delta-5} + N^2_{\Delta-6},$$

et enfin, par une transformation semblable,

$$(14)\quad \left\{ \begin{aligned} N^5_\Delta = N^1_\Delta &+ 4N^1_{\Delta-1} + 9N^1_{\Delta-2} + 15N^1_{\Delta-3} + 20N^1_{\Delta-4} + 22N^1_{\Delta-5} \\ &+ 20N^1_{\Delta-6} + 15N^1_{\Delta-7} + 9N^1_{\Delta-8} + 4N^1_{\Delta-9} + N^1_{\Delta-10}. \end{aligned} \right.$$

Cette formule donne le nombre des solutions demandées, et on pourrait en établir une analogue pour N^p_Δ.

Nous remarquerons que N^1 est généralement égal à 1.

Nous remarquerons aussi que, par suite de la loi même suivie dans l'établissement de cette formule, l'indice inférieur est au moins égal à zéro et ne peut pas être négatif; d'un autre côté, il ne peut pas surpasser 5; donc la formule sera générale si l'on convient de mettre pour $N^{1}_{\Delta-i}$ le nombre zéro toutes les fois qu'il ne satisfera pas à la relation

$$(15)\qquad \left\{\begin{array}{l} \Delta - i \geqq 0 \\ \qquad \leqq 5, \end{array}\right.$$

ou bien toutes les fois que l'on n'aura pas

$$(16)\qquad \left\{\begin{array}{l} i \leqq \Delta \\ \;\geqq \Delta - 5. \end{array}\right.$$

Dans le cas de $\Delta = 3$, nous aurons i compris entre 3 et 2; donc

$$i = 0,\ 1,\ 2,\ 3;$$

donc

$$N^5_3 = 1 + 4 + 9 + 15 = 29;$$

et c'est bien le nombre de solutions données par le tableau précédent.

La loi qui préside aux coefficients de l'équation (14) est donnée par un triangle analogue au triangle arithmétique de Pascal.

Voici ce triangle :

1[er]...	1															
2[e]...	1	1														
3[e]...	1	2	2	1												
4[e]...	1	3	5	6	5	3	1									
5[e]...	1	4	9	15	20	22	20	15	9	4	1					
6[e]...	1	5	14	29	49	71	90	101	101	90	71	49	29	14	5	1

....

La loi de formation est la suivante :

1° Chacun des nombres de la 3e ligne se forme en ajoutant le nombre supérieur de la ligne horizontale précédente à la somme des 2 qui le précèdent dans cette même ligne.

2° Chacun des nombres de la 4e ligne se forme en ajoutant au nombre supérieur la somme des 3 qui le précèdent;

3° Chacun des nombres de la 5e ligne se forme en ajoutant au nombre immédiatement supérieur la somme des 4 qui le précèdent dans la 4e ligne horizontale, et ainsi de suite.

Cette loi résulte des égalités successives qui nous ont conduit à la formule (14).

Nous pouvons donc écrire :

$$N_\Delta^2 = N_\Delta^1 + N_{\Delta-1}^1,$$
$$N_\Delta^3 = N_\Delta^1 + 2N_{\Delta-1}^1 + 2N_{\Delta-2}^1 + N_{\Delta-3}^1,$$
$$N_\Delta^4 = N_\Delta^1 + 3N_{\Delta-1}^1 + 5N_{\Delta-2}^1 + 6N_{\Delta-3}^1 + 5N_{\Delta-4}^1 + 3N_{\Delta-5}^1 + N_{\Delta-6}^1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

en remarquant toujours que la plus forte valeur de l'indice inférieur de N^1 est l'indice supérieur du premier membre et que la plus faible est zéro. Dans ces limites, N^1 est égal à 1; en dehors il est nul.

On démontre facilement par cette formule que le nombre des permutations ayant Δ dérangements est égal au nombre de celles qui ont $\Delta' = \square - \Delta$ permutations.

EXPOSÉ D'UNE THÉORIE (GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE) DES SECTIONS CONIQUES;

PAR M. AUGUSTE MOREL,
Ancien Élève de l'École Polytechnique, répétiteur à Sainte-Barbe.

Cet article a pour but de présenter aux élèves de Mathématiques spéciales, sous une méthode nouvelle, l'ensemble des propriétés des courbes du second degré qui font partie de leur programme, et de leur montrer comment, en se guidant sur les résultats fournis par le calcul, on peut refaire, par la géométrie élémentaire, une théorie établie par la géométrie analytique. Nous croyons donc leur être utile en leur donnant une sorte de programme de géométrie des coniques, avec quelques indications pour arriver à la démonstration des théorèmes. Pour les propositions qui se trouvent dans la *Géométrie* d'Amiot, nous renvoyons à cet ouvrage.

CHAPITRE I. — DE L'ELLIPSE.

1. *Définition.* — L'ellipse est une courbe telle, que la somme des distances MF, MF′ de l'un quelconque de ses points à deux points fixes F et F′ est égale à une longueur constante que j'appellerai $2a$. Les points F et F′ sont les *foyers*; je désignerai leur distance par $2c$, et le rapport $\frac{c}{a}$ prendra le nom d'*excentricité*.

2. Construction de la courbe d'un mouvement continu.

3. Construction de la courbe par points.

4. *Théorème.* — L'ellipse a pour centre de symétrie le milieu O de la ligne FF', et pour axes de symétrie la ligne FF' et sa perpendiculaire passant par le point O.

5. *Théorème.* — Suivant qu'un point est intérieur ou extérieur à l'ellipse, la somme de ses distances aux deux foyers est plus petite ou plus grande que $2a$.

6. *Théorème.* — Si d'un point M d'une ellipse on abaisse la perpendiculaire MP sur l'axe focal, la différence des rayons vecteurs est proportionnelle à la distance OP de cette droite au centre.

Ce théorème résulte immédiatement de la définition de la courbe; car si l'on exprime au moyen de la perpendiculaire MP et de OP les carrés des rayons vecteurs, et que l'on fasse la différence de ces carrés, on en déduit

$$\rho - \rho' = 2 \cdot \frac{c}{a} \cdot \mathrm{OP}.$$

7. *Théorème.* — Je prends sur l'axe focal d'une ellipse un point S, tel que l'on ait $\mathrm{OF} \cdot \mathrm{OS} = \mathrm{OA}^2$, et par ce point je mène une tangente SC au cercle décrit sur AA' comme diamètre; je mène le rayon OC passant au point de contact, et par le point M, projection d'un point P de l'ellipse, la parallèle MN au rayon OC; la portion MN de cette parallèle comprise entre le point M et la tangente SC est égale au rayon vecteur FP.

Pour démontrer ce théorème, je mène la tangente S'C' parallèle à SC, et je prolonge la ligne NM jusqu'au point N' où elle rencontre S'C'; puis je démontre que $\mathrm{MN} + \mathrm{MN}' = 2a$ et que $\mathrm{MN}' - \mathrm{MN} = 2 \cdot \frac{c}{a} \cdot \mathrm{OM}$, c'est-à-dire que l'on a la double égalité

$$\rho' + \rho = \mathrm{MN}' + \mathrm{MN}, \quad \rho' - \rho = \mathrm{MN}' - \mathrm{MN};$$

d'où l'on déduit le théorème énoncé.

8. *Corollaire.* — Si par le point S je mène la droite SR perpendiculaire à AA′, et du point P la ligne PR parallèle à AA′, le rapport $\frac{\mathrm{FP}}{\mathrm{PR}}$ des distances d'un point quelconque de l'ellipse au foyer F et à la droite RS est constant et égal à $\frac{c}{a}$.

La droite RS s'appelle la *directrice* correspondant au foyer F. Il existe une autre directrice passant par le point S′, symétrique du point S par rapport au centre, correspondant au foyer F′.

9. *Théorème.* — Si je prolonge l'*ordonnée* d'une ellipse jusqu'au point où elle rencontre le cercle décrit sur le grand axe comme diamètre, le rapport de l'ordonnée de l'ellipse à celle du cercle est constant.

Pour démontrer ce théorème, je joins le centre O au point M où l'ordonnée coupe le cercle, et du point F j'abaisse la perpendiculaire FR sur OM; je prouve alors :

1° Que OM — OR ou RM = FN, rayon vecteur du point N considéré;

2° Que $\mathrm{NP}^2 = \mathrm{MP}^2 - \mathrm{FR}^2$.

Et, comme $\mathrm{FR} = \frac{c}{a} \cdot \mathrm{MP}$, on en déduit

$$\mathrm{NP}^2 = \mathrm{MP}^2 . \left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right) = \mathrm{MP}^2 . \frac{b^2}{a^2},$$

ce qui démontre le théorème.

10. *Corollaire.* — L'ordonnée d'un point quelconque de l'ellipse partage le grand axe en deux segments additifs tels, que le carré de l'ordonnée est au produit de ces deux segments comme b^2 est à a^2.

11. *Théorème.* — La tangente à l'ellipse fait des angles égaux avec les rayons vecteurs du point de contact.

12. *Corollaire I.* — La tangente n'a qu'un point commun avec la courbe.

Corollaire II. — La normale bissecte l'angle des rayons vecteurs passant par son pied.

13. *Théorème.* — Le lieu des points symétriques de l'un des foyers par rapport à toutes les tangentes à l'ellipse est un cercle décrit de l'autre foyer comme centre avec $2a$ pour rayon.

Ce cercle prend le nom de *cercle directeur* relatif au foyer qui est son centre. On verrait de même qu'il existe un second cercle directeur relatif à l'autre foyer, et qui est le lieu des points symétriques du premier foyer par rapport aux tangentes.

14. *Corollaire.*—L'ellipse peut être considérée comme le lieu des points également distants d'un cercle et d'un point pris à son intérieur.

15. *Problème.* — Mener une tangente à l'ellipse par un point pris sur la courbe.

16. *Problème.* — Mener une tangente à l'ellipse par un point extérieur.

17. *Théorème.* — Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à l'ellipse est un cercle.

Pour le prouver, je remarque que l'angle des lignes qui joignent le foyer F aux points de rencontre P, P′ du cercle directeur et de la circonférence passant par le foyer F, et dont le centre est le point donné M_1, doit être droit, puisqu'il a ses côtés perpendiculaires aux tangentes; donc le point M_1 doit être au milieu de la droite PP′, et l'on aura

$$F'M_1 + M_1P^2 = 4a^2,$$

et, en joignant le point M_1 au centre, on aura

$$OM^2 = \frac{4a^2 - 2c^2}{2} = 2a^2 - c^2 = a^2 + b^2;$$

donc OM est constant et égal à la diagonale du rectangle construit sur les demi-axes.

18. *Théorème.* — Si d'un point M extérieur à l'ellipse on mène les deux tangentes, et qu'on joigne les deux foyers au point donné et aux deux points de contact : 1° la ligne F′M bissecte l'angle des rayons vecteurs menés du point F′; 2° les lignes qui joignent les foyers au point M font, respectivement, des angles égaux avec les tangentes.

19. *Problème.* — Mener à l'ellipse une tangente parallèle à une direction donnée.

20. *Corollaire.* — Les deux points de contact des deux tangentes parallèles sont symétriques par rapport au centre, et réciproquement, si l'on mène les tangentes en deux points symétriques par rapport au centre, ces tangentes sont parallèles.

21. *Théorème.* — Le lieu géométrique des projections des foyers d'une ellipse sur les tangentes est le cercle décrit sur le grand axe comme diamètre.

22. *Théorème.* — Le produit des distances des deux foyers à une même tangente est constant et égal au carré du demi-petit axe.

23. *Théorème.* — Si une droite rencontre une ellipse aux points M et N, et la directrice correspondante au foyer F en P, et si l'on joint le foyer F aux points M, N, P, la ligne FP est la bissectrice de l'angle adjacent à celui des deux rayons vecteurs FM, FN.

Cela résulte de la définition même de la directrice, car si l'on abaisse les perpendiculaires Mm, Nn sur cette droite, on a

$$\frac{MP}{NP} = \frac{Mm}{Nn} = \frac{FM}{FN}.$$

24. *Corollaire I.* — Une droite ne peut rencontrer une ellipse qu'en deux points.

Corollaire II. — La ligne qui joint un foyer au point de rencontre d'une tangente et de la directrice correspondante, est perpendiculaire au rayon vecteur passant au point de contact.

Corollaire III. — Si par les extrémités d'une corde focale on mène des tangentes, ces lignes se coupent sur la directrice, et, réciproquement, si d'un point de la directrice on mène des tangentes, la droite qui joint les points de contact passe par le foyer.

Corollaire IV. — Les tangentes aux sommets sont perpendiculaires à l'axe correspondant.

25. *Problème.* — Déterminer les points d'intersection d'une droite et d'une ellipse déterminée par ses foyers et son grand axe.

26. *Théorème.* — Le point de rencontre d'une droite et de la directrice est le point de concours des tangentes communes que l'on peut mener aux cercles ayant pour centres les points de rencontre de la droite et de l'ellipse, et passant par le foyer correspondant à la directrice considérée.

On démontre facilement ce théorème en cherchant le point où la tangente commune coupe la ligne des centres, et prouvant que ce point appartient à la directrice.

27. *Corollaire I.* — Si la ligne donnée se déplace parallèlement à elle-même, il en est de même de la tangente commune.

Corollaire II. — Si la droite donnée passe par le centre, la tangente commune aux deux cercles précédents est aussi tangente au cercle décrit sur le grand axe comme diamètre.

28. *Théorème.* — Le lieu géométrique du point milieu d'une corde de direction donnée est une droite que l'on obtient en joignant le centre de l'ellipse au point de rencontre de la directrice et d'une droite menée par le foyer correspondant perpendiculairement à la direction donnée.

Pour le prouver, je remarque que cette perpendiculaire, passant par le point de rencontre des deux cercles désignés dans le théorème précédent, passe par le milieu α de la tangente commune, et que, par suite, la ligne qui joint le milieu de la corde au point α est perpendiculaire sur la tangente commune; si je mène par le centre une parallèle à la direction donnée, la droite $F\alpha$ coupera le cercle décrit sur le grand axe comme diamètre au point de contact de la tangente commune à ce cercle et à l'un des cercles décrits comme précédemment. On en déduit facilement que le lieu du point m, milieu de la corde de direction donnée, est une droite. Cette droite s'appelle le *diamètre* correspondant à la direction donnée.

29. *Corollaire.* — Si l'on cherche le diamètre correspondant à cette nouvelle direction que l'on vient de déterminer, on retrouvera une droite parallèle à la première.

30. *Scolie.* — Deux diamètres tels que chacun d'eux partage en deux parties égales les cordes parallèles à l'autre sont appelés *diamètres conjugués*. On voit facilement que les portions de deux diamètres conjugués situées d'un même côté du petit axe sont de part et

d'autre du grand axe, et que les axes eux-mêmes forment un système de diamètres conjugués.

31. *Théorème.* — Si par les extrémités P, P′ de deux demi-diamètres conjugués, je mène les ordonnées et que je prolonge ces droites jusqu'aux points Q et Q′, où elles rencontrent le cercle décrit sur le grand axe comme diamètre, les rayons OQ, OQ′ de ce cercle sont à angle droit.

Pour démontrer ce théorème, il suffit de prouver que, si je mène une corde parallèle à OP′ et que je prenne dans le cercle les points de mêmes abscisses que ses extrémités, la ligne qui joint ces points dans le cercle est parallèle à OQ′, et que, de plus, le milieu de cette droite est sur OQ, et a même abscisse que le milieu de la parallèle à OP′; en d'autres termes, que les deux diamètres OQ, OQ′ jouent dans le cercle le rôle de diamètres conjugués.

32. *Corollaire.* — Si par un point du grand axe nous menons une tangente à l'ellipse et une tangente au cercle, les deux points de contact sont sur une même perpendiculaire au grand axe.

33. *Théorème.* — La somme des carrés des projections de deux diamètres conjugués sur un axe est égale au carré de cet axe.

Ce théorème se déduit immédiatement du précédent.

34. *Corollaire.* — La somme des carrés de deux diamètres conjugués est constante et égale à la somme des carrés des axes.

35. *Théorème.* — Si l'on mène une tangente quelconque terminée aux deux axes, le produit des segments compris sur cette tangente entre le point de contact et

chacun des axes est égal au carré du demi-diamètre parallèle à la tangente.

Ce théorème se déduit facilement du théorème (31) et de son corollaire.

36. *Théorème.* — La longueur d'un diamètre OP d'une ellipse est égale à la corde BFC menée par le foyer dans le cercle décrit sur le grand axe comme diamètre, parallèlement au rayon ayant même projection que OP.

La démonstration de ce théorème a déjà été donnée dans les *Annales*.

37. *Théorème.* — Le parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués a une aire constante.

Ce théorème résulte du corollaire (32) ; car, si je construis ce parallélogramme et que, par les points où ses côtés coupent le grand axe, je mène des tangentes au cercle décrit sur le grand axe comme diamètre, il est facile de prouver que je formerai un rectangle dont les sommets auront mêmes projections que ceux du parallélogramme considéré, et, de plus, que les ordonnées du sommet du parallélogramme seront à celles correspondant au rectangle dans le rapport de b à a. On en déduit que l'aire du parallélogramme considéré est égale à $4ab$.

38. *Problème.* — Construire les axes d'une ellipse dont on connaît, en grandeur et en position, deux diamètres conjugués.

La construction à suivre est celle indiquée dans la *Géométrie analytique* de MM. Briot et Bouquet, et dont la démonstration géométrique est très-simple.

39. *Théorème.* — Si une ligne droite AB de longueur constante glisse entre deux droites rectangulaires, un point quelconque M de cette droite décrit une ellipse dont les demi-axes sont AM et BM.

Pour le prouver, il suffit de faire voir que si, du point O comme centre avec AM comme rayon, je décris un cercle, les ordonnées de la courbe décrite par le point M sont aux ordonnées correspondantes de ce cercle dans le rapport constant de BM à AM.

Le théorème est encore vrai si le point M est pris en dehors du segment AB, mais sur cette droite.

(*La suite prochainement.*)

APPLICATION D'UN THÉORÈME SUR LES SURFACES DE SECOND ORDRE A LA SOLUTION DE LA QUESTION 926;

PAR M. LOUIS SALTEL,

Élève du lycée de Lille, ancien élève du lycée Louis-le-Grand.

(*a*) La question (926) est un cas particulier de ce problème plus général :

Étant données deux équations du second degré à trois variables,

$$f(x, y, z) = 0, \quad \varphi(x, y, z) = 0,$$

trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que ces équations représentent un cercle; déterminer la direction de son plan, son centre, la longueur de son rayon.

(*b*) *Détermination des conditions et de la direction du plan.* — Je m'appuierai sur la proposition réciproque suivante, qui, je crois, n'a pas encore été remarquée. On sait que :

Lorsque deux surfaces du second ordre se coupent suivant des courbes planes, toute section parallèle au plan de l'une de ces courbes donne des sections homothétiques.

Le théorème réciproque est vrai :

Si deux surfaces du second ordre se coupent suivant deux courbes planes situées à distance finie, et qu'elles admettent une même série de sections homothétiques, leur plan est en général parallèle à l'un de ceux de l'intersection.

Soient (S_1, S_2) les deux surfaces, (A_1, A_2) les plans des courbes communes, et D la direction de la série des sections planes.

Dans le cas où D serait parallèle à l'un des plans (A_1, A_2), le théorème est démontré; dans le cas contraire, D coupe (A_1, A_2) suivant deux droites situées à *distance finie*, et conséquemment la courbe totale d'intersection *généralement* suivant quatre points situés aussi à distance finie.

D'un autre côté, les mêmes sections planes, étant homothétiques, ont deux points communs à l'*infini.*

Par suite, les deux coniques que donne le plan D par son intersection avec les deux surfaces coïncident, comme ayant six points communs. Ainsi, chaque position oblique de D couperait (S_1, S_2) suivant une même courbe, et les deux surfaces se confondraient, ce qui n'est pas.

Remarque. — Le raisonnement précédent est en défaut si les sections homothétiques sont des hyperboles dont les asymptotes sont respectivement parallèles aux traces que donne leur plan avec ceux des courbes communes. Cette circonstance ne saurait se présenter dans le cas où les courbes sont des ellipses. On peut donc en toute rigueur énoncer le *corollaire* suivant :

THÉORÈME. — *Si deux surfaces du second ordre se coupent suivant deux courbes planes situées à distance finie et qu'elles admettent une même série de sections circulaires, l'une des courbes d'intersection est un cercle.*

Il résulte de ce théorème que les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux surfaces du second ordre se coupent suivant un cercle sont :

1° *De se couper suivant des courbes planes ;*

2° *D'admettre une direction commune de sections circulaires.*

Le problème est ainsi ramené à deux autres complétement distincts et d'ailleurs résolus dans le *Cours de Mathématiques spéciales.*

Nous allons rappeler succinctement leurs solutions.

S'agit-il de trouver les *conditions* pour que les deux surfaces se coupent suivant des courbes planes ?

On forme l'équation générale des surfaces du même ordre qui passent par leur intersection ; on exprime qu'elle possède un axe central situé sur sa surface, et l'on obtient trois relations qui, par l'élimination d'un paramètre arbitraire, conduisent définitivement à *deux équations de condition.*

Veut-on exprimer que les deux surfaces ont une direction commune de sections circulaires?

On considère les équations

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &(A - S_1)x^2 + (A' - S_1)y^2 + (A'' - S_1)z^2 \\ &\qquad + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} &(a - S_2)x^2 + (a' - S_2)y^2 + (A'' - S_2)z^2 \\ &\qquad + 2byz + 2b'zx + 2b''xy = 0, \end{aligned} \right.$$

qui représenteront les directions des sections circnlaires, si (S_1, S_2) vérifient les relations

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &(A - S_1)(A' - S_1)(A'' - S_1) - (A - S_1)B^2 - (A' - S_1)B'^2 \\ &\qquad - (A'' - S_1)B''^2 + 2BB'B'' = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} &(a - S_2)(a' - S_2)(a'' - S_2) - (A - S_1)b^2 - (a' - S_2)b'^2 \\ &\qquad - (a'' - S_1)b''^2 + 2bb'b'' = 0. \end{aligned} \right.$$

On exprime qu'elles ont une solution commune de la forme

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0,$$

ce qui exige deux conditions,

$$(5) \qquad f(S_1, S_2) = 0,$$

$$(6) \qquad \varphi(S_1, S_2) = 0,$$

et l'élimination de S_1 et S_2 entre les équations (3), (4), (5), (6) fournira les *deux équations de condition* que doivent vérifier les coefficients pour que la propriété demandée ait lieu.

(*c*) *Détermination du centre et du rayon.* — Le centre est évidemment donné par l'intersection des deux diamètres correspondant à la direction commune des sections circulaires. Quant au rayon, il est encore facile à obtenir. Supposez le cas où la direction du plan des sections communes passe par le centre du cercle; projetez la section sur l'un des plans coordonnés, le grand axe de la courbe projection sera égal au rayon.

(*d*) *Remarque.* — La théorie précédente suppose essentiellement que les deux surfaces se coupent suivant *deux* courbes planes situées à distance *finie;* si donc nous ne voulons rien négliger, il nous reste à examiner le cas où l'une des courbes se transporte à l'infini.

Le problème est des plus faciles. En effet, les deux surfaces sont nécessairement homothétiques, et une simple soustraction donne l'équation du plan de la courbe commune.

Or, pour que cette courbe soit un cercle, il faut et il suffit que son plan ait une direction de sections circulaires de l'une des surfaces, ce qui s'exprime immédiatement par *deux équations de condition.*

(*e*) *Applications.* — M. Dupain propose comme application numérique les deux équations

$$25y^2 + 24zy + 153z^2 - 76y + 258z - 695 = 0,$$
$$25x^2 + 72xz + 160z^2 + 22x + 248z - 1487 = 0.$$

On reconnaît, en calculant les grands axes de ces ellipses, qu'ils sont différents; donc ces équations ne sauraient représenter un cercle.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc, du lycée du Havre.

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 872

(voir 2ᵉ série, t. VII, p. 237);

PAR M. WILLIÈRE,
Professeur à Arlon.

Deux droites qui divisent harmoniquement les trois diagonales d'un quadrilatère rencontrent en quatre points harmoniques toute conique inscrite dans le quadrilatère. (CREMONA.)

Je rapporte la figure au triangle formé par les trois diagonales du quadrilatère; les équations des quatre côtés sont dans ce cas :

$$x + y + z = 0,$$
$$x + y - z = 0,$$
$$x - y + z = 0,$$
$$x - y - z = 0.$$

Soient

$$lx + my + nz = 0,$$
$$l'x + m'y + n'z = 0$$

les équations de deux droites quelconques; les points où ces droites coupent la diagonale x sont déterminés par l'équation

$$mm'y^2 + (mn' + nm')zy + nn'z^2 = 0,$$

et les sommets du quadrilatère situés sur la même diagonale, par l'équation

$$y^2 - z^2 = 0.$$

Pour que ces quatre points soient harmoniquement conjugués, il faut que l'on ait

$$mm' = nn'.$$

De même, pour que les deux autres diagonales soient divisées harmoniquement, il faut que l'on ait

$$nn' = ll'$$
$$ll' = mm';$$

d'où je conclus que les équations de deux droites qui divisent harmoniquement les diagonales du quadrilatère sont de la forme

$$(1) \qquad lx + my + nz = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{x}{l} + \frac{y}{m} + \frac{z}{n} = 0.$$

Une conique quelconque, inscrite dans le quadrilatère, a pour équation

$$(3) \qquad \mu^2 x^2 - \mu(x^2 + y^2 - z^2) + y^2 = 0.$$

Par suite, l'équation des deux lignes joignant un point (x', y', z') de cette conique aux points d'intersection de la droite (1) avec la même conique sera

$$(lx' + my' + nz')[\mu^2 x^2 - \mu(x^2 + y^2 - z^2) + y^2]$$
$$= 2(lx + my + nz)[\mu^2 xx' - \mu(xx' + yy' - zz') + yy'].$$

Ces deux droites coupent la diagonale $z=0$ en deux points déterminés par l'équation

$$\begin{aligned}&\mu x^2(my'+nz'-lx')\\&\quad-2xy(\mu m x'-ly')-y^2(lx'-my'+nz')=0.\end{aligned}$$

En opérant de la même manière pour la droite (2), on trouverait deux points correspondants déterminés par l'équation

$$\mu x^2\left(\frac{y'}{m}+\frac{z'}{n}-\frac{x'}{l}\right)-2xy\left(\mu\frac{x'}{m}-\frac{y'}{l}\right)-y^2\left(\frac{x'}{l}-\frac{y'}{m}+\frac{z'}{n}\right)=0.$$

Ces quatre points seront harmoniques si l'on a

$$\begin{aligned}&\mu\left(\frac{y'}{m}+\frac{z'}{n}-\frac{x'}{l}\right)(lx'-my'+nz')\\&\quad+\mu(my'+nz'-lx')\left(\frac{x'}{l}-\frac{y'}{m}+\frac{z'}{n}\right)\\&\qquad+2(\mu m x'-ly')\left(\mu\frac{x'}{m}-\frac{y'}{l}\right)=0,\end{aligned}$$

ou bien, toute réduction faite,

$$\mu^2 x'^2-\mu(x'^2+y'^2-z'^2)+y'^2=0,$$

ce qui est une identité, puisque le point (x', y', z') est situé sur la conique (3).

EXERCICES POUR LA LICENCE;

PAR M. W. H. BESANT,
du collége de Saint-Jean à Cambridge.

NOTES SUR LES ROULETTES ET LES GLISSETTES.

Cet ouvrage contient une exposition assez complète de la théorie des courbes engendrées par un point, ou enveloppées par une ligne lorsque ce point ou cette ligne sont entraînés dans le mouvement de roulement ou de glissement d'une ligne donnée sur des figures fixes.

On sait que depuis longtemps le nom de *roulettes* a été donné aux lignes résultant du roulement d'une figure déterminée sur une autre figure fixe. L'auteur a, par analogie, donné le nom de *glissettes* aux lignes engendrées par le glissement d'une figure déterminée sur des points ou des lignes fixes.

Nous donnons ici, à titre d'exercices préparatoires à la licence, les principaux théorèmes et exercices compris dans l'ouvrage de M. Besant.

I. — *Roulettes*.

1. Soient p la perpendiculaire abaissée d'un point fixe O sur la tangente en un point P d'une courbe, et φ son inclinaison sur une ligne fixe; alors :

1° La perpendiculaire abaissée du point O sur la normale a pour valeur $\dfrac{dp}{d\varphi}$;

2° Le rayon de courbure en P est égal à $p + \dfrac{d^2p}{d\varphi^2}$.

2. La relation $p = f(\varphi)$ entre p et φ est appelée *équation tangentielle polaire de la courbe* (M. Ferrers, *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, 1855). On peut remarquer que cette équation n'est autre que l'équation polaire de la podaire du point O pris comme pôle, et la ligne fixe comme axe polaire.

3. Trouver l'équation tangentielle polaire de la ligne tracée par un point.

4. *Exemple.* — Trouver la roulette du foyer d'une parabole roulant sur une ligne droite.

Trouver le lieu du pôle de la ligne $r = a(1 - \cos\theta)$ roulant sur son axe.

5. Ayant, en x et y, l'équation de la roulette, trouver l'équation de la courbe mobile.

6. *Exemples.* — La roulette est la chaînette

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right).$$

La roulette est la parabole $y^2 = 4ax$.

La roulette a pour équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

7. Trouver l'équation tangentielle et l'équation à termes finis de l'épicycloïde.

Trouver l'équation de cette courbe en fonction de p et r.

8. Une courbe roule sur une autre; on demande de trouver le lieu d'un point de son plan.

9. Une courbe roule sur une droite; trouver la courbure du lieu d'un point de son plan.

10. Si une courbe roule sur une ligne fixe d'un arc δs, l'angle dont a tourné une ligne du plan de la ligne mobile est $\delta s \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right)$, ρ et ρ' étant les rayons de courbure du point de contact.

11. Une courbe roule sur une courbe fixe; trouver la courbure de la roulette tracée par un point qu'elle entraîne.

12. Si une courbe roule sur une droite, l'arc de la roulette est égal à l'arc correspondant de la podaire.

13. Lorsqu'une courbe roule sur une courbe fixe, l'arc élémentaire de la roulette est à l'arc correspondant de la podaire dans le rapport de $\rho + \rho'$ à ρ', ρ étant le rayon de courbure de la courbe mobile, et ρ' celui de la courbe fixe.

(*La suite prochainement.*)

CONCOURS POUR L'ÉCOLE NAVALE EN 1871.

Triangle.

Étant donnés les trois côtés d'un triangle,

$$a = 310, \quad b = 150, \quad c = 252,8556,$$

trouver les angles, la surface et le rayon du cercle circonscrit.

Épure.

Étant donné un plan dont la trace verticale fait un angle de 36 degrés avec la ligne de terre et dont la face postérieure est inclinée à $49^\circ 30'$ sur la face supérieure du plan horizontal, trouver les projections d'une droite satisfaisant aux conditions suivantes :

1° La droite perce le plan dans le premier dièdre à $27^m,50$ de la trace verticale du plan et à $34^m,10$ de la trace horizontale.

2° La partie supérieure de la droite fait un angle de 54 degrés avec la partie supérieure de la trace verticale du plan et un angle de $67^\circ 30'$ avec la partie antérieure de la trace horizontale.

L'échelle sera prise à $\frac{1}{1100}$, et les angles construits géométriquement.

Chaque candidat doit remettre une explication sommaire de l'épure.

Remarque. — Nous trouvons la rédaction de cette question fort obscure, et si elle nous semble difficile à comprendre, elle doit être à peu près inintelligible pour les candidats. Que faut-il entendre par face postérieure d'un plan quelconque? Quelle serait la face postérieure d'un plan perpendiculaire au plan vertical? etc. Tous ces termes peuvent être définis et employés dans un cours oral par le professeur; mais ils ne sont pas tous d'un usage habituel et n'ont pas pour tous une même signification déterminée. J. B.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une lettre de M. Moret-Blanc, professeur au lycée du Havre.

Une erreur s'est glissée dans la solution de la question 942 (numéro de février) : *Un cube parfait augmenté de sept unités d'ordre quelconque ne peut pas être un carré parfait;* que l'auteur de la solution propose d'énoncer ainsi :

Un cube parfait augmenté de sept unités d'ordres quelconques ne peut pas être un carré parfait.

Parmi les formes possibles d'un carré, M. Morel a oublié $m9 + 4$ et $m9 + 7$, dont la dernière rend nulle sa démonstration.

En effet, avec la modification proposée le théorème serait certainement inexact.

$$\text{Exemple : } 3^3 + 100 + 4.10 + 2 = 13^2.$$

Le théorème primitif reste donc à démontrer.

Note du Rédacteur. — M. Moret-Blanc m'a adressé de très-bonnes solutions de plusieurs questions proposées; elles seront prochainement insérées dans le Journal.

G.

BIBLIOGRAPHIE.

Élementi di Geometria, per ACHILLE SANNIA, professore nella R. Scuola di Applicazione per gl'Ingegneri di Napoli, e ENRICO D'OVIDIO, professore nel R. Liceo Principe Umberto di Napoli. Seconda edizione, riveduta e corretta. Napoli, 1871. — 1 vol. petit in-8°, de x-571 p., avec 382 fig. dans le texte. Prix : 5 francs.

Ce traité, qui vient d'atteindre rapidement sa seconde édition, a été rédigé pour répondre au programme tracé par l'administration de l'Instruction publique en Italie, et en vertu duquel l'enseignement de la géométrie élémentaire (du moins pour la partie plane) doit se faire *d'après les Éléments d'Euclide.* L'objet capital que ce programme avait en vue, celui de ramener l'enseignement géométrique à la rigueur logique des anciens, nous semble complétement atteint par les auteurs de cet excellent ouvrage. En examinant, avec attention, la manière dont ils ont traité les points délicats sur lesquels on est presque sûr de rencontrer, dans la plupart des ouvrages élémentaires, les mêmes erreurs traditionnelles, nous avons partout trouvé l'exactitude à la place de l'*à peu près*, et l'Italie, qui possède déjà une traduction des *Éléments de Mathématiques* de M. Baltzer, vient de s'enrichir d'un nouveau livre, où l'on peut étudier scientifiquement la géométrie.

Si les *Éléments d'Euclide* sont restés pendant plus de deux mille ans le plus beau modèle de sévère logique, modèle rarement égalé, jamais surpassé, il n'en est pas moins vrai que le mode d'exposition de cet ouvrage ne répond plus à l'état actuel de la science, et que l'étude du texte pur d'Euclide est une tâche assez pénible pour les commençants. Il s'agissait donc d'introduire avec prudence, dans un cours de géométrie, les simplifications que comportent les méthodes modernes, sans diminuer en rien le caractère d'exactitude et d'évidence des démonstrations, et la profonde intelligence des principes qui distingue l'œuvre du géomètre grec.

C'est ce que MM. Sannia et d'Ovidio se sont efforcés de faire, et l'on peut dire qu'ils ont parfaitement réussi à conserver la rigueur de leur modèle. Mais peut-être sont-ils restés un peu en deçà du but, en suivant de trop près les anciennes méthodes, comme ils l'ont fait dans la théorie des proportions.

On s'est élevé avec raison contre la manière dont Legendre et son école ont introduit les considérations arithmétiques dans la géométrie, sans avoir préalablement expliqué comment on supplée à l'impossibilité de représenter généralement les grandeurs continues par des nombres. On y parvient en s'appuyant sur le principe des limites, en vertu duquel des relations, entre grandeurs continues, démontrées pour les valeurs indéfiniment approchées de ces grandeurs, sont rigoureusement vraies pour ces grandeurs elle-mêmes. En procédant ainsi, on justifie l'emploi des méthodes arithmétiques, plus courtes et plus familières aux commençants que les méthodes anciennes, et présentant l'avantage caractéristique de toute bonne méthode, de cotoyer toujours de près la pratique.

Si l'on tient absolument à ne pas mêler l'idée de nombre dans la théorie des proportions, on n'a qu'a définir les lignes proportionnelles comme celles qui peuvent être placées sur les deux côtés d'un angle, de manière que les lignes qui joignent les points de division soient parallèles. On en conclut facilement, par une démonstration purement géométrique, que deux rectangles qui ont leurs dimensions inversement proportionnelles sont équivalents, et réciproquement. En nommant alors *produit* de deux lignes la surface du rectangle construit sur ces deux lignes, on peut étendre immédiatement aux proportions des lignes les propositions arithmétiques relatives aux proportions des nombres. Ayant ainsi défini la *multiplication*, et par suite la *division géométrique*, rien n'empêche de traiter les relations géométriques par les règles de l'algèbre, qui ne sont pas, comme on se le figure si souvent, de simples généralisations de forme des règles de l'arithmétique, mais qui s'appliquent immédiatement aux grandeurs concrètes, dès qu'on a défini pour celles-ci les opérations fondamentales, analogues à celles de l'arithmétique.

MM. Sannia et d'Ovidio ont préféré revenir à la théorie des proportions d'Euclide, en la modifiant, d'après les indications de M. Duhamel (*), par la substitution des *équisousmultiples* aux *équimultiples*. Malgré cette simplification, l'exposé de la théorie n'en occupe pas moins quinze pages, et ne dispense pas les auteurs de reprendre plus tard cette même théorie au point de vue algébrique ou arithmétique, qui se prête beaucoup mieux aux applications. Personne n'admire plus que nous le cinquième livre d'Euclide, un des plus beaux chefs-d'œuvre scientifiques que nous a laissés l'antiquité, et nous pensons qu'un professeur ne peut se dispenser de l'avoir étudié au moins une fois avec attention. Mais nous en dispenserions très-volontiers les commençants, que la difficulté de cette étude pourrait bien décourager.

Il serait avantageux, sous le rapport de l'uniformité et

(*) *Éléments de Calcul infinitésimal*, liv. I, chap. 1.

de la brièveté, de fonder les divers théorèmes de proportionnalité sur le principe suivant, qu'il est facile de revêtir d'une forme élémentaire : *Deux grandeurs x et $\varphi(x)$ sont proportionnelles, lorsque l'on a, pour des valeurs quelconques x_1, x_2 de la première, la relation*

$$(1) \qquad \varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$$

entre les valeurs correspondantes de la seconde. On déduirait très-simplement de cette relation le caractère des *équimultiples* d'Euclide, savoir : $m\varphi(x_1) \gtreqless n\varphi(x_2)$, suivant que $mx_1 \gtreqless nx_2$, et d'autre part l'existence de la relation (1) se vérifie immédiatement dans la plupart des cas.

Disons, en passant, qu'il nous eût semblé préférable de désigner l'égalité de deux rapports par le signe ordinaire (=), et de renoncer aux quatre points (::) des anciens arithméticiens, qui commencent à tomber en désuétude.

Un autre reproche que nous adressons aux auteurs de ce traité, c'est de n'avoir pas cherché, dans la disposition des matières, à grouper ensemble les diverses théories qui, différentes en apparence, ne constituent en réalité que des points de vue différents sous lesquels on peut envisager un même ensemble de vérités. Telles sont, par exemple, la théorie des triangles plans et celle des cordes dans le cercle, la théorie des angles polyèdres et celle des polygones sphériques. L'utilité de semblables rapprochements est évidente. On évite par là les doubles emplois dans les démonstrations ; on accoutume les élèves à reconnaître sous des noms différents des objets identiques ; on leur fait mieux comprendre la fécondité des théorèmes les plus simples en leur faisant voir à la fois les divers aspects, dont chacun correspond à un ordre d'applications différent.

Par exemple, ce théorème que, *dans tout triangle* *isoscèle, la perpendiculaire élevée sur le milieu de la base passe par le sommet,* peut s'énoncer immédiatement sous d'autres formes, en disant que *tout point équidistant des extrémités d'une droite appartient à la perpendiculaire élevée sur le milieu de cette droite,* ou que *deux obliques égales s'écartent également du pied de la perpendiculaire,* ou que *la perpendiculaire élevée sur le milieu d'une corde d'un cercle passe par le centre.* Cette diversité d'énoncés d'une même proposition ne peut que mettre sur la voie des différents problèmes qu'elle peut servir à résoudre.

Joignons à ces considérations l'avantage qui résulte de ce qu'un tel groupement, adopté par Euclide lui-même, permet à l'élève d'exécuter toutes les constructions indiquées pour la démonstration des théorèmes, et de s'exercer lui-même, dès le début, à des constructions graphiques, excellente préparation à l'étude de la géométrie théorique, que les gymnases allemands n'ont garde de négliger, mais dont nos constructeurs de programmes français ne se doutent pas, tant est profond le manque d'organisation et d'enchaînement dans toutes les branches d'étude de nos lycées! Il va sans dire qu'en Allemagne le dessin géométrique est enseigné par les mêmes maîtres que la géomètrie théorique, dont il n'est que le préambule.

L'ouvrage de MM. Sannia et d'Ovidio est divisé en huit Livres, dont les quatre premiers sont consacrés à la géométrie des figures planes, les quatre autres à celle des figures dans l'espace.

Les deux premiers Livres correspondent à peu près par leur contenu aux deux Livres de Legendre. Les propositions sur les angles formés autour d'un point, qui forment le début du premier Livre, auraient été abrégées et simplifiées, si l'on eût considéré comme point de départ la no-tion d'un *tour* entier, qui est l'unité angulaire naturelle, en faisant remarquer que ce tour, de même qu'un segment rectiligne, ne peut être divisé que d'une seule manière en deux ou en quatre parties égales.

L'étude des positions relatives de deux cercles est traitée, dans le second Livre, avec beaucoup de soin et de clarté.

Le Livre III contient la théorie euclidienne des proportions, la similitude des figures planes, les systèmes harmoniques de points et de droites, les premières notions sur les pôles et polaires.

Dans le Livre IV, les auteurs donnent les propositions relatives à l'équivalence des aires planes, au rapport des aires des figures semblables, à la division de la circonférence en parties égales. Ils exposent le principe des limites, à la suite duquel ils placent la définition de la longueur d'un arc de cercle. Viennent ensuite la théorie algébrique des rapports entre grandeurs incommensurables, le calcul de la mesure des aires planes, la mesure des angles par le rapport de l'arc au rayon, la détermination du rapport de la circonférence au diamètre, etc.

Le Livre V renferme les matières traitées dans les Livres V et VI de Legendre, moins tout ce qui se rapporte à la mesure des volumes, à la symétrie et à la similitude.

Le Livre VI a pour objet l'étude des surfaces de révolution : cylindre, cône et sphère ; plans tangents et sécants; pôles; positions relatives de deux sphères; polygones et cercles sphériques. Il se termine par la théorie des figures symétriques.

Le Livre VII est consacré à la théorie de la similitude dans l'espace. Systèmes harmoniques de plans; pôle et plan polaire; systèmes harmoniques sur la sphère; figures polaires réciproques.

Enfin le Livre VIII traite de la mesure des volumes et des surfaces des polyèdres, du cylindre, du cône et de la sphère. Rapport des aires et des volumes des figures semblables. Conséquences du théorème d'*Euler* sur les polyèdres. Mesure des angles dièdres et polyèdres par des portions de surface sphérique.

Chacun des huit Livres est suivi d'un recueil d'exercices très-bien choisis : théorèmes à démontrer, lieux géométriques à trouver, problèmes à résoudre.

Nous regrettons que l'étendue de cet article ne nous permette pas d'entrer dans plus de détails sur la richesse des matériaux que contient cet ouvrage, dont les auteurs ont prouvé qu'ils étaient au courant de tous les progrès de la géométrie, et qu'ils savaient en même temps se maintenir dans les limites d'un cours élémentaire. En étudiant ce livre, on y trouvera ce qu'il faut pour apprendre à fond les éléments de la géométrie, et pour se préparer à la connaissance des parties plus élevées de cette science. Ce qui est plus précieux encore, on y trouvera un guide sûr et des idées saines.

J. Hoüel.

ANALYSE INDÉTERMINÉE;

Problèmes,

Par M. Désiré ANDRÉ.

I.

Problème. — *Trouver trois nombres entiers, différents de zéro, dont les carrés soient en proportion arithmétique.*

Soient x, y, z trois nombres répondant à la question, on a

(1) $$x^2 - y^2 = y^2 - z^2,$$

d'où

$$2y^2 = x^2 + z^2.$$

Multiplions les deux membres de cette dernière équation par 2, il vient

$$4y^2 = 2x^2 + 2z^2,$$

ou bien

$$4y^2 = (x + z)^2 + (x - z)^2,$$

ou enfin

(2) $$y^2 = \left(\frac{x + z}{2}\right)^2 + \left(\frac{x - z}{2}\right)^2.$$

Cela posé, soient a, b, c trois nombres entiers, tels que

(3) $$b^2 = a^2 + c^2.$$

Posons

$$y = b,$$

$$\frac{x + z}{2} = a,$$

$$\frac{x - z}{2} = c,$$

ce qui nous donne

$$y = b,$$

$$x = a + c,$$

$$z = a - c;$$

Les entiers a, b, c satisfaisant à l'équation (3), les valeurs précédentes de x, y, z, lesquelles sont entières, satisferont à l'équation (2), et, par suite, à l'équation (1). Donc elles répondront à la question.

Remarque. — Toute solution de l'équation

$$b^2 = a^2 + c^2,$$

c'est-à-dire, suivant l'expression consacrée, tout triangle rectangle en nombres fournira une solution de la question proposée. Or, il existe une infinité de triangles rectangles en nombres; donc le problème considéré admet une infinité de solutions.

Application. — Soit le triangle rectangle

$$5^2 = 4^2 + 3^2;$$

on en déduit

$$x = 7, \quad y = 5, \quad z = 1;$$

donc

$$7^2, \quad 5^2, \quad 1^2$$

forment une proportion arithmétique.

II.

Problème. — *Trouver trois nombres entiers différents de zéro, dont les carrés forment une proportion harmonique.*

On sait que *si trois nombres sont en proportion arithmétique, leurs produits deux à deux sont en proportion harmonique.* Il suffit donc, pour résoudre le problème actuel, de trouver trois carrés en proportion arithmétique, et de former leurs produits deux à deux.

Le problème actuel est ainsi ramené au problème précédent. Il admet aussi une infinité de solutions.

Applications. — On a vu que

$$7^2, \quad 5^2, \quad 1^2$$

sont en proportion arithmétique; donc

$$(7 \times 5)^2, \quad (7 \times 1)^2, \quad (5 \times 1)^2,$$

c'est-à-dire

$$35^2, \quad 7^2, \quad 5^2$$

sont en proportion harmonique.

III.

Problème. — *Résoudre en nombres entiers, différents de zéro, l'équation*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a},$$

dans laquelle a représente un entier différent de zéro.

L'équation proposée peut s'écrire ainsi

$$(x - a)(y - a) = a^2.$$

Sous cette forme, elle montre que $x - a$ et $y - a$ sont deux diviseurs conjugués de a^2. A chaque couple d, d' de deux diviseurs conjugués correspondra donc une solution donnée par les formules

$$x - a = d,$$
$$y - a = d',$$

ou bien

$$x = a + d,$$
$$y = a + d'.$$

Le problème est ainsi ramené à la recherche (qu'on sait faire) des diviseurs de a^2.

Il est évident d'ailleurs que ce procédé donne toutes les solutions de l'équation proposée.

IV.

Remarque I. — Il faut exclure le couple de diviseurs conjugués

$$d = d' = -a,$$

vu qu'il donnerait

$$x = y = 0.$$

Remarque II. — Deux diviseurs conjugués d, d', ayant pour produit a^2, sont forcément de même signe. Quand les deux diviseurs conjugués sont de même signe que a, les valeurs correspondantes de x et de y sont aussi toutes deux de même signe que a. Dans le cas contraire, les valeurs de x et de y sont l'une positive, l'autre négative.

Remarque III. — Soit D le nombre des diviseurs positifs de a^2, le nombre des couples distincts de facteurs conjugués positifs, comme celui des couples distincts de facteurs conjugués négatifs, est égal à $\frac{D+1}{2}$. Il faut exclure le couple $d = d' = -a$, qui se trouve parmi ceux dont le signe est contraire à a. Il reste donc $\frac{D+1}{2}$ couples distincts de même signe que a, et $\frac{D-1}{2}$ couples distincts de signe contraire.

Par suite, le nombre des solutions où x et y sont de même signe est $\frac{D+1}{2}$, et celui des solutions où x et y sont de signes contraires est $\frac{D-1}{2}$.

Or,

$$\frac{D+1}{2} + \frac{D-1}{2} = D.$$

Donc *le nombre des solutions entières et différentes de zéro de l'équation* $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a}$ *est égal au nombre des diviseurs positifs de* a^2.

V.

Application. — Résoudre en nombres entiers différents de zéro l'équation $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{10}$.

Le carré de 10 admet 9 diviseurs positifs. Donc l'équation a 9 solutions, savoir 5 solutions où x et y sont de même signe, et 4 où ils sont de signes contraires. Ces 9 solutions donnent les 9 identités suivantes :

$$\frac{1}{11}+\frac{1}{110}=\frac{1}{10},$$

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{60}=\frac{1}{10},$$

$$\frac{1}{14}+\frac{1}{35}=\frac{1}{10},$$

$$\frac{1}{15}+\frac{1}{30}=\frac{1}{10},$$

$$\frac{1}{20}+\frac{1}{20}=\frac{1}{10},$$

$$\frac{1}{9}-\frac{1}{90}=\frac{1}{10},$$

$$\frac{1}{8}-\frac{1}{40}=\frac{1}{10},$$

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{15}=\frac{1}{10},$$

$$\frac{1}{5}-\frac{1}{10}=\frac{1}{10}.$$

VI.

PROBLÈME. — *Trouver deux nombres entiers différents de zéro dont la somme soit une partie aliquote du produit.*

Cela revient à résoudre l'équation

$$x+y=\frac{xy}{a},$$

qui est identique à l'équation

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a}.$$

Le problème actuel se résoudra donc comme le précédent; et il aura D solutions distinctes, D étant le nombre des diviseurs positifs de a^2.

Remarque. — Dans les deux derniers problèmes, le nombre des solutions, étant égal à D, est forcément impair.

Il se réduit à 3 lorsque a est premier, c'est-à-dire dans une infinité de cas. Mais il ne se réduit à 1 que dans les deux cas où a est égal à $+1$ ou à -1.

Il en résulte, en particulier, que ce problème : *Trouver deux nombres, entiers et différents de zéro, dont la somme égale le produit,* n'admet qu'une solution unique.

Cette solution est

$$x = y = 2.$$

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DE LA FORMULE DE SIMPSON;

PAR M. ADOLPHE STEEN.

Une ligne courbe quelconque forme avec sa corde un segment dont l'aire A peut se déterminer comme il suit, avec une approximation suffisante, lorsque la concavité de la courbe ne change pas de sens dans l'étendue de l'arc considéré. Menons une tangente parallèle à la corde et deux lignes parallèles par ses extrémités, de manière à former un parallélogramme d'aire P, dans lequel le segment est inscrit. En traçant de nouvelles cordes du point de contact aux extrémités de la corde donnée, on détache une aire triangulaire $\frac{1}{2}$P, moindre que l'aire du segment. On a ainsi

$$P > A > \tfrac{1}{2}P.$$

Mais les deux dernières cordes tracées déterminent de nouveaux segments B_1, B_2, dont chacun se trouve dans la même relation avec l'un des deux parallélogrammes correspondants Q_1, Q_2, de sorte qu'on a

$$Q_1 > B_1 > \tfrac{1}{2} Q_1, \quad Q_2 > B_2 > \tfrac{1}{2} Q_2.$$

Comme on a maintenant

$$A = \tfrac{1}{2} P + B_1 + B_2,$$

il vient

$$\tfrac{1}{2} P + Q_1 + Q_2 > A > \tfrac{1}{2} P + \tfrac{1}{2} (Q_1 + Q_2).$$

Chacune de ces limites peut donc être prise pour A, avec une erreur moindre que $\frac{1}{2}(Q_1 + Q_2)$.

En traitant les deux segments B_1, B_2 comme on a traité le segment A, on en détachera quatre nouveaux segments C_1, C_2, C_3, C_4, qui ont pour limites supérieures respectives les parallélogrammes R correspondants, et pour limites inférieures les moitiés de ces parallélogrammes. On trouve par suite, pour

$$A = \tfrac{1}{2} P + \tfrac{1}{2} (Q_1 + Q_2) + C_1 + C_2 + C_3 + C_4,$$

la limite supérieure

$$\tfrac{1}{2} P + \tfrac{1}{2} (Q_1 + Q_2) + R_1 + R_2 + R_3 + R_4,$$

et la limite inférieure

$$\tfrac{1}{2} P + \tfrac{1}{2} (Q_1 + Q_2) + \tfrac{1}{2} (R_1 + R_2 + R_3 + R_4),$$

avec une limite d'erreur

$$\tfrac{1}{2} (R_1 + R_2 + R_3 + R_4).$$

Et ainsi de suite.

Si l'on applique cette considération à un segment dont l'arc soit très-petit, ou ait une faible courbure, on pourra, avec une approximation suffisante, admettre que toutes les lignes de jonction des points de contact avec les milieux des cordes correspondantes, sont parallèles entre elles, et aux côtés des parallélogrammes menés par les extrémités des cordes (relation qui a lieu exactement dans la parabole). On aura de cette manière

$$Q_1 = Q_2, \quad R_1 = R_2 = R_3 = R_4, \ldots.$$

Il vient, par conséquent,

$$A > \tfrac{1}{2}(P + 2Q + 4R + \ldots + 2^{n-1}V),$$

si la construction indiquée est répétée n fois. On voit en même temps que la hauteur de Q est la moitié de celle de P, la hauteur de R la moitié de celle de Q, etc. En admettant, de plus, que les bases, dans chaque système de parallélogrammes, sont les moitiés des bases du système précédent (ce qui a rigoureusement lieu dans la parabole), on trouve

$$Q = \frac{1}{8}P, \quad R = \frac{1}{8}Q = \frac{1}{8^2}P, \ldots, \quad V = \frac{1}{8^{n-1}}P.$$

Introduisant ces valeurs dans la limite de A, on a

$$A > \frac{1}{2}P\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^{n-1}}\right),$$

avec une erreur $< \dfrac{1}{2.4^{n-1}}P$.

Pour $n = \infty$, on a

$$A = \tfrac{2}{3}P,$$

ce qui est vrai approximativement pour tous les segments dont les arcs ont leur concavité de sens constant, et qui sont très-petits ou très-peu courbes. Le résultat trouvé a lieu exactement pour la parabole (*).

(*) Cette méthode coïncide entièrement avec la première méthode d'exhaustion des anciens, et peut s'appliquer à une courbe quelconque. (*Voy.* Duhamel, *Calcul infinitésimal*, t. I.)

C'est là-dessus qu'est fondée la formule de Simpson pour la mesure d'une aire A, limitée par l'arc $M_0 M_{2n}$, la ligne droite $A_0 A_{2n}$ et les ordonnées $A_0 M_0$, $A_{2n} M_{2n}$, perpendiculaires sur $A_0 A_{2n}$. On partage $A_0 A_{2n}$ en $2n$ parties, égales chacune à h, et aux points de division A_1, $A_2, \ldots, A_{2n-1}$, on élève les ordonnées $A_1 M_1$, $A_2 M_2, \ldots$, $A_{2n-1} M_{2n-1}$. On peut maintenant calculer chacune des aires $A_0 M_0 M_1 M_2 A_2$, $A_2 M_2 M_3 M_4 A_4, \ldots$, comme sommes d'un trapèze $A_0 M_0 M_2 A_2, \ldots$ et d'un segment $M_0 M_1 M_2 \ldots$. En désignant par $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ la série des ordonnées, on a

$$\text{trapèze}\ldots \quad A_0 M_0 M_2 A_2 = h(a_0 + a_2),$$

$$\text{segment}\ldots \quad M_0 M_1 M_2 = \frac{2}{3} 2h \left(a_1 - \frac{a_0 + a_2}{2}\right),$$

le parallélogramme circonscrit au segment ayant pour hauteur $2h$, et pour base la différence entre a_1 et la médiane du trapèze. On trouve par suite

$$A_0 M_0 M_1 M_2 A_2 = \tfrac{1}{3} h (a_0 + 4a_1 + a_2),$$

et de même pour les suivants

$$\tfrac{1}{3} h (a_2 + 4a_3 + a_4),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\text{jusqu'à} \quad \tfrac{1}{3} h (a_{2n-2} + 4a_{2n-1} + a_{2n}),$$

dont la somme est (formule de Simpson)

$$A = \tfrac{1}{3} h (a_0 + 4a_1 + 2a_2 + 4a_3 + \ldots + 2a_{2n-2} + 4a_{2n-1} + a_{2n}).$$

On voit, en outre, que cette formule serait rigoureusement exacte, si les arcs appartenaient à des paraboles ayant leurs axes perpendiculaires à $A_0 A_{2n}$.

EXPOSÉ D'UNE THÉORIE (GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE) DES SECTIONS CONIQUES

(suite, voir 2e série, t. X, p. 269);

PAR M. AUGUSTE MOREL,
Ancien Élève de l'École Polytechnique, répétiteur à Sainte-Barbe.

CHAPITRE II. — DE L'HYPERBOLE.

40. L'hyperbole est une courbe telle, que la différence $MF' - MF$ des distances de l'un quelconque de ses points, M, à deux points fixes F, F' soit constante et égale à une quantité que j'appellerai $2a$. Les points F et F' sont appelés les *foyers*, et je désignerai leur distance par $2c$. Le rapport $\frac{c}{a}$ s'appelle l'*excentricité* de la courbe.

41. Construction de la courbe par points.

42. Construction de la courbe d'un mouvement continu.

43. *Théorème.* — L'hyperbole a pour centre de symétrie le point O milieu de FF', et pour axes de symétrie la droite FF' et sa perpendiculaire passant par le point O.

Observation. — La courbe ne rencontre pas le second axe de symétrie, qui prend le nom d'*axe non transverse* ou *axe imaginaire,* tandis que l'axe FF' s'appelle *axe transverse*.

44. *Théorème.* — Suivant qu'un point est ou n'est pas situé entre les deux branches de la courbe, la différence des rayons vecteurs est plus petite ou plus grande que $2a$.

45. *Théorème.* — Si d'un point M d'une hyperbole on mène la perpendiculaire MP sur l'axe focal, la somme des rayons vecteurs du point M est proportionnelle à la distance OP de cette droite au centre.

Démonstration identique à celle de l'ellipse.

46. *Théorème.* — Du point F je mène une tangente FC au cercle décrit sur l'*axe transverse* AA′ comme diamètre; la perpendiculaire CS à AA′ coupe cette ligne en un point S tel, que l'on a $OS \times OF = \overline{OA}^2$. Si d'un point P pris sur la courbe j'abaisse la perpendiculaire PM sur AA′ et que je mène MN parallèle à OC jusqu'au point de rencontre avec la droite CS, on aura $MN = FP$.

Je démontrerais, comme pour l'ellipse, que, si je prolonge la droite MN jusqu'au point N′ où elle rencontre la parallèle à CS menée par le point S′ symétrique de S par rapport au centre, on a

$$MN' - MN = F'P - FP$$

et

$$MN' + MN = F'P + FP.$$

47. *Corollaire.* — Si du point P j'abaisse une perpendiculaire PR sur la ligne CS, je démontrerai, comme pour l'ellipse, que le rapport des distances d'un point P de la courbe au point F et à la droite CS est constant et égal à l'excentricité de la courbe.

La droite CS s'appelle la *directrice* correspondant au foyer F. Il y a une seconde directrice correspondant au foyer F′ et passant par le point S′, et pour laquelle le rapport $\frac{PF}{PR'}$ est encore égal à $\frac{c}{a}$.

48. *Théorème.* — Si par le pied P de l'ordonnée d'un point T de l'hyperbole je mène une tangente au cercle décrit sur l'axe transverse comme diamètre, le rapport de l'ordonnée TP à la tangente PM est constant.

Pour le prouver, je mène par le foyer F une perpendiculaire à l'axe transverse. Cette perpendiculaire rencontre en R le rayon OM passant par le point de contact, et l'on prouve facilement que MR = FT, et que, par suite, on a

$$\overline{\text{TP}}^2 = \overline{\text{PM}}^2 \left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right),$$

ou, en posant $c^2 - a^2 = b^2$,

$$\frac{\text{TP}}{\text{PM}} = \frac{b}{a}.$$

49. *Corollaire.* — Il résulte de là que l'ordonnée d'un point de l'hyperbole détermine sur l'axe transverse deux segments soustractifs tels, que le rapport du carré de l'ordonnée au produit de ces deux segments est constant et égal à $\frac{b^2}{a^2}$.

50. *Théorème.* — La tangente à l'hyperbole bissecte l'angle des rayons vecteurs passant au point de contact.

51. *Corollaire I.* — La tangente n'a qu'un point commun avec l'hyperbole.

Corollaire II. — La normale est également inclinée sur les rayons vecteurs du pied de cette normale. Il en résulte que, si nous supposons des rayons calorifiques ou lumineux partis du point F, ils se réfléchiront en venant rencontrer la courbe, de manière que leur direction passera toujours par le point F'. C'est de là que vient le nom de *foyers*, donné aux points F, F'.

52. *Théorème.* — Le lieu des points symétriques du foyer F par rapport aux tangentes à l'hyperbole est un cercle décrit du point F' comme centre avec l'axe transverse pour rayon.

Ce cercle s'appelle le *cercle directeur* relatif au foyer F'.

On verrait facilement qu'il existe un second cercle directeur relatif au foyer F, et qui est le lieu des points symétriques du foyer F′ par rapport aux tangentes.

53. *Corollaire I.* — L'hyperbole est le lieu des points également distants d'un cercle et d'un point pris à l'extérieur du cercle.

Corollaire II. — On voit, en outre, que, si l'on joint le point F à un point quelconque H du cercle directeur relatif au foyer F′, et que l'on mène par le milieu S de FH une perpendiculaire à cette ligne FH, cette perpendiculaire est une tangente dont le point de contact est au point N où elle rencontre le rayon F′H prolongé. Mais, lorsque la ligne FH se rapproche de la tangente menée du point F au cercle directeur, le point N s'éloigne de plus en plus, et lorsque FH est tangente au cercle directeur, le point N est à l'infini. La courbe a donc des branches infinies, et la ligne SN, dans cette position limite, est dite une *asymptote* de la courbe. De plus, les lignes SN et F′H étant alors parallèles, la ligne SN passe par le milieu de FF′, ou par le centre. Donc l'asymptote à l'hyperbole est la perpendiculaire menée du centre à la tangente au cercle directeur F′ menée par l'autre foyer. Comme du point F on peut mener deux tangentes au cercle directeur F′, il en résulte que la courbe a deux asymptotes.

On pourrait aussi mener du point F′ deux tangentes au cercle directeur F; mais il est facile de voir que ces tangentes sont parallèles aux précédentes, et que, par suite, les asymptotes sont confondues. Il y a donc deux asymptotes seulement.

54. *Théorème.* — Le lieu géométrique des projections d'un foyer sur les tangentes est le cercle décrit sur l'axe transverse comme diamètre.

55. *Corollaire.* — Si OS est l'asymptote, FS est per-

pendiculaire à l'extrémité du rayon et par suite tangente au cercle AA'. Donc, si du point F on mène des tangentes au cercle décrit sur AA' comme diamètre, les rayons passant aux points de contact ne sont autres que les asymptotes; la corde de contact est la directrice correspondant au foyer F, et par suite le théorème n° 46 peut s'énoncer de la manière suivante :

Le rayon vecteur d'un point P de l'hyperbole est égal à la distance de ce point à la directrice comptée parallèlement à l'asymptote.

56. *Problème.* — Mener une tangente à l'hyperbole par un point pris sur la courbe.

57. *Problème.* — Mener une tangente à l'hyperbole par un point pris en dehors de la courbe.

58. *Corollaire.* — Le lieu géométrique des points d'où l'on peut mener deux tangentes rectangulaires est un cercle dont le centre est au point O, et dont le rayon est $\sqrt{a^2 - b^2}$. Pour que ce rayon soit réel, il faut que l'on ait $b < a$. Si $b = a$, le lieu se réduit à un point qui est le centre, et les seules tangentes que l'on puisse mener par ce point sont les asymptotes qui sont ici rectangulaires.

59. *Théorème.* — Si l'on mène d'un point M deux tangentes à l'hyperbole, et que l'on joigne le point M aux deux foyers F et F' :

1° Les deux angles F'MT' et FMT sont égaux;

2° Chacune des lignes FM et F'M est la bissectrice de l'angle des rayons vecteurs allant aux points de contact et menés d'un même foyer, ou la bissectrice du supplément de cet angle, suivant que les points de contact appartiennent à la même branche, ou à des branches différentes.

60. *Problème.* — Mener à l'hyperbole une tangente parallèle à une direction donnée.

61. *Corollaire.* — Les points de contact de deux tangentes parallèles sont symétriques par rapport au centre, et réciproquement, les tangentes en des points symétriques, par rapport au centre, sont parallèles.

62. *Théorème.* — Le produit des distances des deux foyers à une tangente est constant et égal au carré de la moitié de l'axe non transverse.

63. *Théorème.* — Si une droite rencontre l'hyperbole aux points M et N et la directrice correspondante au foyer F, en P; si l'on joint le point F aux trois points M, N, P, la ligne FP est la bissectrice de l'angle des rayons vecteurs.

Démonstration identique à celle de l'ellipse.

64. *Corollaire I.* — Une droite ne peut rencontrer une hyperbole en plus de deux points.

Corollaire II. — La tangente étant la limite de la position d'une sécante dont les deux points d'intersection situés sur une même branche se sont rapprochés indéfiniment, la ligne qui joint le foyer aux points de rencontre de la directrice et de la tangente est perpendiculaire sur le rayon vecteur du point de contact.

Corollaire III. — Si les rayons vecteurs qui passent par les points de contact de deux tangentes sont en ligne droite, les tangentes se coupent sur la directrice, et inversement.

Corollaire IV. — Les tangentes aux sommets sont perpendiculaires à l'axe.

Corollaire V. — Une parallèle à l'asymptote ne coupe la courbe qu'en un point.

65. *Problème.* — Déterminer les points de rencontre

d'une droite et d'une hyperbole donnée par ses foyers et son axe transverse.

66. *Définition.* — Étant donnés deux cercles O et O', si l'on mène deux rayons parallèles et de même sens, la ligne qui joint leurs extrémités rencontre la ligne des centres en un point fixe que l'on appelle *centre de similitude directe*. Si l'on joint les extrémités de deux rayons parallèles et de sens contraires, le point de rencontre avec la ligne des centres est fixe et s'appelle le *centre de similitude inverse*. Ces points sont ceux où les tangentes communes aux cercles rencontrent la ligne des centres. Les tangentes extérieures passent par le centre de similitude directe, et les tangentes intérieures passent par le centre de similitude inverse.

67. *Théorème.* — Lorsqu'une droite rencontre une hyperbole aux points M et N et la directrice en P, le point P est un centre de similitude des cercles ayant M et N pour centres et passant par le foyer F, correspondant à la directrice.

Démonstration identique à celle donnée pour l'ellipse.

68. *Corollaire I.* — Si la droite donnée passe par le centre, le point P est un centre de similitude commun aux deux cercles précédents et au cercle décrit sur l'axe transverse comme diamètre.

Corollaire II. — Si le point P est un centre de similitude directe, c'est-à-dire si les deux points de rencontre sont sur la même branche, on peut mener une tangente commune par ce point aux deux cercles. Lorsque la ligne MN se déplace parallèlement à elle-même, la tangente reste aussi parallèle à elle-même. En particulier, si par le centre on mène une parallèle à MN, cette parallèle ne rencontre pas la courbe. Mais la tangente menée par le point P_1, où elle rencontre la directrice au cercle dont le diamètre est AA′, est parallèle à cette tangente commune.

69. *Théorème.* — Le lieu géométrique du point milieu d'une corde de direction donnée, est une droite que l'on obtient en joignant le centre au point de rencontre de la directrice et de la perpendiculaire à la droite donnée, menée par le point F.

Nous supposerons, pour faire la démonstration, que les points M et N soient sur la même branche, ce qui ne changera rien à la généralité du théorème, et nous démontrerons, comme pour l'ellipse, en appelant C le point de rencontre de la directrice et de la perpendiculaire passant par le foyer, et *m* le milieu de la corde, que les trois points O, C, *m* sont sur une même droite.

70. *Corollaire.* — Si par le centre je mène la droite OP′ parallèle à la droite donnée et coupant en P′ la directrice, les points P′ et C sont situés du même côté de l'axe transverse.

71. *Théorème.* — Si je prolonge la corde jusqu'aux deux points où elle coupe les asymptotes, le lieu du milieu est la même ligne OC.

On le démontre facilement en menant par le point C une parallèle à MN, jusqu'aux points où elle rencontre les asymptotes, et l'on voit facilement que le point C est le milieu de cette ligne.

72. *Corollaire I.* — Les portions d'une corde comprises entre la courbe et ses asymptotes sont égales.

Corollaire II. — La portion de la tangente comprise entre les deux asymptotes est divisée en deux parties égales par le point de contact.

Corollaire III. — Nous voyons que, au lieu de chercher le lieu du milieu des cordes parallèles à une direction donnée, nous pouvons chercher le lieu des milieux des droites de même direction comprises entre les asymptotes. Donc le théorème 69 est général.

73. *Théorème.* — Lorsque, après avoir trouvé le diamètre OC correspondant à une direction OP′, nous cherchons le diamètre correspondant à la direction OC, nous retrouvons la droite OP′.

Démonstration semblable à celle de l'ellipse.

74. *Définition.* — On appelle *hyperboles conjuguées* deux hyperboles ayant même centre, même distance focale et mêmes asymptotes, mais qui ne sont pas situées dans les mêmes angles de ces asymptotes. Si l'une de ces courbes a pour axe transverse AA′, l'autre aura pour longueur d'axe transverse le double de la tangente menée du point F au cerle décrit sur AA′ comme diamètre.

Deux hyperboles conjuguées ne sont pas en général superposables : il faudrait pour cela que l'angle des asymptotes fût droit. Dans ce cas, l'hyperbole est dite *équilatère*, ou quelquefois *rectangulaire*.

75. Une hyperbole ayant les mêmes systèmes de diamètres conjugués que ses asymptotes, il en résulte que deux hyperboles conjuguées ont les mêmes systèmes de diamètres conjugués. On peut, du reste, prouver ce fait directement en montrant que si l'on effectue pour deux hyperboles conjuguées la construction relative aux diamètres correspondant à une direction donnée, les deux points de rencontre des directrices et des droites passant par les foyers sont en ligne droite avec le centre commun.

Puisque deux diamètres conjugués de l'hyperbole sont situés dans des angles adjacents des asymptotes, il en résulte que l'un d'eux rencontre l'une des courbes, et l'autre la courbe conjuguée. Nous appellerons *longueur d'un* *demi-diamètre*, la distance du centre au point où il coupe la courbe, et nous prendrons pour la longueur de son conjugué la distance du centre au point où il rencontre la courbe conjuguée.

76. Nous avons vu que, dans une hyperbole dont l'axe transverse est $2a$ et l'axe non transverse $2b$, le rapport entre l'ordonnée et la tangente menée du pied de cette ordonnée au cercle décrit sur l'axe transverse comme diamètre est égal à $\frac{b}{a}$. Si les deux axes sont égaux, auquel cas l'hyperbole est équilatère, ce rapport est égal à l'unité. Par suite, si nous supposons une hyperbole équilatère de mêmes sommets qu'une hyperbole donnée, nous voyons que le rapport entre les ordonnées correspondantes des deux courbes est égal à $\frac{b}{a}$, propriété analogue à une propriété déjà indiquée dans l'ellipse.

Dans une hyperbole équilatère, les diamètres conjugués sont également inclinés sur l'asymptote. Pour le prouver, on remarque que, dans deux hyperboles conjuguées quelconques, les axes et deux diamètres conjugués interceptent sur les directrices des longueurs égales, et l'on en déduit facilement la propriété énoncée. Il est facile, en outre, de voir que ces diamètres sont égaux.

77. On dit que deux courbes sont *homothétiques* lorsque l'on peut trouver un point o tel que si l'on mène par ce point une droite quelconque, qui rencontre en a et en a' les deux courbes, l'on ait $\frac{oa}{oa'} =$ const. Dans ce cas, les tangentes aux points a et a' sont parallèles, et réciproquement si deux courbes sont telles que, pour deux points correspondants a et a' situés sur une même droite, passant par un point fixe o, les tangentes soient parallèles,

les deux courbes sont homothétiques, et le rapport $\frac{oa}{oa'}$ est constant.

Il résulte de là que deux hyperboles qui ont même centre et mêmes asymptotes sont homothétiques.

78. *Théorème.* — Si l'on projette un diamètre réel d'une hyperbole sur son axe transverse $2a$, et le diamètre conjugué sur l'axe non tranverse $2b$, le rapport de la projection du premier diamètre à la projection du second est constant et égal à $\frac{a}{b}$.

En effet, prenons une hyperbole équilatère ayant mêmes sommets que l'hyperbole donnée, et prenons le diamètre correspondant au diamètre a'. Soient a'_1 ce diamètre et b'_1 son conjugué. Les longueurs a'_1 et b'_1 seront égales. Si dans l'angle adjacent des asymptotes de cette hyperbole équilatère, nous prenons une seconde hyperbole équilatère dont l'axe transverse soit $2b$, le diamètre de même direction que b'_1 aura pour longueur $b'_1 \times \frac{b}{a}$, et ce diamètre aura même projection que le diamètre b' de l'hyperbole proposée. Donc, en appelant α et β les deux projections, on aura $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a}{b}$.

79. *Corollaire I.* — Si je projette le demi-diamètre b' sur l'axe transverse, sa projection est égale à la longueur de la tangente menée du point de projection de l'extrémité du diamètre a' au cercle décrit sur AA' comme diamètre.

Corollaire II. — Il en résulte aussi que la différence des carrés des projections de deux diamètres conjugués sur un axe est constante et égale au carré de cet axe.

80. *Théorème.* — La différence des carrés de deux

diamètres conjugués est constante et égale à la différence des carrés des axes.

Ce théorème est une conséquence immédiate des deux corollaires précédents.

81. *Théorème.* — La portion de la tangente comprise entre le point de contact et une asymptote est égale au demi-diamètre parallèle.

Pour le prouver, on remarque que le point où la parallalèle à l'asymptote menée par le point de contact coupe l'axe transverse est la projection du point de rencontre de la tangente et de l'autre asymptote, et l'on en déduit facilement que la tangente et le demi-diamètre parallèle ont même projection sur l'axe transverse.

82. *Corollaire.* — Si sur deux diamètres conjugués de l'hyperbole on construit un parallélogramme, ses sommets sont sur les asymptotes.

83. *Théorème.* — Si par un point M de l'hyperbole on mène une perpendiculaire à l'axe focal, perpendiculaire qui coupe en N et N' les asymptotes, le produit $MN \times MN'$ est constant et égal à b^2.

Ce théorème se démontre facilement en remarquant que le produit considéré est égal à la différence des carrés des ordonnées de la courbe et de son asymptote.

84. *Problème.* — Trouver les axes d'une hyperbole dont on connaît les asymptotes et un point.

On peut toujours ramener ce problème à celui de la construction d'une hyperbole dont on connaît deux diamètres conjugués.

Les axes ont pour directions les bissectrices des angles des asymptotes, et l'on obtiendra facilement l'axe non transverse, en s'appuyant sur le théorème précédent.

85. *Théorème.* — Si d'un point M de l'hyperbole on

mène des parallèles MN, MP aux asymptotes jusqu'aux points N, P, où chacune d'elles coupe l'asymptote, le produit $MN \times MP$ est constant.

Pour le prouver, je mène par le point M la perpendiculaire à l'axe transverse jusqu'aux points de rencontre avec les asymptotes. Les triangles isoscèles que l'on forme ainsi permettent de démontrer le théorème.

Le produit considéré a pour valeur $\frac{a^2 + b^2}{4}$.

86. *Théorème.* — Le parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués a une aire constante.

Pour le prouver, il suffit de montrer que le triangle formé par une tangente et les deux asymptotes a une aire constante, ou bien que si l'on mène par le point de contact des parallèles aux asymptotes, ces parallèles et les asymptotes forment un parallélogramme de surface constante, ce qui résulte évidemment du théorème précédent.

87. *Théorème.* — Si par un point M de l'hyperbole on mène une corde parallèle à un diamètre $2b'$ et coupant en Q et R les asymptotes, le produit $QM \times RM$ est égal au carré du demi-diamètre b'.

Pour le prouver, je considère le point M' où le diamètre conjugué de la direction donnée coupe la courbe, et par ce point je mène les parallèles $M'N'$, $M'P'$ aux asymptotes, et la ligne $N'P'$ qui est, comme il est facile de le voir, égale et parallèle au demi-diamètre b'.

La considération des triangles QNM, $N'M'P'$ d'une part, et des triangles MPR et $N'M'P'$ d'autre part, permet d'en déduire la démonstration du théorème.

(*La suite prochainement.*)

NOTE RELATIVE A LA COURBURE EN UN POINT DE REBROUSSEMENT;

Par UN ABONNÉ.

L'expression du rayon de courbure étant

$$\rho = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

si l'on prend pour axe des x la tangente au point considéré, cette expression devient

$$\rho = \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Prenant en outre ce point pour origine des coordonnées, le changement de x et de y en $x+h$ et $y+k$ conduit à l'équation

$$k = \frac{h^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 + \frac{h^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0 + \ldots,$$

en désignant par $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \ldots$ ce que deviennent les dérivées pour $x=0$, $y=0$, c'est-à-dire pour les valeurs des coordonnées du point pris pour origine.

De l'équation précédente, on tire

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 = \lim \frac{2k}{h^2},$$

et, par conséquent,

$$\rho = \frac{1}{2} \lim \frac{h^2}{k}.$$

Cette formule va nous servir à résoudre la question que nous avons en vue.

Soit $u = 0$, l'équation d'une courbe présentant un point singulier. Ce point étant pris pour origine et la tangente étant prise pour axe des x, on aura, d'après un théorème connu et d'après la notation adoptée,

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{du}{dy}\right)_0 = 0;$$

et aussi

$$t = \lim \frac{k}{h} = 0.$$

Le changement de x, y en $x + h$, $y + k$ dans l'équation de la courbe donne

$$\begin{aligned} 0 = \frac{1}{1.2}\left[h^2\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_0 + 2hk\left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)_0 + k^2\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)_0\right] \\ + \frac{1}{1.2.3}\left[h^3\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)_0 + 3h^2k\left(\frac{d^3u}{dx^2dy}\right)_0 + 3hk^2\left(\frac{d^3u}{dx\,dy^2}\right)_0\right. \\ \left. + k^3\left(\frac{d^3u}{dy^3}\right)_0\right] + \ldots \end{aligned}$$

Dans le cas où le point singulier est un point de rebroussement, et où la tangente en ce point est prise pour axe des x, l'équation

$$(1) \qquad \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_0 + 2t\left(\frac{d^2u}{dy\,dx}\right)_0 + t^2\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)_0 = 0$$

admet la racine double $t = 0$, ce qui exige que l'on ait

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)_0 = 0.$$

Mais quand le rebroussement est de première espèce, la valeur $t = 0$ ne satisfait pas à l'équation

$$(2)\quad \left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)_0 + 3t\left(\frac{d^3u}{dx^2dy}\right)_0 + 3t^2\left(\frac{d^3u}{dxdy^2}\right)_0 + t^3\left(\frac{d^3u}{dy^3}\right)_0 = 0,$$

et, par conséquent, $\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)_0$ n'est pas nul.

D'après cela, la valeur de $\lim \frac{h^2}{k}$ sera fournie par l'équation

$$\frac{k^2}{1.2}\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)_0 + \frac{h^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)_0 = 0,$$

que l'on peut écrire

$$\frac{1}{3}\frac{h^4}{k^2}\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)_0 + h\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)_0 = 0,$$

et, puisque $h = 0$ à la limite, et que $\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)_0$ est différent de 0, il faut que $\frac{h^2}{k} = 0$.

Donc, *en un point de rebroussement de première espèce, le rayon de courbure est nul.*

Si le rebroussement est de seconde espèce, la valeur $t = 0$ est non-seulement racine double de l'équation (1), mais elle satisfait aussi à l'équation (2), ce qui entraîne $\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)_0 = 0$; et alors la valeur de $\lim \frac{h^2}{k}$ sera fournie par l'équation

$$\frac{1}{2}k^2\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)_0 + \frac{1}{1.2.3}h^2k\left(\frac{d^3u}{dx^2dy}\right)_0 = 0,$$

ou bien

$$\frac{1}{3}\frac{h^2}{k}\left(\frac{d^3u}{dx^2dy}\right)_0 + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)_0 = 0.$$

La valeur de $\lim \frac{h^2}{k}$ tirée de cette équation ne présente rien de particulier.

Donc, *en un point de rebroussement de deuxième espèce, le rayon de courbure peut avoir une valeur quelconque.*

On vérifiera facilement les assertions relatives aux deux espèces de rebroussement, en se reportant à la courbe

$$y = \varphi(x) \pm (x - b)^{\frac{p}{q}} \psi(x)$$

qui est discutée dans tous les Traités de calcul différentiel.

QUESTION DE LICENCE (*)

(session du 4 juillet 1870);

PAR M. MORET-BLANC,
Professeur au lycée du Havre.

Trouver l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 2\frac{d^2y}{dx^2} + y = Ae^x + Be^{-x} + C\sin x + D\cos x;$$

A, B, C, D *sont des constantes.*

J'intègre d'abord l'équation privée de second membre

$$(a) \qquad \frac{d^4y}{dx^4} - 2\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$$

Si l'on pose $y = e^{rx}$, on aura

$$r^4 - 2r^2 + 1 = (r^2 - 1)^2 = 0.$$

Cette équation a deux racines doubles $+1$ et -1.

(*) *Voir* une première solution, même tome, page 111.

L'intégrale générale de l'équation (a) est donc

$$y = (M + Px)e^x + (N + Qx)e^{-x},$$

M, N, P, Q désignant quatre constantes arbitraires.

En ajoutant à cette intégrale une intégrale particulière de l'équation proposée, on aura l'intégrale générale de celle-ci. Le second membre de la proposée ne renfermant que des exponentielles et des sinus et cosinus, qui se reproduisent dans les différentiations successives, l'équation admet une intégrale de même forme.

Je pose donc, en remarquant que les termes en e^x, e^{-x}, xe^x, xe^{-x} se détruiraient dans l'équation différentielle, en vertu de l'intégrale de l'équation (a),

$$y_1 = Gx^2e^x + Hx^2e^{-x} + K\sin x + L\cos x;$$

d'où

$$\frac{d^4y_1}{dx^4} - 2\frac{d^2y_1}{dx^2} + y_1 = 8Ge^x + 8He^{-x} + 4K\sin x + 4L\cos x.$$

Identifiant le second membre avec celui de l'équation proposée, on en déduit

$$G = \frac{A}{8},\quad H = \frac{B}{8},\quad K = \frac{C}{4},\quad L = \frac{D}{4}.$$

L'intégrale générale cherchée est donc

$$y = \left(M + Px + \frac{A}{8}x^2\right)e^x + \left(N + Qx + \frac{B}{8}x^2\right)e^{-x}$$
$$+ \frac{C}{4}\sin x + \frac{D}{4}\cos x;$$

car elle satisfait à l'équation différentielle proposée, et renferme quatre constantes arbitraires.

Remarque. — Cette méthode pour l'intégration des équations linéaires à coefficients constants pourvues de second membre peut s'appliquer toutes les fois que ce second membre ne renferme que des termes qui peuvent provenir par différentiation des termes de même forme : tels sont les monômes algébriques, les exponentielles, les sinus et cosinus.

Note. — La même question a été résolue par M. Charve.

PROBLÈME D'ALGÈBRE.

Trouver les valeurs entières générales de x, y, z telles, que les quantités $xy - 1$, $yz - 1$, $zx - 1$ soient simultanément des carrés. (A. Martin.)

Solution de M. S. Bills.

Soit

$$xy - 1 = p^2,$$

alors

$$x = \frac{p^2 + 1}{y};$$

et si nous posons

$$z = x + y \pm 2p,$$

nous aurons, en remplaçant z par cette valeur,

$$xz - 1 = x^2 + xy \pm 2px - 1 = x^2 + p^2 \pm 2px = (x \pm p)^2,$$

$$yz - 1 = yx + y^2 \pm 2py - 1 = y^2 + p^2 \pm 2py = (y \pm p)^2.$$

Ces valeurs satisfont donc aux conditions proposées.

Pour trouver des valeurs entières, il suffit de prendre pour y un diviseur de $p^2 + 1$; chaque valeur que l'on donne à p donne deux valeurs pour z.

Exemples :

$p = 1$,	$y = 1$,	$x = 2$,	$z = 5$	ou	1,
$p = 2$,	$y = 1$,	$x = 5$,	$z = 2$	ou	10,
$p = 3$,	$y = 2$,	$x = 5$,	$z = 1$	ou	13,
$p = 4$,	$y = 5$,	$x = 10$,	$z = 1$	ou	29.

(Extrait de *The Educational Times.*)

EXERCICES POUR LA LICENCE

(suite, voir même tome, p. 284);

PAR M. W. H. BESANT,
du collége de Saint-Jean à Cambridge.

14. Si une courbe roule sur une droite, l'aire comprise entre la roulette, la droite fixe et deux ordonnées, est double de l'aire correspondante de la podaire.

15. Trouver l'aire engendrée par la normale passant au point de contact.

16. Une courbe roule sur une autre; trouver l'aire engendrée par la normale passant au point de contact.

17. Trouver le lieu du centre de courbure du point de contact d'une courbe roulant sur une droite fixe.

18. Une courbe roule sur une ligne droite; trouver l'enveloppe d'une droite entraînée dans son mouvement.

19. *Exemple.* — Trouver l'enveloppe d'un diamètre d'un cercle roulant sur une droite.

Une parabole roule sur une droite; trouver l'enveloppe de son paramètre.

20. Une courbe roule sur une courbe donnée; trouver la roulette enveloppée par une droite entraînée avec la courbe.

21. *Exemple.* — Un cercle roule extérieurement sur un cercle; trouver la longueur de la courbe enveloppée par un diamètre.

22. Une courbe roule sur une courbe égale, les points correspondants coïncident; trouver l'enveloppe d'une normale de la courbe mobile.

23. Une courbe roule sur une courbe fixe; on demande de trouver l'enveloppe d'une courbe qu'elle entraîne.

24. *Exemple.* — Une droite roule sur un cercle fixe, entraînant un cercle égal avec lequel il est en contact.

25. Une courbe roule sur une droite; trouver l'aire comprise entre la droite, l'enveloppe d'une droite entraînée et deux normales à l'enveloppe.

26. Même question en remplaçant la droite fixe par une courbe fixe, et la droite mobile par une courbe.

27. *Exemples.* — Une cycloïde roule sur une droite; on demande la roulette enveloppée par la tangente au sommet.

Un cercle roule sur un cercle égal et entraîne une tangente; on demande de déterminer la nature de la roulette produite par la tangente.

II. — *Glissettes.*

28. *Définition* — Les glissettes sont les courbes engendrées par des points ou enveloppées par des lignes, entraînées par une ligne glissant entredes points ou des lignes donnés.

Ainsi : si une ellipse glisse sur deux droites rectangulaires, la glissette tracée par son centre est un arc de cercle; si une droite de longueur constante glisse sur deux droites rectangulaires, la glissette d'un de ses points est une ellipse.

29. Une courbe glisse sur deux droites rectangulaires; trouver la glissette d'un point qu'elle entraîne.

30. Une ellipse glisse sur deux droites faisant entre elles un angle $(\pi - \alpha)$; trouver le lieu du centre.

31. Le théorème suivant est très-important : Un état de mouvement d'une figure plane peut être considéré comme une rotation autour d'un point.

32. Tout mouvement d'une figure plane peut être représenté par le roulement d'une courbe déterminée sur une autre courbe déterminée.

33. *Exemple.* — Une droite AB glisse entre deux droites à angle droit.

Deux droites comprenant un certain angle passent toujours par deux points fixes.

Une développante de cercle glisse sur deux droites rectangulaires.

34. Une courbe donnée glisse sur deux droites rectangulaires; trouver, par rapport à ces droites, le lieu du centre instantané de rotation.

35. Trouver la courbure du lieu engendré par un point.

36. Trouver la courbure du lieu enveloppé par une droite.

37. Trouver la courbure de l'enveloppe d'une courbe.

38. Un triangle se meut dans un plan de telle sorte que deux côtés glissent sur des courbes données; trouver l'enveloppe du troisième côté.

39. *Exemples.* — Un triangle se meut de manière que deux côtés touchent deux cercles fixes.

Un triangle rectangle isoscèle se meut de manière que ses côtés égaux glissent sur l'axe d'une cycloïde.

40. Deux lignes droites inclinées d'un angle λ et entraînant une ligne droite glissent sur des courbes fixes; trouver l'enveloppe de cette droite.

III. — *Exercices.*

1. Si un cercle roule intérieurement sur un cercle de rayon double, le lieu d'un point de la circonférence est une droite, et le lieu d'un point non situé sur la circonférence est une ellipse.

2. La roulette, sur une ligne droite, du pôle d'une épicycloïde est une ellipse.

3. Prouver que l'équation en termes finis de la car-

dioïde est de la forme

$$s = c\left(1 - \cos\frac{\varphi}{3}\right),$$

et qu'elle est l'épicycloïde due au roulement d'un cercle avec contact interne, sur un cercle fixe de diamètre moitié.

4. Une parabole glisse sur deux droites rectangulaires; prouver que son sommet et son foyer décrivent respectivement les courbes

$$x^2y^2(x^2+y^2+3a^2) = a^6 \quad \text{et} \quad x^2y^2 = a^2(x^2+y^2).$$

5. La roulette, sur un cercle, du pôle d'une spirale équiangulaire est la développante d'un autre cercle.

6. L'enveloppe de la ligne pédale d'un triangle est une hypocycloïde à trois sommets, ayant pour centre le centre du cercle des neuf points. — La ligne pédale d'un triangle est la ligne joignant les pieds des perpendiculaires abaissées sur les côtés par un point du cercle circonscrit.

(*La suite prochainement.*)

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 862

(voir 2e série, t. VII, p. 191);

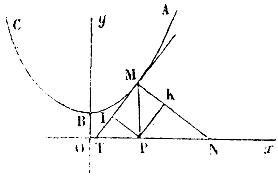
PAR M. ALFRED GIARD,
Élève de l'École Normale supérieure.

Lorsqu'une chaînette roule sur une droite, une droite quelconque de son plan enveloppe une développante de parabole. (A. RIBAUCOUR.)

Rappelons d'abord les propriétés remarquables de la chaînette. Si l'on suppose la courbe rapportée aux axes Ox, Oy, son équation est (*)

$$y = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right).$$

1° La longueur de la normale MN est égale au rayon de courbure;



2° La projection MI de l'ordonnée du point de contact sur la tangente est égale à l'arc BM qui va du sommet de la courbe à ce point;

3° La projection MK de la même ordonnée sur la normale est constante et égale à h; de sorte que, dans le roulement de la chaînette sur la droite MI, la droite Tx passe constamment par le point P.

Quand une courbe S roule sur une courbe S′, une courbe u, invariablement liée à S, enveloppe une certaine courbe u'. Soient r et r' les rayons de courbure de la courbe mobile et de la courbe fixe; ρ et ρ' les rayons de courbure de l'enveloppe et de l'enveloppée, n la partie de la normale à l'enveloppe comprise entre cette courbe et la courbe fixe; on a la relation bien connue

$$(1) \qquad \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \cos\varphi\left(\frac{1}{\rho - n} + \frac{1}{\rho' + n}\right),$$

(*) STURM, *Cours de Mécanique*, t. II, p. 50.

φ étant l'angle de la normale à l'enveloppe avec la normale commune aux deux courbes S et S'.

Considérons l'axe Oy de la chaînette; la normale à l'enveloppe de cette droite passe par le point M, centre instantané de rotation. Dans le cas qui nous occupe, r' et ρ' sont infinis; donc la relation (1) devient

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos\varphi}{\rho - n}.$$

Si, du point N, on abaisse NQ perpendiculaire sur la parallèle à Ox menée par le point M, le point de rencontre Q de cette perpendiculaire avec la normale à l'enveloppe est le centre de courbure de cette courbe, car on a bien

$$QM = r\cos\varphi = \rho - n.$$

Cela posé, je dis que le lieu du point Q, c'est-à-dire la développée de l'enveloppe, est une parabole.

En effet, la figure QMPN est un rectangle, donc l'angle NMQ est égal à l'angle PQM, donc la développée est une courbe telle que sa tangente QM fait des angles égaux avec la droite QP qui joint le point de contact au point fixe P, et avec la droite MN parallèle à une direction fixe. Cette développée est donc une parabole, et, par suite, l'enveloppe de Oy est une développante de parabole.

La parabole lieu du point Q a pour foyer le point P.

La tangente au sommet est la droite IM, puisque le point M, projection du foyer sur la tangente MQ, est sur IM.

Il est évident que toute droite du plan liée à la chaînette fera avec Oy un angle constant, et par suite enveloppera une courbe qu'on pourra amener, par un déplacement dans le plan, à coïncider avec l'une des homothétiques de la développante de parabole enveloppe de Oy.

Note. — La même question a aussi été résolue par MM. Lemaître, maître-répétiteur au lycée de Besançon; Brocard et Grassat, sous-lieutenants du Génie; G. Coridas, à Pau.

Question 950

(voir 2e série, t. VIII, p. 335);

Par M. O. CALLAUDREAU.

Démontrer que le produit des deux séries

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+2}\,\frac{1}{2}x+\frac{1}{a+4}\,\frac{1.3}{2.4}x^2+\frac{1}{a+6}\,\frac{1.3.5}{2.4.6}x^3+\ldots,$$

$$1+\frac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}x^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^3+\ldots$$

est

$$\frac{1}{a}\left[1+\frac{a+1}{a+2}x+\frac{(a+1)(a+3)}{(a+2)(a+4)}x^2 + \frac{(a+1)(a+3)(a+5)}{(a+2)(a+4)(a+6)}x^3+\ldots\right].$$

(Hermite.)

Pour résoudre cette question, je décomposerai en fractions rationnelles le coefficient du terme en x^n

$$\frac{(a+1)(a+3)\ldots(a+2n-1)}{a(a+2)(a+4)\ldots(a+2n)}=\frac{\varphi(a)}{\psi(a)},$$

et je démontrerai qu'il est égal au coefficient de x^n dans le produit des deux premières séries, produit obtenu algébriquement.

Pour décomposer cette fraction, je cherche ce que devient $\dfrac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$ lorsque $a=-2m$.

Pour cette valeur de a, $\varphi(a)$ est égal à

$$(2m-1)(2m-3)(2m-5)\ldots(-1)^m 1.3\ldots[2(n-m)-1].$$

Pour cette même valeur de a, $\psi'(a)$ est égal à

$$(-2m)[-(2m-2)]\ldots(-2)(+2)\ldots[2(n-m)],$$

produit qui renferme m termes négatifs.

Donc

$$\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}=\frac{(2m-1)(2m-3)\ldots1.1.3.\ \ldots[2(n-m)-1]}{2m(2m-2)\ldots2.2.4.6\ldots2(n-m)}.$$

Donc

$$\frac{\varphi(a)}{\psi(a)}=\frac{1}{a}\,\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}+\frac{1}{a+2}\,\frac{1.3.5\ldots[2(n-1)-1]}{2.4.6\ldots2(n-1)}\,\frac{1}{2}$$
$$+\ldots+\frac{1}{a+2n}\,\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}.$$

Or, si l'on fait algébriquement le produit des deux premières séries, on obtient précisément ce même développement pour coefficient de x^n.

Note. — La même question a été résolue aussi par M. H. Brocard, lieutenant du Génie.

Questions 981 *et* 1017 (*)

(voir 2e série, t. IX, p. 92);

PAR M. MORET-BLANC,
Professeur au lycée du Havre.

On coupe une surface du second degré par un plan; aux différents points de l'intersection, on mène les

---

(*) La question 1017 (nº de mars 1871) a été proposée en février 1870, sous le nº 981.

normales à la surface; par un point de l'espace, on mène des droites égales et parallèles aux longueurs interceptées sur ces normales entre leurs pieds sur la surface et le plan de symétrie. Les extrémités de toutes ces droites se trouvent sur une conique.

(E. LAGUERRE.)

Je suppose d'abord que la surface ait un centre. Soient

$$(1) \qquad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 = H,$$

$$(2) \qquad lx + my + nz + p = 0,$$

les équations de la surface et du plan.

Celles d'une normale au point (x, y, z) seront

$$(3) \qquad \frac{X - x}{Ax} = \frac{Y - y}{A'y} = \frac{Z - z}{A''z},$$

et, pour $Z = 0$, on aura

$$X - x = -\frac{A}{A''}x, \quad Y - y = -\frac{A'}{A''}y.$$

Or, si de l'origine des coordonnées on mène une droite égale et parallèle à cette normale (dirigée de la surface vers le plan de symétrie $Z = 0$), $X - x$, $Y - y$ et $Z - z$ seront précisément les coordonnées de son extrémité; on aura donc, en représentant ces coordonnées par ξ, η, ζ,

$$(4) \qquad \xi = -\frac{A}{A''}x, \quad \eta = -\frac{A'}{A''}y, \quad \zeta = -z.$$

On aura le lieu de ces extrémités en éliminant x, y, z entre les équations (1), (2) et (4).

Des dernières on tire

$$x = -\frac{A''}{A}\xi, \quad y = -\frac{A''}{A'}\eta, \quad z = -\zeta.$$

En reportant ces valeurs dans (1) et (2), et mettant x,

y, z au lieu de ξ, η, ζ, on a

$$(5)\qquad \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{A'} + \frac{z^2}{A''} = \frac{H}{A''^2},$$

$$(6)\qquad \frac{l}{A}x + \frac{m}{A'}y + \frac{n}{A''}z - \frac{p}{A''} = 0.$$

Le lieu est donc l'intersection d'une surface du second degré par un plan, et, par conséquent, une conique.

Si la surface est un paraboloïde, soit

$$(7)\qquad Ay^2 + A'z^2 = 2Bx$$

son équation, celle du plan étant

$$(8)\qquad lx + my + nz + p = 0;$$

les équations d'une normale seront

$$(9)\qquad \frac{X - x}{-B} = \frac{Y - y}{Ay} = \frac{Z - z}{A'z}.$$

Pour $Z = 0$, on aura

$$X - x = \frac{B}{A'},\quad Y - y = -\frac{A}{A'}y;$$

par suite,

$$(10)\qquad \xi = \frac{B}{A'},$$

d'où

$$(11)\qquad \begin{cases} \eta = -\dfrac{A}{A'}y, & \zeta = -z, \\ y = -\dfrac{A'}{A}\eta, & z = -\zeta. \end{cases}$$

Éliminant x, y, z entre les équations (7), (8), (11), et mettant x, y, z au lieu de ξ, η, ζ, on a

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{B}{A'},\\ \frac{y^2}{A} + \frac{z^2}{A'} &= \frac{2B}{A'}\left(\frac{m}{l}\frac{y}{A} + \frac{n}{l}\frac{z}{A'} - \frac{p}{A'}\right). \end{aligned}\right.$$

Le lieu est encore l'intersection d'une surface du second degré par un plan perpendiculaire à l'axe du paraboloïde donné.

On peut remarquer que les lieux trouvés sont des sections faites dans des surfaces de même genre que les surfaces données.

Question 998

(voir 2e série, t. IX, p. 384);

PAR M. C. LADURON.

Les points de rencontre des hauteurs des triangles isoscèles formés par quatre tangentes quelconques à une circonférence et par les cordes de contact sont les sommets d'un quadrilatère homothétique à celui qui a pour sommets les milieux des cordes de contact. Le centre de similitude est le centre de la circonférence, et le rapport de similitude est 2. (H. BROCARD.)

Soient SA, SB deux tangentes au cercle de centre O; AB la corde de contact; SM et AN deux des hauteurs du triangle SAB, et H leur point de rencontre.

Le point M étant le milieu de la corde AB, la hauteur SM prolongée passe par le centre O du cercle.

La proposition énoncée se réduit donc à ceci : que la distance OH est double de OM.

Or, les triangles rectangles HAM, BAN ont deux angles égaux chacun à chacun, d'où il résulte que l'angle AHM est égal à l'angle ABN ; d'ailleurs, l'angle au centre AOM, ayant même mesure que l'angle ABN, lui est égal. Donc $\widehat{AHM} = \widehat{AOM}$, le triangle HAO est isoscèle, et $HM = MO$. C. Q. F. D.

Remarque. — De la réduction précédente de la question, il appert que la propriété à démontrer pourrait être énoncée d'une manière plus générale, puisqu'elle est indépendante du nombre des tangentes considérées.

Note. — La même question a été résolue par M. Lez.

QUESTIONS.

1030. Étant pris trois diamètres conjugués d'une surface du second degré, si l'on projette chacun d'eux sur une droite perpendiculaire au plan des deux autres, la somme des valeurs inverses des carrés de ces projections est constante. (H. FAURE.)

1031. Trouver la condition pour que les deux plus courtes distances entre les côtés opposés d'un quadrilatère gauche se coupent. (A. M.)

1031. Un angle de grandeur constante se déplace dans un plan, de manière que le sommet décrive un cercle de rayon donné, et que l'un des côtés passe par un point fixe : on demande l'enveloppe de l'autre côté.

(C. HARKEMA.)

1032. Trouver trois nombres entiers en progression géométrique, tels que chacun d'eux, augmenté d'une unité, donne un carré. (A. MARTIN.)

1033. On donne un cylindre droit à base circulaire et une hélice tracée sur ce cylindre : trouver la longueur d'un arc d'hélice tel que les tangentes menées à ses extrémités se rencontrent. (J.-Ch. DUPAIN.)

1034. On prend sur une surface du second degré une section plane quelconque; cette courbe peut être prise pour la focale d'une surface nouvelle passant par l'une ou l'autre des focales de la première.

(G. DARBOUX.)

1035. Il y a la même relation entre les tangentes menées d'un point de l'ellipsoïde à trois sphères doublement tangentes à l'ellipsoïde, qu'entre les distances d'un point variable dans un plan à trois points de ce plan.

(G. DARBOUX.)

1036. On donne le centre d'une ellipse, un point de la courbe et le centre du cercle osculateur en ce point, déterminer les axes de l'ellipse.

1037. On donne, en position, l'axe focal d'une ellipse, un point de la courbe et le centre du cercle osculateur en ce point; déterminer les axes de l'ellipse.

1038. Étant donnés en grandeur les quatre côtés d'un quadrilatère plan, et la droite qui unit les milieux de deux côtés opposés, trouver l'aire du quadrilatère en fonction de ces cinq droites. Discussion du problème.

LIEU DES SOMMETS DES TRIÈDRES TRIRECTANGLES DONT LES COTÉS SONT NORMAUX A UNE SURFACE DU SECOND ORDRE;

PAR M. PAINVIN,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Lyon.

1. Cette question, qu'on s'est posée souvent, n'a jamais été résolue, que je sache; en voici une solution.

Prenons pour exemple un ellipsoïde que nous rapporterons à ses plans principaux; si x, y, z sont les coordonnées d'un point du lieu, et que x_1, y_1, z_1 soient les coordonnées du pied d'une des normales, on a

$$\frac{x-x_1}{\frac{x_1}{a^2}} = \frac{y-y_1}{\frac{y_1}{b^2}} = \frac{z-z_1}{\frac{z_1}{c^2}} = \lambda, \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} - 1 = 0;$$

on déduit des relations qui précèdent

$$(1^\circ) \qquad x_1 = \frac{a^2 x}{\lambda + a^2}, \quad y_1 = \frac{b^2 y}{\lambda + b^2}, \quad z_1 = \frac{c^2 z}{\lambda + c^2},$$

puis

$$(1) \qquad \frac{a^2 x^2}{(\lambda + a^2)^2} + \frac{b^2 y^2}{(\lambda + b^2)^2} + \frac{c^2 z^2}{(\lambda + c^2)^2} - 1 = 0.$$

L'équation (1), du sixième degré en λ, détermine six valeurs de λ, et les équations (1°) donnent les coordonnées des pieds des six normales correspondantes; d'ailleurs les cosinus des angles, avec les axes de coordonnées, d'une normale en (x_1, y_1, z_1) sont proportionnels à

$$\frac{x_1}{a^2}, \quad \frac{y_1}{b^2}, \quad \frac{z_1}{c^2},$$

et par suite à

$$\frac{x}{\lambda+a^2},\quad \frac{y}{\lambda+b^2},\quad \frac{z}{\lambda+c^2}.$$

D'après cela, si λ_1, λ_2, λ_3 sont trois des racines de l'équation (1), et si nous écrivons que les normales correspondantes sont perpendiculaires entre elles, on a les trois équations de condition

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{x^2}{(\lambda_2+a^2)(\lambda_3+a^2)}+\frac{y^2}{(\lambda_2+b^2)(\lambda_3+b^2)}+\frac{z^2}{(\lambda_2+c^2)(\lambda_3+c^2)}=0,\\
&\frac{x^2}{(\lambda_3+a^2)(\lambda_1+a^2)}+\frac{y^2}{(\lambda_3+b^2)(\lambda_1+b^2)}+\frac{z^2}{(\lambda_3+c^2)(\lambda_1+c^2)}=0,\\
&\frac{x^2}{(\lambda_1+a^2)(\lambda_2+a^2)}+\frac{y^2}{(\lambda_1+b^2)(\lambda_2+b^2)}+\frac{z^2}{(\lambda_1+c^2)(\lambda_2+c^2)}=0.
\end{aligned}\right.$$

Si les équations (2) étaient distinctes, elles détermineraient λ_1, λ_2, λ_3; et, en écrivant que le premier membre de l'équation (1), rendue entière, est divisible par le produit $(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)$, on aurait trois relations entre x, y, z; il en résulterait alors qu'il n'y a qu'un nombre limité de points satisfaisant aux conditions imposées.

Mais nous allons voir que les équations (2) ne déterminent pas λ_1, λ_2, λ_3; elles sont seulement équivalentes à deux relations distinctes entre les fonctions symétriques

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\quad \lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2,\quad \lambda_1\lambda_2\lambda_3;$$

par conséquent, le lieu cherché sera une courbe gauche.

On peut s'expliquer ce fait en se rappelant que les six normales menées d'un point à une surface du second ordre sont sur un cône du second degré jouissant de la propriété d'avoir une infinité de systèmes de trois génératrices rectangulaires.

2. Pour effectuer le calcul dont je viens d'indiquer le

point de départ, j'adopterai les notations suivantes :

$$
\text{(I)}\quad \left\{\begin{aligned}
A &= x^2 + y^2 + z^2,\\
B &= (b^2+c^2)x^2 + (c^2+a^2)y^2 + (a^2+b^2)z^2,\\
C &= b^2c^2x^2 + c^2a^2y^2 + a^2b^2z^2;
\end{aligned}\right.
$$

$$
\text{(II)}\quad \left\{\begin{aligned}
m &= a^2 + b^2 + c^2,\\
n &= b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2,\\
p &= a^2b^2c^2;
\end{aligned}\right.
$$

puis, comme notations auxiliaires :

$$
\text{(III)}\quad \left\{\begin{aligned}
B' &= mA - B = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2,\\
C' &= nA - C = a^2(b^2+c^2)x^2 + b^2(c^2+a^2)y^2\\
&\qquad + c^2(a^2+b^2)z^2,\\
D' &= pA + nB - mC = a^2(b^2+c^2)^2x^2 + b^2(c^2+a^2)^2y^2\\
&\qquad + c^2(a^2+b^2)^2z^2;
\end{aligned}\right.
$$

$$
\text{(IV)}\quad \left\{\begin{aligned}
C'' &= -nA + mB + C = (b^2+c^2)^2x^2 + (c^2+a^2)^2y^2\\
&\qquad + (a^2+b^2)^2z^2,\\
D'' &= -pA + mC = b^2c^2(b^2+c^2)x^2 + c^2a^2(c^2+a^2)y^2\\
&\qquad + a^2b^2(a^2+b^2)z^2,\\
E'' &= -pB + nC = b^4c^4x^2 + c^4a^4y^2 + a^4b^4z^2.
\end{aligned}\right.
$$

Ceci posé, les équations (2) s'écriront, après avoir chassé les dénominateurs et eu égard aux relations (I), (II), (III), (IV) :

$$
(3)\quad \left\{\begin{aligned}
&A\lambda_2^2\lambda_3^2 + B\lambda_2\lambda_3(\lambda_2+\lambda_3) + C(\lambda_2^2+\lambda_3^2)\\
&\qquad + C''\lambda_2\lambda_3 + D''(\lambda_2+\lambda_3) + E'' = 0,\\
&A\lambda_3^2\lambda_1^2 + B\lambda_3\lambda_1(\lambda_3+\lambda_1) + C(\lambda_3^2+\lambda_1^2)\\
&\qquad + C''\lambda_3\lambda_1 + D''(\lambda_3+\lambda_1) + E'' = 0,\\
&A\lambda_1^2\lambda_2^2 + B\lambda_1\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2) + C(\lambda_1^2+\lambda_2^2)\\
&\qquad + C''\lambda_1\lambda_2 + D''(\lambda_1+\lambda_2) + E'' = 0.
\end{aligned}\right.
$$

Retranchons deux à deux les équations (3); il vient, après avoir supprimé les facteurs $\lambda_2 - \lambda_3$, $\lambda_3 - \lambda_1$, $\lambda_1 - \lambda_2$,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &A\lambda_1^2(\lambda_2+\lambda_3)+B\lambda_1(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+C(\lambda_2+\lambda_3)+C''\lambda_1+D''=0,\\ &A\lambda_2^2(\lambda_3+\lambda_1)+B\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+C(\lambda_3+\lambda_1)+C''\lambda_2+D''=0,\\ &A\lambda_3^2(\lambda_1+\lambda_2)+B\lambda_3(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)+C(\lambda_1+\lambda_2)+C''\lambda_3+D''=0.\end{aligned}\right.$$

Retranchons encore deux à deux les équations (4), on trouve la relation unique

$$(5)\quad A(\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2)+B(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)-nA+mB=0.$$

Si maintenant nous ajoutons les égalités (4), puis les égalités (3), et qu'on joigne à l'équation (5) les résultats ainsi obtenus, nous avons les trois relations suivantes :

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &A\beta+B\alpha-nA+mB=0,\\ &A(\alpha\beta-3\gamma)+B\alpha^2+(2C+C'')\alpha+3D''=0,\\ &A(\beta^2-2\alpha\gamma)+B(\alpha\beta-3\gamma)+C(2\alpha^2-4\beta)\\ &\qquad\qquad +C''\beta+2D''\alpha+3E''=0,\end{aligned}\right.$$

après avoir posé

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha&=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\\ \beta&=\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2,\\ \gamma&=\lambda_1\lambda_2\lambda_3.\end{aligned}\right.$$

Des deux premières équations (6), on tire

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} A\beta&=-B\alpha+nA-mB,\\ A\gamma&=C\alpha-pA+mC,\end{aligned}\right.$$

et la substitution des valeurs (8) dans la troisième des équations (6) *donne lieu à une identité.*

On peut aussi constater aisément que la vérification des relations (6) entraîne, comme conséquence nécessaire, celle des relations (3).

3. Le premier membre de l'équation (1) doit être divisible par

$$\lambda^3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\lambda^2 + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1)\lambda - \lambda_1\lambda_2\lambda_3,$$

c'est-à-dire, en ayant égard aux notations (7), par

$$\lambda^3 - \alpha\lambda^2 + \beta\lambda - \gamma,$$

ou enfin, d'après les valeurs (8), par

$$\lambda^3 - \alpha\lambda^2 + \frac{-B\alpha + nA - mB}{A}\lambda - \frac{C\alpha - pA + mC}{A}.$$

Si l'on pose $\alpha + m = \mu A$, l'expression qui précède devient

$$(9)\qquad \lambda^3 - (\mu A - m)\lambda^2 - (\mu B - n)\lambda - (\mu C - p).$$

D'ailleurs, eu égard aux notations (I), (II), (III), (IV) du n° **2**, l'équation (1) développée prend la forme suivante :

$$(10)\qquad \left\{\begin{array}{l} (\lambda^3 + m\lambda^2 + n\lambda + p)^2 - B'\lambda^4 - 2C'\lambda^3 \\ \qquad - (2pA + D')\lambda^2 - 2pB\lambda - pC = 0. \end{array}\right.$$

Ainsi, en définitive, nous obtiendrons *les équations du lieu cherché* en écrivant que le premier membre de l'équation (10) est divisible par l'expression (9); μ est une indéterminée qu'il faudra éliminer.

Nous exprimerons que cette division se fait exactement en écrivant qu'on a identiquement

$$(11)\qquad \left\{\begin{array}{l} (\lambda^3 + m\lambda^2 + n\lambda + p)^2 - B'\lambda^4 - 2C'\lambda^3 \\ \qquad - (2pA + D')\lambda^2 - 2pB\lambda - pC \\ \quad = [\lambda^3 + m\lambda^2 + n\lambda + p - \mu(A\lambda^2 + B\lambda + C)] \\ \qquad \times (\lambda^3 + m\lambda^2 + n\lambda + p + \alpha_1\lambda^2 + \beta_1\lambda + \gamma_1), \end{array}\right.$$

α_1, β_1, γ_1 étant trois nouvelles indéterminées.

On est ainsi conduit aux *six* relations suivantes, entre lesquelles nous devons éliminer les *quatre* indéterminées

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \mu$:

$$
(12)\quad\left\{\begin{aligned}
&\alpha_1 - \mu A = 0,\\
&\beta_1 - \mu B - A\mu\alpha_1 = -B',\\
&\gamma_1 - \mu C + m(\beta_1 - \mu B) - \mu(A\beta_1 + B\alpha_1) = -2C';\\
&m(\gamma_1 - \mu C) + n(\beta_1 - \mu B) - \mu(A\gamma_1 + B\beta_1 + C\alpha_1)\\
&\qquad\qquad = -2pA - D',\\
&n(\gamma_1 - \mu C) + p(\beta_1 - \mu B) - \mu(B\gamma_1 + C\beta_1) = -2pB,\\
&p(\gamma_1 - \mu C) - \mu C\gamma_1 = -pC.
\end{aligned}\right.
$$

4. Des trois premières équations (12), on déduit :

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1 = A\mu,\\
&\beta_1 = A^2\mu^2 + B\mu - mA + B,\\
&\gamma_1 = A^3\mu^3 + (2AB - mA^2)\mu^2 + (C + AB - mA^2)\mu\\
&\qquad + (m^2 - 2n)A - mB + 2C.
\end{aligned}
$$

Or, si l'on pose

$$
(13)\qquad\left\{\begin{aligned}
&U = A^2\mu^3 - B'\mu^2 - B'\mu + m^2 - 2n,\\
&V = A\mu^2 - m,
\end{aligned}\right.
$$

les valeurs précédentes de α_1, β_1, γ_1 pourront s'écrire

$$
(14)\qquad\left\{\begin{aligned}
&\alpha_1 = A\mu,\\
&\beta_1 = AV + B\mu + B,\\
&\gamma_1 = AU + BV + C\mu + 2C.
\end{aligned}\right.
$$

Substituons ces valeurs dans le second groupe des équations (12), il vient, en désignant par X, Y, Z les premiers membres des équations résultantes,

$$
\begin{aligned}
X = {} & (A\mu - m)(AU + BV + C\mu + 2C)\\
& + (B\mu - n)(AV + B\mu + B) + AC\mu^2\\
& + (mC + nB)\mu - 3pA - nB + mC = 0,\\
Y = {} & (B\mu - n)(AU + BV + C\mu + 2C)\\
& + (C\mu - p)(AV + B\mu + B) + (mC + pB)\mu - 2pB = 0,\\
Z = {} & (C\mu - p)(AU + BV + C\mu + 2C) + pC\mu - pC = 0.
\end{aligned}
$$

Développons ces trois dernières équations en conservant les termes en U; puis remplaçons $A^2\mu^3$ et $A\mu^2$ à l'aide des relations (13), lorsque ces termes se présenteront dans les autres calculs effectués; on trouve, sans difficulté aucune, que les trois équations qui précèdent peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} X &= (A^2\mu - B')U + (AB\mu - C')V \\ &\qquad + A(C\mu^2 + 2C\mu - 3p) = 0, \\ Y &= (AB\mu - C')U + (B^2\mu - D')V \\ &\qquad + B(C\mu^2 + 2C\mu - 3p) = 0, \\ Z &= (AC\mu - pA)U + (BC\mu - pB)V \\ &\qquad + C(C\mu^2 + 2C\mu - 3p) = 0. \end{aligned}\right.$$

Il s'agit maintenant d'éliminer μ entre les trois équations (15).

5. Posons encore

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} M &= AC'' - B^2 \\ &= (b^2 - c^2)^2 y^2 z^2 + (c^2 - a^2)^2 z^2 x^2 + (a^2 - b^2)^2 x^2 y^2, \\ N &= AD'' - BC \\ &= a^2(b^2 - c^2)^2 y^2 z^2 + b^2(c^2 - a^2)^2 z^2 x^2 + c^2(a^2 - b^2)^2 x^2 y^2, \\ P &= AE'' - C^2 \\ &= a^4(b^2 - c^2)^2 y^2 z^2 + b^4(c^2 - a^2)^2 z^2 x^2 + c^4(a^2 - b^2)^2 x^2 y^2, \\ Q &= BE'' - CD'' \\ &= a^6(b^2 - c^2)^2 y^2 z^2 + b^6(c^2 - a^2)^2 z^2 x^2 + c^6(a^2 - b^2)^2 x^2 y^2; \end{aligned}\right.$$

puis formons les combinaisons

$$BZ - CY = 0,\quad AZ - CX = 0,\quad AY - BX = 0,$$

on trouve

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} BZ - CY &= PU + QV = 0, \\ AZ - CX &= NU + PV = 0, \\ AY - BX &= MU + NV = 0; \end{aligned}\right.$$

une quelconque de ces équations est une conséquence des deux autres. On peut donc remplacer le système (15) par le système (17), auquel on joindra une des équations (15).

La combinaison des équations (17) nous donne, par exemple,

$$(18)\quad \begin{cases} (NQ - P^2)U = 0, & (NQ - P^2)V = 0, \\ \text{ou}\ (MP - N^2)U = 0, & (MP - N^2)V = 0, \\ \text{ou}\ (MQ - NP)U = 0, & (MQ - NP)V = 0. \end{cases}$$

On déduit d'ailleurs des valeurs (16) les identités

$$(16\ bis)\quad \begin{cases} MP - N^2 = (b^2 - c^2)^2(c^2 - a^2)^2(a^2 - b^2)^2 x^2 y^2 z^2 A, \\ MQ - NP = (b^2 - c^2)^2(c^2 - a^2)^2(a^2 - b^2)^2 x^2 y^2 z^2 B, \\ NQ - P^2 = (b^2 - c^2)^2(c^2 - a^2)^2(a^2 - b^2)^2 x^2 y^2 z^2 C. \end{cases}$$

D'après cela, comme A, B, C ne peuvent pas être nuls à la fois, il résulte des équations (18)

$$(19)\qquad U = 0,\quad V = 0,$$

et les équations (15) se réduisent alors à

$$(19\ bis)\qquad C\mu^2 + 2C\mu - 3p = 0.$$

Ainsi *les équations du lieu cherché s'obtiendront en éliminant μ entre les trois équations*

$$(20)\quad \begin{cases} A\mu^2 - m = 0, \\ C\mu^2 + 2C\mu - 3p = 0, \\ A^2\mu^3 - B\mu^2 - B'\mu + m^2 - 2n = 0, \quad \text{où}\quad B' = mA - B. \end{cases}$$

6. L'élimination de μ ne présente aucune difficulté; en remplaçant d'abord μ^2 dans les deux dernières équations (20), il vient

$$2AC\mu = 3pA - mC,$$
$$AB\mu = 2nA - mB.$$

Comparant ces deux valeurs de μ, puis remplaçant μ par $\sqrt{\frac{m}{A}}$, on est conduit aux trois équations

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} 4mAC^2 &= (3pA - mC)^2,\\ mAB^2 &= (2nA - mB)^2,\\ 3pAB &= C(4nA - mB).\end{aligned}\right.$$

7. Conclusion. — *Le lieu des sommets des trièdres trirectangles dont les côtés sont normaux à l'ellipsoïde*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

est une COURBE GAUCHE *définie par les trois équations*

$$(\Delta)\quad (22)\qquad \left\{\begin{aligned} &(1^\circ)\quad & 4mAC^2 &= (3pA - mC)^2,\\ &(2^\circ)\quad & mAB^2 &= (2nA - mB)^2,\\ &(3^\circ)\quad & 3pAB &= C(4nA - mB).\end{aligned}\right.$$

Dans ces équations, on a posé

$$(22\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned} A &= x^2 + y^2 + z^2,\\ B &= (b^2 + c^2)x^2 + (c^2 + a^2)y^2 + (a^2 + b^2)z^2,\\ C &= b^2c^2x^2 + c^2a^2y^2 + a^2b^2z^2;\\ m &= a^2 + b^2 + c^2,\\ n &= a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2,\\ p &= a^2b^2c^2.\end{aligned}\right.$$

J'ai dit que la courbe était définie par les trois équations (22); c'est qu'en effet deux quelconques de ces équations seraient insuffisantes pour bien déterminer cette courbe. Ainsi, par exemple, si nous voulons la définir par les deux équations (2°) et (3°) seulement, nous voyons que les deux surfaces (2°) et (3°) ont en commun la courbe ($A = 0$, $B = 0$), qui est une solution étrangère à la question, car elle n'appartient pas à la surface (1°); il en serait de même pour les autres combinaisons.

Notons que la courbe ($A = 0$, $B = 0$), solution étrangère, se compose de quatre droites passant par l'origine, et que ces droites sont des *droites doubles* pour la surface (2°).

8. *Remarque I.* — Les trois équations (22) seront vérifiées, et les solutions étrangères écartées, si l'on prend

$$(\Delta)\quad (23)\qquad \begin{cases} (4^\circ) & 2nA = m(\rho + 1)B, \\ (5^\circ) & 3pA = m(2\rho + 1)C, \\ (6^\circ) & A = m\rho^2, \end{cases}$$

ρ désignant une constante tout à fait arbitraire. Remarquons que la nouvelle arbitraire ρ est liée à l'ancienne μ par la relation

$$\rho = \frac{1}{\mu};$$

ceci résulte évidemment de la comparaison de la première des équations (20) et de la troisième des équations (23).

Les équations (23) sont parfaitement aptes à définir la courbe gauche en question, et nous en fournissent en même temps une construction très-simple.

Pour une valeur donnée à l'arbitraire ρ, la dernière des équations (23) représente une sphère, et les deux premières déterminent quatre droites passant par le centre de cette sphère; les intersections de ces droites avec la sphère donnent quatre points de la courbe gauche.

9. *Remarque II.* — Après avoir remplacé A, B, C par leurs valeurs (22 *bis*), on peut résoudre les équa-

tions (23) par rapport aux x^2, y^2, z^2; on trouve ainsi

$$(\Delta)\quad (24)\quad \begin{cases} rx^2 = a_1^2\rho^2\left[a^4 m - \dfrac{2a^2}{\rho+1}n + \dfrac{3}{2\rho+1}p\right], \\ ry^2 = b_1^2\rho^2\left[b^4 m - \dfrac{2b^2}{\rho+1}n + \dfrac{3}{2\rho+1}p\right], \\ rz^2 = c_1^2\rho^2\left[c^4 m - \dfrac{2c^2}{\rho+1}n + \dfrac{3}{2\rho+1}p\right], \end{cases}$$

après avoir posé

$$(24\ bis)\quad \begin{cases} a_1^2 = b^2 - c^2, \quad m = a^2 + b^2 + c^2, \\ b_1^2 = c^2 - a^2, \quad n = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2, \\ c_1^2 = a^2 - b^2; \quad p = a^2b^2c^2; \\ r = a_1^2b^2c^2 + b_1^2c^2a^2 + c_1^2a^2b^2, \quad \text{ou} \quad r = a_1^2a^4 + b_1^2b^4 + c_1^2c^4. \end{cases}$$

La COURBE GAUCHE, *lieu des sommets des trièdres tri-rectangles normaux à l'ellipsoïde*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

est complétement définie par les équations (24), *où* ρ *est un paramètre arbitraire.*

Les carrés des coordonnées d'un point quelconque de la courbe sont ainsi des fonctions rationnelles fort simples d'un paramètre arbitraire. Il est probable qu'une méthode synthétique pourra conduire plus rapidement à ce résultat remarquable qui se dégage d'une analyse assez délicate.

10. Signalons plusieurs propriétés immédiates de la courbe que nous venons de déterminer :

1° *La courbe gauche* Δ *est du seizième ordre.*

Nous pouvons, en effet, définir cette courbe par les équations (2°) et (3°) du groupe (22); or les deux surfaces (2°) et (3°) sont des ordres $6^{ème}$ et $4^{ème}$ respectivement; il faut d'ailleurs faire abstraction de la courbe commune ($A = 0$, $B = 0$) qui n'appartient pas à la surface (1°); et, comme cette courbe se compose de quatre droites qui sont des droites doubles pour la surface (2°), il reste, en définitive, $24 - 4.2 = 16$ pour l'ordre de la courbe gauche Δ.

La même conclusion se déduit facilement des équations (1°) et (3°).

La question est plus délicate si l'on définit la courbe par les deux surfaces

$$(1°)\quad 4mAC^2 = (3pA - mC)^2,$$
$$(2°)\quad mAB^2 = (2nA - mB)^2.$$

Ces surfaces sont toutes deux du sixième ordre; mais elles ont d'abord en commun deux cercles confondus avec le cercle imaginaire de l'infini, cercle qui n'appartient pas à la surface (3°); l'ordre de la courbe se réduit donc déjà à $(36 - 4) = 32$.

De plus, la courbe

$$B(3pA - mC) = 2C(mB - 2nA),$$
$$mAB^2 = (2nA - mB)^2 \quad .$$

appartient (sauf les quatre droites doubles $A = 0$, $B = 0$) à la surface (1°), et n'appartient pas à la surface (3°); on a ainsi une nouvelle courbe du seizième ordre dont il faut faire abstraction, et il reste, pour l'ordre définitif. $32 - 16 = 16$. C. Q. F. D.

2° *Le centre de l'ellipsoïde est un point multiple du huitième ordre pour la courbe gauche Δ; les huit tangentes en ce point forment quatre couples de deux droites coïncidentes qui sont données par les équations*

$$(25)\qquad \frac{A}{m} = \frac{B}{2n} = \frac{C}{3p};$$

d'où l'on tire

$$(25\ bis)\qquad \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}.$$

En effet, la courbe étant définie par les équations (2°) et (3°) du groupe (22), on voit que l'origine est un point multiple dont les tangentes sont fournies par les équa-équations

$$(2nA - mB)^2 = 0,\quad C(4nA - mB) - 3pAB = 0;$$

ce sont deux cônes du quatrième ordre qui ont seize génératrices communes formant huit couples de deux droites coïncidentes; parmi ces huit couples se trouvent les quatre couples ($A = 0$, $B = 0$) dont nous devons faire abstraction; il reste alors les quatre couples déterminés par les équations (25).

3° *Directions asymptotiques, asymptotes de la courbe* Δ.

Les valeurs infinies de x, y, z correspondent aux valeurs 0, -1 et $-\frac{1}{2}$ du paramètre ρ; on trouve ainsi, à l'aide des équations (24),

$$(26)\quad \left\{\begin{array}{llll} (1^{\circ}) & \dfrac{x^2}{a_1^2 a^4} = \dfrac{y^2}{b_1^2 b^4} = \dfrac{z^2}{c_1^2 c^4} & \text{ou} & B = 0,\quad C = 0, \\ (2^{\circ}) & \dfrac{x^2}{a^2 a_1^2} = \dfrac{y^2}{b^2 b_1^2} = \dfrac{z^2}{c^2 c_1^2} & \text{ou} & C = 0,\quad A = 0, \\ (3^{\circ}) & \dfrac{x^2}{a_1^2} = \dfrac{y^2}{b_1^2} = \dfrac{z^2}{c_1^2} & \text{ou} & A = 0,\quad B = 0. \end{array}\right.$$

Les quatre premières directions (1°) correspondent à quatre points doubles à l'infini sur la courbe gauche; les asymptotes s'obtiendront à l'aide des équations (22) [(2°) et (3°)]; elles seront les intersections du plan tangent au point considéré à l'infini sur la surface (3°) avec la polaire du second ordre du même point relative à la surface (2°).

Les quatre directions (2°) correspondent à quatre points simples à l'infini sur la courbe gauche; les asymptotes seront les intersections des plans tangents au point considéré à l'infini aux surfaces (2°) et (3°).

Les quatre directions (3°) correspondent également à quatre points simples à l'infini sur la courbe gauche; pour obtenir l'asymptote en un de ces points, on prendra la polaire du deuxième ordre de ce point relative à la surface (2°), et le plan tangent à la surface (3°); une des droites d'intersection sera l'asymptote cherchée.

Ces calculs n'offrent aucune difficulté et conduisent à des résultats simples.

4° *La courbe gauche* Δ *rencontre l'ellipsoïde donné*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0, \quad \text{ou} \quad C-p=0$$

en trente-deux points dont les coordonnées sont fournies par les équations

$$(27)\left\{\begin{array}{ll}
(1^\circ) \left\{\begin{array}{l} rx^2=a_1^2a^6, \\ ry^2=b_1^2b^6, \\ rz^2=c_1^2c^6, \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} A=m, \\ B=n, \\ C=p; \end{array}\right. \\
(2^\circ) \left\{\begin{array}{l} 9rx^2=a_1^2a^2(a^2m-3n+9b^2c^2), \\ 9ry^2=b_1^2b^2(b^2m-3n+9c^2a^2), \\ 9rz^2=c_1^2c^2(c^2m-3n+9a^2b^2), \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} A=\dfrac{m}{9}, \\ B=\dfrac{n}{3}, \\ C=p; \end{array}\right. \\
(3^\circ) \left\{ t=0, \quad A=0, \quad C=0; \right. \\
(4^\circ) \left\{ t=0, \quad B=0, \quad C=0; \right.
\end{array}\right.$$

$t=0$ est le plan de l'infini, et on a posé

$$r=a_1^2b^2c^2+b_1^2c^2a^2+c_1^2a^2b^2=a_1^2a^4+b_1^2b^4+c_1^2c^4.$$

Les groupes (1°) et (2°) déterminent chacun *huit* points où la courbe Δ *rencontre* l'ellipsoïde, ce qui donne 16 points.

Le groupe (4°) détermine quatre points à l'infini; comme ces points sont des points doubles de la courbe gauche, il en résulte 8 points de rencontre.

Enfin le groupe (3°) donne quatre points à l'infini; en ces points la courbe gauche *touche* l'ellipsoïde, ce qui équivaut à 8 points de rencontre.

On a bien ainsi les 32 points de rencontre de la courbe gauche et de l'ellipsoïde.

11. On peut encore se proposer la question suivante :

Quel est le lieu des pieds, sur l'ellipsoïde donné, des normales rectangulaires entre elles?

Si x, y, z sont les coordonnées du point d'où sont issues les normales, les coordonnées x_1, y_1, z_1 du pied de l'une d'elles sont

$$x_1 = \frac{a^2 x}{\lambda + a^2}, \quad y_1 = \frac{b^2 y}{\lambda + b^2}, \quad z_1 = \frac{c^2 z}{\lambda + c^2};$$

pour les trois normales rectangulaires, les valeurs de λ sont (n° 3) les trois racines de l'équation

$$\lambda^3 + m\lambda^2 + n\lambda + p - \mu(A\lambda^2 + B\lambda + C) = 0.$$

Quant aux trois autres normales, les valeurs de λ auxquelles elles correspondent sont les trois racines de l'équation

$$\lambda^3 + m\lambda^2 + n\lambda + p + \alpha_1\lambda^2 + \beta_1\lambda + \gamma_1 = 0;$$

ceci résulte évidemment de l'identité [(11), n° 3].

Or, si l'on remarque que, pour les points (x, y, z) d'où sont issues les normales considérées, les quantités U et V sont nulles (n° 5), les égalités [(14), n° 4] donnent alors

$$\alpha_1 = A\mu, \quad \beta_1 = B\mu + B, \quad \gamma_1 = C\mu + 2C.$$

Nous pouvons remplacer μ par $\frac{1}{\rho}$ (n° 8), et ρ aura la même valeur que dans les équations (23) et (24), (n^{os} 8 et 9).

Nous arrivons ainsi à cette double conséquence :

1° *Les coordonnées* X, Y, Z *des pieds des trois normales rectangulaires menées d'un point* (x, y, z) *de la courbe* Δ *seront données par les égalités*

$$(28) \qquad X = \frac{a^2 x}{\lambda + a^2}, \quad Y = \frac{b^2 y}{\lambda + b^2}, \quad Z = \frac{c^2 z}{\lambda + c^2},$$

et les trois valeurs de λ *seront les racines de l'équation*

$$(28\ bis) \qquad \lambda^3 + m\lambda^2 + n\lambda + p - \frac{1}{\rho}(A\lambda^2 + B\lambda + C) = 0;$$

2° *Les coordonnées* X′, Y′, Z′ *des pieds des trois normales non rectangulaires menées du même point* (x, y, z) *de la courbe* Δ *seront données par les égalités*

$$(29) \qquad X' = \frac{a^2 x}{\lambda' + a^2}, \quad Y' = \frac{b^2 y}{\lambda' + b^2}, \quad Z' = \frac{c^2 z}{\lambda' + c^2},$$

et les trois valeurs de λ' *seront les racines de l'équation*

$$(29\ bis) \quad \lambda'^3 + m\lambda'^2 + n\lambda' + p + \frac{1}{\rho}(A\lambda'^2 + B\lambda' + C) + B\lambda' + 2C = 0.$$

Dans les deux cas, x, y, z *sont des fonctions de* ρ *définies par les équations* (23) *ou* (24), (n^{os} 8 *ou* 9); A, B, C *sont des fonctions de* x, y, z *définies par les égalités* [(22 *bis*), n° 7].

Cette proposition, qui va nous servir pour aborder la question que nous nous sommes posée, pourra être fort utile si l'on veut pousser plus loin l'étude des propriétés des systèmes de normales rectangulaires.

12. Cherchons maintenant le lieu des pieds, sur l'ellipsoïde donné, des normales rectangulaires.

Les coordonnées X, Y, Z du pied d'une de ces normales sont données par les équations (28), et λ doit vérifier l'équation (28 *bis*). Des équations (28) on tire

$$(30)\quad x = \frac{X}{a^2}(\lambda + a^2),\quad y = \frac{Y}{b^2}(\lambda + b^2),\quad z = \frac{Z}{c^2}(\lambda + c^2).$$

Si l'on substitue les valeurs (30) de x, y, z dans l'équation (1) du n° 1, qui doit être évidemment vérifiée, il vient

$$(31)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} + \dfrac{Z^2}{c^2} - 1 = 0, \\ \text{ou} \\ b^2c^2X^2 + a^2c^2Y^2 + a^2b^2Z^2 = a^2b^2c^2; \end{array}\right.$$

c'est l'équation de l'ellipsoïde donné.

Il faut maintenant substituer les valeurs (30) de x, y, z dans l'équation (28 *bis*), puis dans les équations (23), et éliminer λ et ρ entre trois des équations ainsi formées.

13. Pour faciliter les calculs dont je viens d'indiquer la marche, je vais d'abord chercher les expressions des quantités A, B, C en fonction de X, Y, Z et λ, et, dans ce but, j'adopterai les notations suivantes :

$$(32)\quad \left\{\begin{array}{l} A_1 = X^2 + Y^2 + Z^2, \\ B_1 = (b^2 + c^2)X^2 + (c^2 + a^2)Y^2 + (a^2 + b^2)Z^2, \\ C_1 = b^2c^2X^2 + c^2a^2Y^2 + a^2b^2Z^2; \\ D_1 = b^4c^4X^2 + c^4a^4Y^2 + a^4b^4Z^2, \\ E_1 = (b^2 + c^2)b^4c^4X^2 + (c^2 + a^2)c^4a^4Y^2 + (a^2 + b^2)a^4b^4Z^2, \\ F_1 = b^6c^6X^2 + c^6a^6Y^2 + a^6b^6Z^2; \end{array}\right.$$

puis rappelons-nous qu'on a posé (n° 17)

$$(32\ bis)\quad \begin{cases} A = x^2 + y^2 + z^2, \\ B = (b^2 + c^2)x^2 + (c^2 + a^2)y^2 + (a^2 + b^2)z^2, \\ C = b^2c^2x^2 + c^2a^2y^2 + a^2b^2z^2; \\ m = a^2 + b^2 + c^2, \\ n = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2, \\ p = a^2b^2c^2. \end{cases}$$

Par la substitution des valeurs (30), les expressions de A, B, C prendront, eu égard aux notations (32), les valeurs suivantes :

$$(33)\quad \begin{cases} p^2A = D_1\lambda^2 + 2pC_1\lambda + p^2A_1, \\ p^2B = E_1\lambda^2 + 2p(mC_1 - pA_1)\lambda + p^2B_1, \\ p^2C = F_1\lambda^2 + 2pD_1\lambda + p^2C_1; \end{cases}$$

de là on déduit, après quelques transformations faciles,

$$(34)\quad p^2(A\lambda^2 + B\lambda + C) = (\lambda^3 + m\lambda^2 + n\lambda + p)(\lambda D_1 + pC_1).$$

Si l'on substitue les valeurs (30) dans l'équation (28 *bis*) et qu'on ait égard à la relation (34), il vient, après avoir supprimé un facteur différent de zéro,

$$(35)\qquad p^2\rho = \lambda D_1 + pC_1.$$

En remplaçant x, y, z par leurs valeurs (30) dans les équations [(23), n° 8], et ayant égard pour cela aux relations (33), on trouve

$$(36)\quad \begin{cases} D_1\lambda^2 + 2pC_1\lambda + p^2A = mp^2\rho^2, \\ (2\rho + 1)[F_1\lambda^2 + 2pD_1\lambda + p^2C_1] = 3p^3\rho^2, \\ (\rho + 1)[E_1\lambda^2 + 2p(mC_1 - pA_1)\lambda + p^2B_1] = 2np^2\rho^2. \end{cases}$$

Il s'agit maintenant d'éliminer λ et ρ entre les équations (35) et (36).

Tirons λ de l'équation (35), et substituons sa valeur dans les équations (36), il vient après quelques réductions faciles

$$(37)\quad \begin{cases} \rho^2(mD_1 - p^2) = A_1 D_1 - C_1^2, \\ (p\rho - C_1)[2pF_1\rho^2 + (D_1^2 - C_1 F_1)(\rho + 1)] \\ \quad = \rho(C_1 - p)(pF_1\rho + D_1^2 - C_1 F_1), \\ (mD_1 - pC_1)(p\rho - C_1)^2 \\ \quad + 2D_1(mC_1 - pA_1)(p\rho - C_1) + B_1 D_1^2 = 2nD_1^2 \dfrac{\rho^2}{\rho + 1}. \end{cases}$$

14. Nous avons déjà trouvé (n° **12**)

$$(38,\ 1^\circ)\quad b^2c^2X^2 + c^2a^2Y^2 + a^2b^2Z^2 = a^2b^2c^2, \text{ c'est-à-dire, } C_1 = p.$$

On simplifiera les calculs en introduisant immédiatement cette hypothèse dans les équations (37). Les deux premières donnent

$$(38,\ 2^\circ)\quad \begin{cases} \rho^2 = \dfrac{A_1 D_1 - p^2}{mD_1 - p^2}, \\ 2\dfrac{\rho^2}{\rho + 1} = \dfrac{pF_1 - D_1^2}{pF_1}; \end{cases}$$

d'où l'on conclut

$$(38,\ 3^\circ)\quad \rho - 1 = 2D_1 \frac{pF_1(A_1 - m) + D_1(mD_1 - p^2)}{(pF_1 - D_1^2)(mD_1 - p^2)}.$$

Eu égard à ces valeurs, la troisième des équations (37) devient, après avoir fait $C_1 = p$,

$$p^2(mD_1 - p^2)(\rho - 1)^2 - 2p^2D_1(A_1 - m)(\rho - 1) \\ = D_1^2 \frac{2n\rho^2 - B_1(\rho + 1)}{\rho + 1},$$

ou, en chassant le dénominateur $\rho + 1$,

$$p^2(\rho^2 - 1)[(mD_1 - p^2)(\rho - 1) - 2D_1(A_1 - m)] \\ = D_1^2[2n\rho^2 - B_1(\rho + 1)];$$

puis en remplaçant, dans la première parenthèse, $(\rho - 1)$ par sa valeur (38, 3°), et, dans la deuxième parenthèse, $(\rho + 1)$ par la valeur que fournissent les équations (38, 2°),

$$p^2(A_1 D_1 - p^2)(\rho^2 - 1) = \rho^2(npF_1 - nD_1^2 - pB_1F_1).$$

Substituons enfin à ρ^2 et $(\rho^2 - 1)$ les valeurs déduites de la première des équations (38, 2°), il vient, en supprimant des facteurs qui ne peuvent être nuls,

$$p^2A_1 D_1 + nD_1^2 + pB_1 F_1 - mp^2D_1 - npF_1 = 0.$$

Or, à cause de $C_1 = p$, cette dernière équation peut s'écrire

$$p^2A_1 D_1 + nD_1^2 + pB_1 F_1 - mpC_1 D - nC_1 F_1 = 0.$$

Si l'on remplace $A_1, B_1, C_1, \ldots$ par leurs valeurs (32), on constate immédiatement que cette dernière équation se réduit à une identité.

Par conséquent, la courbe cherchée est complétement définie par les équations (38, 1°) et (38, 2°), équations qu'on peut écrire

$$(39)\quad C_1 = p,\quad \rho^2 = \frac{A_1 D_1 - C_1^2}{mD_1 - pC_1},\quad 2\,\frac{\rho^2}{\rho + 1} = \frac{C_1 F_1 - D_1^2}{pF_1};$$

il reste à éliminer ρ entre les deux dernières équations (39).

15. On a

$$\rho^2 = \frac{A_1 D_1 - C_1^2}{mD_1 - pC_1},\quad \rho + 1 = \frac{2pF_1(A_1 D_1 - C_1^2)}{(mD_1 - pC_1)(C_1 F_1 - D_1^2)},$$

d'où l'on conclut

$$\begin{aligned}(A_1 D_1 - C_1^2)(C_1 F_1 - D_1^2)^2(mD_1 - pC_1)\\ = [2pF_1(A_1 D_1 - C_1^2) - (mD_1 - pC_1)(C_1 F_1 - D_1^2)].\end{aligned}$$

Cette dernière équation peut s'écrire

$$\begin{aligned}(C_1F_1 - D_1^2)^2(mD_1 - pC_1)(A_1D_1 - C_1^2 - mD_1 + pC_1)\\ = 4pF_1(A_1D_1 - C_1^2)[pF_1(A_1D_1 - C_1^2)\\ -(mD_1 - pC_1)(C_1F_1 - D_1^2)],\end{aligned}$$

ou, en remplaçant p par C_1, quand il résulte une réduction,

$$(1^\circ)\quad\left\{\begin{aligned}&(C_1F_1 - D_1^2)^2(mD_1 - pC_1)(A_1 - m)\\ &= 4pF_1(A_1D_1 - C_1^2)(pA_1F_1 - mC_1F_1 + mD_1^2 - pC_1D_1).\end{aligned}\right.$$

Or, si l'on pose

$$(2^\circ)\quad\left\{\begin{aligned}&M_1 = A_1D_1 - C_1^2,\quad pN_1 = C_1F_1 - D_1^2,\\ &pP_1 = mC_1F_1 - pA_1F_1 + pC_1D_1 - mD_1^2,\end{aligned}\right.$$

l'équation (1°) devient

$$N_1^2(mD_1 - pC_1)(A_1 - m) + 4F_1M_1P_1 = 0,$$

ou, en multipliant par p,

$$(3^\circ)\quad (mD_1 - pC_1)(pA_1 - mC_1)N_1^2 + 4pF_1M_1P_1 = 0.$$

Il est d'ailleurs facile de voir que

$$(4^\circ)\quad\left\{\begin{aligned}M_1 &= a^4a_1^4Y^2Z^2 + b^4b_1^4Z^2X^2 + c^4c_1^4X^2Y^2,\\ N_1 &= a^6a_1^4Y^2Z^2 + b^6b_1^4Z^2X^2 + c^6c_1^4X^2Y^2,\\ P_1 &= a^8a_1^4Y^2Z^2 + b^8b_1^4Z^2X^2 + c^8c_1^4X^2Y^2,\\ M_1P_1 - N_1^2 &= a_1^4b_1^4c_1^4X^2Y^2Z^2D_1.\end{aligned}\right.$$

En remplaçant M_1P_1 par la valeur que fournit la dernière des égalités (4°), l'équation (3°) deviendra

$$(5^\circ)\quad\left\{\begin{aligned}&4a_1^4b_1^4c_1^4X^2Y^2Z^2C_1F_1D_1\\ &+ N_1^2[4C_1F_1 + (mD_1 - pC_1)(pA_1 - mC_1)] = 0.\end{aligned}\right.$$

Mais si l'on pose

$$\begin{aligned}r &= a_1^2b^2c^2 + b_1^2c^2a^2 + c_1^2a^2b^2,\\ r' &= a_1^2b^4c^4 + b_1^2c^4a^4 + c_1^2a^4b^4,\\ r'' &= a_1^2b^2c^2(b^2 + c^2) + b_1^2c^2a^2(c^2 + a^2) + c_1^2a^2b^2(a^2 + b^2),\end{aligned}$$

on a identiquement

$$(6^\circ) \qquad p^2 r \mathrm{A}_1 = r\mathrm{F}_1 + pr''\mathrm{C}_1 - r'\mathrm{D}_1,$$

et l'équation (5°) prend la forme définitive

$$(7^\circ) \quad \left\{ \begin{aligned} & 4p^3 r a_1^4 b_1^4 c_1^4 \mathrm{X}^2\mathrm{Y}^2\mathrm{Z}^2 \mathrm{C}_1 \mathrm{D}_1 \mathrm{F}_1 \\ & \quad + (\mathrm{C}_1\mathrm{F}_1 - \mathrm{D}_1^2)^2 [r'\mathrm{D}_1(p\mathrm{C}_1 - m\mathrm{D}_1) \\ & \qquad\qquad + r\mathrm{F}_1(m\mathrm{D}_1 + 3p\mathrm{C}_1)] = 0. \end{aligned} \right.$$

16. Ainsi, en résumé :

La courbe, lieu des pieds, sur l'ellipsoïde donné, des normales rectangulaires, est définie par les deux équations

$$\mathcal{A} = p,$$

$$(40,\ 1^\circ) \quad \left\{ \begin{aligned} & 4p^3 r a_1^4 b_1^4 c_1^4 \mathrm{X}^2\mathrm{Y}^2\mathrm{Z}^2 \mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C} \\ & \quad + (\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2)^2 [(3pr\mathcal{A}\mathcal{C} - mr'\mathcal{B}^2) \\ & \qquad\qquad + \mathcal{B}(pr'\mathcal{A} + mr\mathcal{C})] = 0; \end{aligned} \right.$$

dans ces équations, on a posé

$$(40,\ 2^\circ) \quad \left\{ \begin{aligned} & \mathcal{A} = b^2c^2\mathrm{X}^2 + c^2a^2\mathrm{Y}^2 + a^2b^2\mathrm{Z}^2, \\ & \mathcal{B} = b^4c^4\mathrm{X}^2 + c^4a^4\mathrm{Y}^2 + a^4b^4\mathrm{Z}^2, \\ & \mathcal{C} = b^6c^6\mathrm{X}^2 + c^6a^6\mathrm{Y}^2 + a^6b^6\mathrm{Z}^2; \\ & \text{d'où} \\ & \mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2 = p(a^6a_1^4\mathrm{Y}^2\mathrm{Z}^2 + b^6b_1^4\mathrm{Z}^2\mathrm{X}^2 + c^6c_1^4\mathrm{X}^2\mathrm{Y}^2); \end{aligned} \right.$$

$$(40,\ 3^\circ) \quad \left\{ \begin{aligned} & m = a^2 + b^2 + c^2, \\ & n = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2, \\ & p = a^2b^2c^2; \\ & a_1^2 = b^2 - c^2, \\ & b_1^2 = c^2 - a^2, \\ & c_1^2 = a^2 - b^2; \\ & r = a_1^2b^2c^2 + b_1^2c^2a^2 + c_1^2a^2b^2, \\ & r' = a_1^2b^4c^4 + b_1^2c^4a^4 + c_1^2a^4b^4; \end{aligned} \right.$$

X, Y, Z, *sont les coordonnées d'un point quelconque de la courbe.*

La courbe (40, 1°) est du vingt-quatrième ordre; la forme donnée aux équations qui la définissent permet d'en signaler un certain nombre de propriétés.

DÉVELOPPEMENTS DE $\sin(n\alpha + z)$, DE $\cos(n\alpha + z)$, DE $\sin^n\alpha$ ET DE $\cos^n\alpha$;

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

I.

1. *Développement de* $\sin(n\alpha + z)$. — Considérons la fonction

$$y = e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha).$$

Si nous prenons, par rapport à x, les dérivées successives de y, nous trouvons

$$\frac{dy}{dx} = e^{x\cos\alpha}\sin(\alpha + x\sin\alpha),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{x\cos\alpha}\sin(2\alpha + x\sin\alpha),$$

et, en général,

$$\frac{d^ny}{dx^n} = e^{x\cos\alpha}\sin(n\alpha + x\sin\alpha).$$

Afin d'obtenir une autre expression de $\frac{d^ny}{dx^n}$, posons

$$u = \sin(x\sin\alpha)$$

et

$$v = e^{x\cos\alpha}.$$

Nous avons alors

$$y = uv,$$

et, d'après la formule de Leibnitz,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \frac{d^k u}{dx^k} \frac{d^{n-k} v}{dx^{n-k}}.$$

Or,

$$\frac{d^k u}{dx^k} = \sin^k \alpha \sin\left(\frac{k\pi}{2} + x\sin\alpha\right),$$

$$\frac{d^{n-k} v}{dx^{n-k}} = e^{x\cos\alpha} \cos^{n-k}\alpha.$$

Donc

$$\frac{d^n y}{dx^n} = e^{x\cos\alpha} \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \sin^k\alpha \cos^{n-k}\alpha \sin\left(\frac{k\pi}{2} + x\sin\alpha\right).$$

Égalons les deux expressions de $\frac{d^n y}{dx^n}$; supprimons le facteur $e^{x\cos\alpha}$ commun aux deux expressions; remplaçons $x\sin\alpha$ par z, nous trouvons l'identité

$$(1) \qquad \sin(n\alpha + z) = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \sin^k\alpha \cos^{n-k}\alpha \sin\left(\frac{k\pi}{2} + z\right),$$

qui nous donne le développement de $\sin(n\alpha + z)$.

Remarque. — Dans l'identité (1), C_n^k représente le nombre des combinaisons simples de n objets k à k, et l'on convient de regarder C_n^0 comme égal à l'unité.

2. Dans l'identité précédente, α et z sont quelconques, mais n est un nombre entier supérieur à zéro. Soit p un nombre quelconque; posons

$$n\alpha + z = p\alpha,$$

ce qui donne

$$z = (p - n)\alpha,$$

et portons cette valeur de z dans l'identité (1), nous obtenons l'identité

$$(2)\quad \sin p\alpha = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \sin^k\alpha \cos^{n-k}\alpha \sin\left[\frac{k\pi}{2} + (p-n)\alpha\right],$$

qui nous donne, quel que soit p, le développement de $\sin p\alpha$.

3. Si, dans l'identité (2), on remplace successivement p par les nombres n, 1, 0, on obtient les trois identités suivantes

$$(3)\quad \sin n\alpha = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \sin^k\alpha \cos^{n-k}\alpha \sin\frac{k\pi}{2},$$

$$(4)\quad \sin\alpha = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \sin^k\alpha \cos^{n-k}\alpha \sin\left[\frac{k\pi}{2} - (n-1)\alpha\right],$$

$$(5)\quad 0 = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \sin^k\alpha \cos^{n-k}\alpha \sin\left(\frac{k\pi}{2} - n\alpha\right).$$

Remarque. — On voit que l'identité (3), qui est si connue, s'obtient ainsi comme cas particulier d'une formule plus générale, sans recourir à la considération des imaginaires.

II.

4. *Développement de* $\cos(n\alpha + z)$. — On peut l'obtenir, soit en dérivant par rapport à z les deux membres de l'identité (1), soit en égalant entre elles les deux expressions de la dérivée $n^{ième}$ de la fonction

$$y = e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha).$$

Ces procédés conduisent tous deux à l'identité

$$(6)\qquad \cos(n\alpha + z) = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \sin^k\alpha \cos^{n-k}\alpha \cos\left(\frac{k\pi}{2} + z\right),$$

qui donne le développement cherché.

5. Soit p un nombre quelconque; posons

$$n\alpha + z = p\alpha;$$

il en résulte

$$z = (p - n)\alpha.$$

Portons cette valeur de z dans l'identité (6), nous trouvons

$$(7)\qquad \cos p\alpha = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \sin^k\alpha \cos^{n-k}\alpha \cos\left[\frac{k\pi}{2} + (p - n)\alpha\right],$$

identité qui donne, quel que soit p, le développement de $\cos p\alpha$.

6. Si, dans l'identité (7), on remplace successivement p par les nombres n, 1, 0, on trouve les trois identités suivantes :

$$(8)\qquad \cos n\alpha = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \sin^k\alpha \cos^{n-k}\alpha \cos\frac{k\pi}{2},$$

$$(9)\qquad \cos\alpha = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \sin^k\alpha \cos^{n-k}\alpha \cos\left[\frac{k\pi}{2} - (n - 1)\alpha\right],$$

$$(10)\qquad 1 = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \sin^k\alpha \cos^{n-k}\alpha \cos\left(\frac{k\pi}{2} - n\alpha\right).$$

Remarque. — Dans l'identité (8), de même que dans l'identité (3), si l'on remplace α par $\frac{\pi}{4}$, on obtient une formule qui donne, après réduction, la somme des coefficients du développement.

III.

7. *Développement de* $\cos^n\alpha$. — Considérons la fonction

$$y = e^{2x\cos\alpha}\cos^2(x\sin\alpha) = \frac{1}{2}e^{2x\cos\alpha} + \frac{1}{2}e^{2x\cos\alpha}\cos(2x\sin\alpha),$$

nous trouvons, pour sa dérivée $n^{\text{ième}}$, par rapport à x, les deux expressions suivantes :

$$\frac{d^ny}{dx^n} = 2^{n-1}e^{2x\cos\alpha}\cos^n\alpha + 2^{n-1}e^{2x\cos\alpha}\cos(n\alpha + 2x\sin\alpha)$$

et

$$\frac{d^ny}{dx^n} = e^{2x\cos\alpha}\sum_{n=0}^{n=k} C_n^k\cos(k\alpha + x\sin\alpha)\cos[(n-k)\alpha + x\sin\alpha].$$

Égalons ces deux expressions; supprimons le facteur commun $e^{2x\cos\alpha}$; remplaçons $x\sin\alpha$ par z, et divisons les deux membres par 2^{n-1}, il vient

$$\begin{aligned}&\cos^n\alpha + \cos(n\alpha + 2z)\\ &\quad = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k\cos(k\alpha + z)\cos[(n-k)\alpha + z],\end{aligned}$$

d'où

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}\cos^n\alpha = {} & -\cos(n\alpha + 2z)\\ & + \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k\cos(k\alpha + z)\cos[(n-k)\alpha + z].\end{aligned}\right.$$

Cette identité donne le développement de $\cos^n\alpha$.

8. En opérant de la même manière sur la fonction

$$y = e^{2x\cos\alpha}\sin^2(x\sin\alpha) = \frac{1}{2}e^{2x\cos\alpha} - \frac{1}{2}e^{2x\cos\alpha}\cos(2x\sin\alpha),$$

on arrive à l'identité

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \cos^n\alpha &= \cos(n\alpha + 2z) \\ &\quad + \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \sin(k\alpha + z)\sin[(n-k)\alpha + z], \end{aligned}\right.$$

qui donne un autre développement de $\cos^n\alpha$.

9. Soit p un nombre quelconque. Posons

$$n\alpha + 2z = p\alpha,$$

d'où

$$z = \frac{p-n}{2}\alpha;$$

et portons cette valeur de z dans les identités (11) et (12). Nous trouvons

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \cos^n\alpha &= -\cos p\alpha \\ &\quad + \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \cos\frac{(2k+p-n)\alpha}{2}\cos\frac{(2k-p-n)\alpha}{2}, \end{aligned}\right.$$

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} \cos^n\alpha &= \cos p\alpha \\ &\quad - \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \sin\frac{(2k+p-n)\alpha}{2}\sin\frac{(2k-p-n)\alpha}{2}. \end{aligned}\right.$$

Ces formules sont vraies quel que soit p.

10. Dans les identités (13) et (14), donnons successivement à p les valeurs n, 1, 0: nous obtiendrons les six

identités suivantes :

$$\cos^n\alpha = -\cos n\alpha + \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \cos k\alpha \cos(k-n)\alpha,$$

$$\cos^n\alpha = \quad \cos n\alpha - \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \sin k\alpha \sin(k-n)\alpha,$$

$$\cos^n\alpha = -\cos\alpha + \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \cos\frac{(2k+1-n)\alpha}{2}\cos\frac{(2k-1-n)\alpha}{2},$$

$$\cos^n\alpha = \cos\alpha - \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \sin\frac{(2k+1-n)\alpha}{2}\sin\frac{(2k-1-n)\alpha}{2},$$

$$\cos^n\alpha = -1 + \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \cos^2\frac{(2k-n)\alpha}{2},$$

$$\cos^n\alpha = \quad 1 - \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \sin^2\frac{(2k-n)\alpha}{2}.$$

11. Ajoutons membres à membres les deux dernières identités, nous trouvons

$$\cos^n\alpha = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \cos^2\frac{(2k-n)\alpha}{2} - \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \sin^2\frac{(2k-n)\alpha}{2},$$

d'où

$$\cos^n\alpha = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \cos(2k-n)\alpha.$$

Cette dernière formule est celle que l'on donne ordinairement dans les traités de calcul différentiel.

IV.

12. *Développement de* $\sin^n\alpha$. — Remplaçons α par $\frac{\pi}{2}-\alpha$ dans les deux identités (11) et (12); nous trouvons

$$\sin^n\alpha = -\cos\left[n\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+2z\right]$$
$$+\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \cos\left[k\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+z\right]\cos\left[(n-k)\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+z\right],$$

$$\sin^n\alpha = \cos\left[n\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+2z\right]$$
$$+\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \sin\left[k\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+z\right]\sin\left[(n-k)\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+z\right].$$

13. Remplaçons de même α par $\frac{\pi}{2}-\alpha$ dans les identités (13) et (14); il vient

$$\sin^n\alpha = -\cos\frac{p(\pi-2\alpha)}{2}$$
$$+\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \cos\frac{(2k+p-n)(\pi-2\alpha)}{4}\cos\frac{(2k-p-n)(\pi-2\alpha)}{4},$$

$$\sin^n\alpha = \cos\frac{p(\pi-2\alpha)}{2}$$
$$-\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \sin\frac{(2k+p-n)(\pi-2\alpha)}{4}\sin\frac{(2k-p-n)(\pi-2\alpha)}{4}.$$

Remarque. — Dans ces deux dernières égalités, p est un nombre quelconque.

14. Dans les identités précédentes, remplaçons p successivement par n, 1 et 0; nous obtiendrons les six identités suivantes :

$$\sin^n\alpha = -\cos\frac{n(\pi-2\alpha)}{2} + \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \cos\frac{k(\pi-2\alpha)}{2}\cos\frac{(k-n)(\pi-2\alpha)}{2},$$

$$\sin^n\alpha = \cos\frac{n(\pi-2\alpha)}{2} - \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \sin\frac{k(\pi-2\alpha)}{2}\sin\frac{(k-n)(\pi-2\alpha)}{2},$$

$$\sin^n\alpha = -\sin\alpha + \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \cos\frac{(2k+1-n)(\pi-2\alpha)}{4}\cos\frac{(2k-1-n)(\pi-2\alpha)}{4},$$

$$\sin^n\alpha = \sin\alpha - \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \sin\frac{(2k+1-n)(\pi-2\alpha)}{4}\sin\frac{(2k-1-n)(\pi-2\alpha)}{4},$$

$$\sin^n\alpha = -1 + \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \cos^2\frac{(2k-n)(\pi-2\alpha)}{4},$$

$$\sin^n\alpha = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \sin^2\frac{(2k-n)(\pi-2\alpha)}{4}.$$

15. Ajoutons membres à membres les deux dernières identités; nous trouvons

$$\sin^n\alpha = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \cos\frac{(2k-n)(\pi-2\alpha)}{2}.$$

16. Cette dernière identité peut être mise sous une autre forme. On a, en effet,

$$\cos\frac{(2k-n)(\pi-2\alpha)}{2}$$
$$=\cos k\pi\left[\cos\frac{n\pi}{2}\cos(n-2k)\alpha+\sin\frac{n\pi}{2}\sin(n-2k)\alpha\right];$$

il en résulte

$$\sin^n\alpha=\frac{1}{2^n}\cos\frac{n\pi}{2}\sum_{k=0}^{k=n}C_n^k\cos k\pi\cos(n-2k)\alpha$$
$$+\frac{1}{2^n}\sin\frac{n\pi}{2}\sum_{k=0}^{k=n}C_n^k\cos k\pi\sin(n-2k)\alpha.$$

Ici, le second membre se compose de deux développements. Si n est pair, $\sin\frac{n\pi}{2}$ s'annule, le second membre se réduit à son premier terme. Si n est impair, $\cos\frac{n\pi}{2}$ s'annule, et le second membre se réduit à son dernier terme. On retrouve ainsi les formules que donnent les traités de calcul différentiel pour le développement de $\sin^n\alpha$.

SOMMATION DE CERTAINS DÉVELOPPEMENTS;

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

I.

THÉORÈME. — *Étant données deux suites de nombres*

$$A_0,\quad A_1,\quad A_2,\ldots,\quad A_n,$$
$$B_0,\quad B_1,\quad B_2,\ldots,\quad B_n,$$

telles que, dans la première, les termes équidistants des extrêmes soient égaux, et que, dans la seconde, les termes équidistants des extrêmes aient une somme constante 2G; *si l'on désigne par* S *la somme des termes de la première suite, on aura*

$$\sum_{k=0}^{k=n} A_k B_k = GS.$$

En effet, on a

$$\sum_{k=0}^{k=n} A_k B_k = A_0 B_0 + A_1 B_1 + A_2 B_2 + \ldots + A_n B_n$$

et

$$\sum_{k=0}^{k=n} A_k B_k = A_n B_n + A_{n-1} B_{n-1} + A_{n-2} B_{n-2} + \ldots + A_0 A_0 ;$$

ajoutons ces égalités, membre à membre, en nous rappelant que, par hypothèse, $A_{n-k} = A_k$; nous trouvons

$$2\sum_{k=0}^{k=n} A_k B_k = A_0 (B_0 + B_n) + A_1 (B_1 + B_{n-1}) + \ldots + A_n (B_n + B_0);$$

or, chaque parenthèse est égale à 2G, d'après l'énoncé du théorème; donc

$$2\sum_{k=0}^{h=n} A_k B_k = 2G(A_0 + A_1 + \ldots + A_n),$$

donc

$$\sum_{k=0}^{k=n} A_k B_k = GS,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. — On établirait facilement un théorème analogue, mais plus général, en supposant que les nombres de la seconde suite satisfissent a l'égalité

$$pB_k + qB_{n-k} = r,$$

dans laquelle p, q, r désignent des constantes.

II.

1re *Application*. — Supposons

$$A_k = 1, \quad B_k = a + kd,$$

en appliquant le théorème précédent, nous trouvons

$$\sum_{k=0}^{k=n} (a + kd) = \frac{(2a + nd)(n + 1)}{2},$$

formule qui donne la somme des $n + 1$ premiers termes d'une progression arithmétique ayant pour premier terme a et pour raison d.

2e *Application*. — Prenons pour première suite les coefficients du binôme, pour seconde suite les termes d'une progression arithmétique, ce qui revient à poser

$$A_k = C_n^k, \quad B_k = a + kd;$$

nous avons

$$S = 2^n, \quad 2G = 2a + nd,$$

et par suite

$$\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k (a + kd) = 2^{n-1}(2a + nd).$$

3e *Application*. — Appelons toujours C_n^k le coefficient de x^k, dans le développement de $(1 + n)^n$, et posons

$$A = C_n^k, \quad B_k = \sin k\alpha \cos(n - k)\alpha;$$

alors

$$S = 2^n, \quad 2G = \sin n\alpha,$$

et l'on trouve

$$\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \sin k\alpha \cos(n-k)\alpha = 2^{n-1} \sin n\alpha.$$

CONCOURS D'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES DE 1871.

1re SÉRIE D'ÉPREUVES. — ADMISSIBILITÉ.

Mathématiques spéciales.

On donne trois points fixes A, B, C; on demande de trouver le lieu des centres des ellipsoïdes de révolution pour lesquels ces trois points sont les extrémités de trois diamètres conjugués.

Mathématiques élémentaires.

1° *Mathématiques élémentaires.* — On donne la longueur de la bissectrice de l'angle A, d'un triangle ABC et la somme des deux côtés AB, BC, qui comprennent cet angle; on demande d'étudier la variation de la surface du triangle, ainsi que les variations de l'angle A et des côtés AB, AC.

2° *Mécanique.* — Une tige pesante AB est mobile autour de son extrémité A qui est fixe. L'autre extrémité B est soutenue par un fil BCDE passant sur deux poulies fixes C et D, dont la première a son centre sur la verticale du point A. Ce cordon soutient une chaîne pesante, homogène et parfaitement flexible EFG, dont l'extrémité est suspendue à un point fixe G, situé sur la verticale du centre de la poulie D. On demande de trouver la condition et la position d'équilibre du système. On négligera le poids du cordon et les dimensions des poulies.

Question d'histoire et de méthode.

Exposé historique et critique des diverses méthodes qui ont été employées pour déterminer le rapport de la circonférence au diamètre.

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION (1871);

PAR M. A. DE GROSSOUVRE,
Élève Ingénieur des Mines.

On donne trois points fixes; on demande de trouver le lieu des centres des ellipsoïdes de révolution pour lesquels ces trois points sont les extrémités de trois diamètres conjugués.

Il est aisé de voir que ces ellipsoïdes passent tous par une ellipse unique, circonscrite au triangle formé par les trois points donnés, ayant en chaque sommet pour tangente la parallèle au côté opposé, et pour centre le point de rencontre des médianes de ce triangle. En outre, si, pour l'un de ces ellipsoïdes, on considère le tétraèdre formé par le triangle et les trois plans diamétraux conjugués contenant les côtés de ce triangle, et le tétraèdre formé par le plan du triangle et les plans tangents aux trois sommets, on voit que ces deux tétraèdres sont semblables et que leurs arêtes homologues sont dans le rapport de 1 à 2; de sorte que, O étant le centre d'un des ellipsoïdes, C le centre de l'ellipse, M l'extrémité du diamètre OC, S le pôle du plan de l'ellipse, on a

$$SC = 2\,OC;$$

et comme

$$\overline{OM}^2 = OS.OC,$$

il en résulte

$$\overline{OM}^2 = 3\overline{OC}^2.$$

De plus, deux systèmes de diamètres conjugués étant situés sur un cône du second degré, s'il existe un système de trois diamètres conjugués ayant leurs extrémités sur l'ellipse, il y en aura une infinité d'autres jouissant de cette même propriété; de sorte que le lieu est indépendant de la position des sommets des triangles sur l'ellipse. et l'on peut substituer à la condition énoncée, celle de passer par une ellipse donnée, dont le plan intercepte sur le demi-diamètre conjugué une longueur qui est dans le rapport de 1 à $\sqrt{3}$ avec celle du demi-diamètre.

Dans un ellipsoïde de révolution, toute section a un de ses axes dans un même plan avec l'axe de l'ellipsoïde, plan qui est perpendiculaire au plan de la section ; par suite, le lieu du centre se compose de deux courbes planes situées dans des plans perpendiculaires au plan de l'ellipse et menés par ses axes.

Je prends pour plan de la figure un de ces plans. Soient O le centre d'un des ellipsoïdes; a et b les demi-axes de l'ellipse méridienne; PQ la trace du plan qui coupe l'ellipsoïde suivant l'ellipse donnée, dont les demi-axes sont A et B (le demi-axe A étant dirigé suivant PQ, les points P et Q sont situés sur l'ellipse méridienne); $OM = \rho$ le diamètre conjugué à la direction PQ; $OM' = \rho'$ le diamètre parallèle à PQ; α l'angle des diamètres conjugués OM, OM'.

PC est la longueur du demi-axe A de l'ellipse donnée; et, cette ligne étant parallèle à OM', comme l'on a

$$\overline{OM}^2 = 3\overline{OC}^2,$$

il en résulte, d'après l'équation de l'ellipse rapportée à ses diamètres conjugués, que l'on aura

$$\overline{OM'}^2 = \tfrac{3}{2}\overline{CP}^2,$$

c'est-à-dire

$$\rho'^2 = \tfrac{3}{2}A^2.$$

En considérant l'ellipse contenue dans le plan perpendiculaire au plan de la figure et passant par OM, on trouverait de même

$$a^2 = \tfrac{3}{2}B^2;$$

ce qui montre que tous les ellipsoïdes répondant à la question, et ayant leurs centres dans le plan considéré, ont le rayon de l'équateur constant.

Dans l'ellipse méridienne, on a

$$\rho^2 + \rho'^2 = a^2 + b^2, \quad \rho\rho' \sin\alpha = ab,$$

et, en vertu des relations trouvées, ces égalités deviennent

$$\rho^2 - b^2 = \tfrac{3}{2}(B^2 - A^2), \quad b = \frac{A}{B}\rho \sin\alpha.$$

Si nous rapportons l'une des courbes planes du lieu à des axes passant par le point C, l'axe des x étant CP, on aura

$$x = \frac{\rho\cos\alpha}{\sqrt{3}}, \quad y = \frac{\rho\sin\alpha}{\sqrt{3}}.$$

En éliminant les quantités b, ρ, α, on arrive à l'équation

$$x^2 + \left(1 - \frac{A^2}{B^2}\right)y^2 = \frac{B^2 - A^2}{2},$$

équation d'une courbe du deuxième degré rapportée à ses axes. L'équation de la courbe située dans le second plan s'obtiendra en changeant A en B. L'une de ces courbes est une ellipse et l'autre une hyperbole ; et ces courbes sont telles, que l'une d'elles a pour sommets les foyers de l'autre.

Remarque. — La formule $\overline{OM}^2 = 3\,\overline{OC}^2$ montre que le point M décrit un lieu semblable au lieu du point O. Donc :

Pour tous les ellipsoïdes satisfaisant aux conditions de l'énoncé, le lieu des points de contact avec des plans parallèles au plan de l'ellipse donnée, se compose de quatre courbes semblables à celles du lieu des centres ; de plus, l'équateur de ces ellipsoïdes a un rayon constant.

La question se résout aussi très-facilement par le calcul direct se rapportant à des axes rectangulaires dont deux coïncident avec les axes de l'ellipse.

Seconde solution de la même question ;

PAR M. E. BONNET,

Ancien Élève de l'École Polytechnique.

Remarque préliminaire. — Soient A, B, C les trois points donnés. On voit facilement que le plan ABC coupera un quelconque des ellipsoïdes suivant une ellipse telle, que les tangentes aux points A, B, C soient parallèles aux côtés BC, AC, AB. Car si M désigne le centre de la surface, le diamètre MA sera conjugué du plan BMC ; par suite, le plan tangent en A sera parallèle à ce dernier plan et coupera le plan ABC, suivant une droite DE, qui sera, à la fois, parallèle à BC et tangente à la section. On voit donc que les ellipsoïdes considérés devront passer tous par une même ellipse, contenant les trois points donnés et déterminée par cette condition que le triangle ABC soit un triangle inscrit d'aire maximum.

Cela posé, je prends les équations de cette ellipse rapportée à ses axes

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

L'équation générale des ellipsoïdes passant par cette ellipse sera

$$(2)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 + z(2Ax + 2By + Cz + 2D) = 0.$$

Exprimant que cette surface est de révolution, on trouve l'une ou l'autre des conditions suivantes :

$$(3)\qquad \begin{cases} B = 0, \\ \left(\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2}\right)\left(C - \dfrac{1}{b^2}\right) - A^2 = 0, \end{cases}$$

ou bien

$$(4)\qquad \begin{cases} A = 0, \\ \left(\dfrac{1}{b^2} - \dfrac{1}{a^2}\right)\left(C - \dfrac{1}{a^2}\right) - B^2 = 0. \end{cases}$$

Je me servirai seulement des conditions (3), les autres donneraient des résultats symétriques.

En faisant $B = 0$ l'équation de la surface devient

$$(5)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 + z(2Ax + Cz + 2D) = 0.$$

Les équations du centre sont

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{x}{a^2} + Az = 0, \\ \dfrac{y}{b^2} = 0, \\ Ax + Cz + D = 0. \end{cases}$$

Ce qui montre déjà que le lieu des centres sera situé dans le plan zox : la condition (4) aurait donné zoy. Ce résultat était facile à prévoir, parce que l'on sait que la projection de l'axe d'une surface de révolution sur un plan sécant est un axe de la courbe d'intersection.

Il reste à exprimer que les trois points donnés sont les extrémités de trois diamètres conjugués. Ceci se fera simplement en se servant de cette propriété, que le plan passant par les extrémités de trois diamètres conjugués coupe son propre diamètre conjugué OH en un point K, tel que $OH = OK\sqrt{3}$.

L'origine des coordonnées étant ici le point K, si l'on désigne par x l'abscisse du centre O et par X l'abscisse de H, on devra avoir

$$\frac{X}{x} = 1 - \sqrt{3}.$$

L'équation de la surface nous donnera d'ailleurs

$$(7)\qquad \frac{X^2}{x^2}\left(\frac{x^2}{a^2} + 2Azx + Cz^2\right) + 2Dz\frac{X}{x} - 1 = 0.$$

Pour avoir la condition cherchée il nous suffira d'exprimer que cette équation est satisfaite si l'on y porte $\dfrac{X}{x} = 1 - \sqrt{3}$, ce qui donnera

$$(8)\quad (\sqrt{3} - 1)^2\left(\frac{x^2}{a^2} + 2Azx + Cz^2\right) - 2Dz(\sqrt{3} - 1) - 1 = 0.$$

L'équation du lieu situé dans le plan *zox* résultera de l'élimination des paramètres A, C, D entre cette équation et les suivantes, que nous récrivons :

$$(9)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}\right)\left(C-\dfrac{1}{b^2}\right)-A^2=0, \\ \dfrac{x}{a^2}+Az=0, \\ Ax+Cz+D=0. \end{cases}$$

Une combinaison des deux dernières donne

$$(10)\qquad \frac{x^2}{a^2}+2Azx+Cz^2=-Dz,$$

et alors l'équation (8) devient

$$(11)\qquad 2Dz+1=0.$$

Si l'on calcule D au moyen de (9) on aura enfin l'équation du lieu

$$(12)\qquad \frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{z^2}{b^2}+\frac{1}{2}=0.$$

On voit que le lieu complet se compose de deux coniques

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{cases} y=0, \\ \dfrac{x^2}{a^2-b^2}-\dfrac{z^2}{b^2}+\dfrac{1}{2}=0, \end{cases}$$

$$(\mathrm{II})\qquad \begin{cases} x=0, \\ \dfrac{y^2}{b^2-a^2}-\dfrac{z^2}{a^2}+\dfrac{1}{2}=0. \end{cases}$$

Si *a* désigne le demi-grand axe de l'ellipse, (I) sera une hyperbole ayant l'axe des *z* pour axe transverse, et (II) sera une ellipse.

On peut remarquer qu'il existe sur l'ellipse ABC une infinité de groupes de trois points donnant le même lieu géométrique.

Si les trois points donnés forment un triangle équilatéral, l'ellipse ABC devient une circonférence, et le lieu se réduit à l'axe des z.

Note. — Une troisième solution nous a été communiquée par M. Dieu, répétiteur au lycée de Lyon.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 923

(voir 2ᵉ série, t. VIII, p. 47);

PAR M. L. BÉDOREZ,
Élève du lycée de Douai.

Deux coniques semblables et semblablement placées sont tangentes en un point A. *Par ce point* A *on mène une corde* AB *dans l'une des coniques, et la corde* AC *perpendiculaire à* AB *dans l'autre; on joint* BC, *du point* A *on abaisse une perpendiculaire* AI *sur* BC : *trouver le lieu du point* I *quand* AB *tourne autour du point* A. (LAFONT.)

Je prends pour axe des y la tangente au point A, et comme axe des x la normale au même point. Les deux coniques auront pour équations

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - 2Dx = 0,$$
$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - 2D_1x = 0.$$

Soit (x_0, y_0) un point du lieu; la droite BC, perpendiculaire à AI, a pour coefficient angulaire $-\dfrac{x_0}{y_0}$, et par suite, pour équation,

$$y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0).$$

Considérons la conique formée par cette droite et l'axe des y, puis une courbe du deuxième ordre passant par les points d'intersection de ce système avec une des deux coniques proposées, la première par exemple : son équation sera

$$[y_0(y-y_0)+x_0(x-x_0)]x+\lambda(Ax^2+Bxy+Cy^2-2Dx)=0.$$

Si l'on exprime que cette équation représente deux droites passant par l'origine, il vient

$$\lambda = -\frac{x_0^2+y_0^2}{2D};$$

par suite, l'équation des deux droites AB, AD sera

$$\begin{gathered}[A(x_0^2+y_0^2)-2Dx_0]x^2 \\ +2[B(x_0^2+y_0^2)-Dy_0]xy+C(x_0^2+y_0^2)y^2=0.\end{gathered}$$

De même, pour les droites AC, AE,

$$\begin{gathered}[A(x_0^2+y_0^2)-2D_1x_0]x^2 \\ +2[B(x_0^2+y_0^2)-D_1y_0]xy+C(x_0^2+y_0^2)y^2=0.\end{gathered}$$

Nous allons chercher la condition pour que, dans chacun des deux systèmes, il y ait une droite perpendiculaire à une droite de l'autre. Pour simplifier les calculs, prenons les équations sous la forme

$$\begin{gathered}ax^2+2bxy+cy^2=0, \\ a_1x^2+2b_1xy+cy^2=0.\end{gathered}$$

L'équation aux coefficients angulaires des deux premières droites est

$$(1)\qquad a+2bm+cm^2=0.$$

Si nous supposons les équations des deux dernières mises sous la forme $y = -\frac{1}{m}x$, l'équation en m sera

$$(2) \qquad a_1 m^2 - 2 b_1 m + c = 0.$$

Il faut et il suffit que les équations (1) et (2) aient une racine commune. La condition connue est

$$(aa_1 - c^2)^2 + 4(ba_1 + b_1 c)(ab_1 + bc) = 0.$$

Si nous remplaçons les quantités a, a_1, b, b_1, c par leurs valeurs, en supprimant les indices et posant $x^2 + y^2 = \rho^2$, il vient, pour l'équation du lieu,

$$\begin{aligned}
&[(A\rho^2 - 2Dx)(A\rho^2 - 2D_1 x) - C^2\rho^4]^2 \\
&\quad + 4[B\rho^2 - Dy)(A\rho^2 - 2D_1 x) + (B\rho^2 - D_1 y)C\rho^2] \\
&\qquad \times [(B\rho^2 - D_1 y)(A\rho^2 - 2Dx) + (B\rho^2 - Dy)C\rho^2] = 0.
\end{aligned}$$

Ordonnons par rapport aux puissances de ρ, supprimons le facteur ρ^2, et posons $m = D + D_1$, $p = DD_1$, nous avons

$$(\mathrm{I}) \left\{\begin{aligned}
&(A + C)^2[(A - C)^2 + 4B^2]\rho^6 \\
&\quad - 4m(A + C)[A(A - C)x + 2B^2 x + B(A + C)y]\rho^4 \\
&\quad + 4[Am^2(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2) \\
&\quad + p[2(A^2 - C^2 + 2B^2)x^2 + 8BCxy + (A - C)^2 y^2]\rho^2 \\
&\quad - 8mpx[Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + A(x^2 + y^2)] + 16p^2x^2 = 0.
\end{aligned}\right.$$

Le lieu est donc une courbe du sixième ordre; les points circulaires à l'infini sont des points triples, l'origine est un point de rebroussement, la tangente de rebroussement Oy a un contact effectif du deuxième ordre.

Si l'on pose

$$\frac{D}{A + C} = K, \quad \frac{D_1}{A + C} = K_1,$$

d'où

$$m = (K + K_1)(A + C), \quad p = KK_1(A + C)^2;$$

si l'on groupe par rapport aux diverses puissances de A, B, C, on trouve que l'équation de la courbe peut s'écrire

$$(\mathrm{II})\left\{\begin{aligned}&(\rho^2-2\mathrm{K}x)(\rho^2-2\mathrm{K}_1x)\\&\quad\times\left\{\rho^2[(\mathrm{A}-\mathrm{C})^2+4\mathrm{B}^2]\right.\\&\qquad\left.-2(\mathrm{K}+\mathrm{K}_1)(\mathrm{A}+\mathrm{C})[2\mathrm{B}y+(\mathrm{A}-\mathrm{C})x]+4\mathrm{K}\mathrm{K}_1(\mathrm{A}+\mathrm{C})^2\right\}\\&\qquad\qquad+4(\mathrm{K}-\mathrm{K}_1)^2\mathrm{C}\rho^2(\mathrm{A}y^2-2\mathrm{B}xy+\mathrm{C}x^2]=0.\end{aligned}\right.$$

On verrait facilement que $\rho^2-2\mathrm{K}x=0$, $\rho^2-2\mathrm{K}_1x=0$ sont, *pour chacune des coniques*, le lieu des projections du point A sur les hypoténuses des triangles rectangles pivotant autour du point A.

On peut encore écrire, après avoir posé

$$\mathrm{H}=(\mathrm{A}-\mathrm{C})^2+4\mathrm{B}^2,$$

$$(\mathrm{III})\left\{\begin{aligned}&(\rho^2-2\mathrm{K}x)(\rho^2-2\mathrm{K}_1x)\\&\quad\times\left\{\left[x-(\mathrm{K}+\mathrm{K}_1)\frac{(\mathrm{A}+\mathrm{C})(\mathrm{A}-\mathrm{C})}{\mathrm{H}}\right]^2\right.\\&\qquad\left.+\left[y-\frac{2(\mathrm{K}+\mathrm{K}_1)(\mathrm{A}+\mathrm{C})\mathrm{B}}{\mathrm{H}}\right]^2-(\mathrm{K}-\mathrm{K}_1)^2\frac{(\mathrm{A}+\mathrm{C})^2}{\mathrm{H}}\right\}\\&\qquad\qquad+4\frac{(\mathrm{K}-\mathrm{K}_1)^2\mathrm{C}}{\mathrm{H}}\rho^2(\mathrm{A}y^2-2\mathrm{B}xy+\mathrm{C}x^2)=0.\end{aligned}\right.$$

Les trois premiers facteurs égalés à zéro donnent des cercles. La forme (III) met donc en évidence la propriété suivante du lieu : Le produit des carrés des distances d'un point du lieu à trois cercles fixes est proportionnel au produit du carré de sa distance à l'origine multiplié par le produit de ses distances à deux droites fixes passant par l'origine; ces droites sont perpendiculaires aux directions asymptotiques des coniques données.

De plus, ces deux droites donnent, par leurs intersections avec les trois cercles, huit points du lieu différents de l'origine. Les deux droites imaginaires $x^2+y^2=0$ donnent, par leurs intersections avec le troisième cercle, deux points différents des points circulaires. En outre, les points circulaires, qui sont des points triples de la courbe, équivalent à douze points simples, et l'origine, qui est un point double, à trois points simples.

Maintenant, si l'on cherche les intersections de la courbe avec l'axe des y, on trouve deux points différents de l'origine. On connaît donc en tout vingt-sept points de la courbe. C'est juste autant qu'il en faut pour la déterminer.

Différents cas particuliers peuvent être signalés :

1° $A + C = 0$. Les deux coniques sont des hyperboles équilatères. Remontons à la forme (I). Il est visible que le degré de la courbe s'abaisse au quatrième. Son équation devient alors

$$\begin{aligned}4p^2[Am^2(Ax^2 + 2Bxy - Ay^2) + 4p(Bx - Ay)^2]\\ - 16px^2[m(Ax + By) - p] = 0.\end{aligned}$$

2° Nous supposerons que l'on ait *en outre* $D + D_1 = 0$ ou $m = 0$. Les hyperboles équilatères seront alors égales et opposées. Le lieu devient

$$(x^2 + y^2)(Bx - Ay)^2 + px^2 = 0.$$

C'est une courbe du quatrième ordre ayant pour centre l'origine. Elle a deux asymptotes réelles qui sont parallèles au diamètre conjugué de Oy dans les deux hyperboles données.

3° Soit $D = D_1$. Les deux coniques se confondent. En portant cette hypothèse dans la forme (III), on a

$$\left(x^2 + y^2 - \frac{2D}{A + C}x\right)^2 \times \left\{\left[x - \frac{2D(A - C)}{H}\right)^2 + \left(y - \frac{4DB}{H}\right)^2\right\} = 0.$$

On retrouve ici le cercle dont nous avons parlé plus haut, ce que l'on devait prévoir.

QUESTION.

1039. L'équation du lieu des sommets des paraboles inscrites à un triangle restangle est, en prenant pour axes les côtés a et b de l'angle droit,

$$ax^{\frac{1}{3}} + by^{\frac{1}{3}} = \left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)^2;$$

celle du lieu des pieds des normales, issues du sommet de l'angle droit, est

$$ax^3 + by^3 = (x^2 + y^2);$$

et celle du lieu des seconds points de rencontre de ces normales avec les courbes est

$$ax^3 + by^3 = (x^2 - y^2)^2.$$

(H. Lemonnier.)

BIBLIOGRAPHIE ÉTRANGÈRE.

Sur un article du Journal des Savants, tel est le titre d'une brochure dont le contenu est extrait de l'excellent Bulletin du Prince *Boncompagni.*

C'est une réfutation un peu vive d'un article dont la modération laisse à désirer. Nous y reviendrons dans un de nos prochains numéros. G.

ERRATUM.

Page 222, ligne 1, en remontant : ajoutez l'unité au second membre de l'équation.

PROPRIÉTÉS DES COURBES D'ORDRE ET DE CLASSE QUELCONQUES DÉMONTRÉES PAR LE PRINCIPE DE CORRESPONDANCE;

Par M. CHASLES.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXII.)

En analyse, un système de courbes, toutes de même ordre ou de même classe, s'exprime par l'équation $F(x, y, \lambda) = 0$, qui ne renferme qu'un coefficient arbitraire λ, tous les autres étant déterminés par les conditions du système. Dans la géométrie de Descartes, l'exposant supérieur de λ exprime le nombre des courbes du système qui passent par un même point quelconque; et dans la méthode corrélative, dite des *coordonnées tangentielles*, cet exposant exprime des courbes qui sont tangentes à une même droite quelconque. Mais, quoique l'équation exprime toujours l'une ou l'autre de ces deux conditions du système, que *par un point quelconque il passe un nombre déterminé de courbes*, ou bien qu'*un nombre de courbes donné touchent une droite quelconque*, on n'avait pas été induit à penser que ces deux conditions associées fussent propres à former un système. Et surtout l'analyse, dans son état actuel, ne saurait former l'équation d'un tel système. Cette équation serait $F(x, y, \lambda, \mu, \nu) = 0$, μ, ν étant les deux nombres en question, et λ le seul paramètre variable, tous les coefficients des termes en x, y devant être nécessairement des fonctions de λ, μ et ν, avec cette condition impérieuse que le plus fort exposant de λ fût μ.

Au contraire, le *Principe de correspondance* s'est appliqué avec la plus grande facilité à l'introduction de ces deux nombres μ et ν, appelés les *caractéristiques* du système, parce qu'ils suffisent non-seulement pour constituer un système, mais aussi pour en faire connaître toutes les propriétés, comme on l'a vu dans les nombreux exemples qui ont été le sujet de mes Communications précédentes.

Je me propose, dans ma Communication de ce jour, de montrer que, si le mode de raisonnement qui constitue le *Principe de correspondance* jouit ainsi d'un privilége précieux dans la théorie générale des systèmes de courbes, il s'applique aussi, et avec la même facilité, dans la théorie générale des courbes géométriques, considérées soit isolément avec des points et des droites, soit associées entre elles; questions regardées généralement comme étant du domaine propre de l'analyse. Ce procédé de démonstration s'applique même aux questions les plus simples, celles de la théorie des coniques, qui forment les exercices habituels de la géométrie analytique.

Ce sont ces applications variées du *Principe de correspondance*, annoncées déjà dans notre séance du 3 avril, dont j'ai l'honneur d'entretenir aujourd'hui l'Académie.

Ce travail est divisé en cinq chapitres dont je dirai brièvement le sujet.

Dans le premier se trouvent quelques propriétés relatives à une simple conique, c'est-à-dire sans association d'aucun autre élément pris arbitrairement, tels que points, droites ou courbes.

Le second chapitre renferme des propriétés d'une conique dans lesquelles peuvent intervenir des points ou des droites étrangers à la conique. Mais ces propriétés sont énoncées dans un état de généralisation fondée sur cette considération, qu'un point peut être regardé comme une courbe de la classe 1, et une droite comme une courbe de l'ordre 1; de sorte que toutes les propriétés d'une conique que renferme ce paragraphe se rapportent aux tangentes d'une courbe de la classe n quelconque, et aux points d'une courbe de l'ordre m. Il suffira de faire, dans les énoncés des théorèmes, $n = 1$ et $m = 1$ pour avoir les propriétés relatives à des points et à des droites, résultats en quelque sorte classiques.

Dans le chapitre III se trouvent des propriétés d'une courbe géométrique quelconque, concernant des systèmes de deux points conjugués par rapport à une conique, ou des systèmes de deux droites conjuguées aussi par rapport à une conique.

Les théorèmes présentés sous ce point de vue sont encore ici une généralisation, savoir : des propriétés qui appartiennent à des systèmes de deux droites divisant un angle donné harmoniquement, ou à des systèmes de deux points divisant un segment donné harmoniquement. Il suffit de supposer, dans le premier cas, que la conique devient l'ensemble de deux droites, et, dans le second cas, que la conique devient infiniment aplatie.

C'est ainsi, par exemple, que la normale en un point d'une courbe peut être regardée comme étant la conjuguée de la tangente en ce point, par rapport à une conique. Car si la conique devient infiniment aplatie, c'est-à-dire un simple segment linéaire, puis, que ce segment soit pris sur la droite située à l'infini, et que ses extrémités soient les deux points circulaires, la tangente et sa conjuguée divisent ce segment harmoniquement, et dès lors sont rectangulaires.

Cette généralisation de la condition de perpendicularité est très-utile pour faire immédiatement la transformation corrélative des propriétés concernant les normales des courbes. Les normales se transforment ainsi en des points pris sur les tangentes d'une courbe, et qui sont conjugués des points de contact, par rapport à une conique.

Les deux derniers chapitres sont consacrés aux propriétés générales des courbes géométriques d'ordre et de classe quelconques. Dans l'un, ces propriétés se rapportent toutes à la présence d'une conique dans l'énoncé de la question, et, dans l'autre, elles répondent à des conditions générales très-variées.

CHAPITRE PREMIER.

PROPRIÉTÉS D'UNE CONIQUE.

1. Si l'on mène en chaque point d'une conique la tangente et la normale, puis par l'extrémité de la normale une nouvelle tangente, celle-ci rencontre la première sur une courbe du quatrième ordre.

2. Les cordes d'une conique, normales en une de leurs extrémités, ont leurs milieux sur une courbe du huitième ordre.

3. Si de chaque point d'une conique on abaisse trois no males sur la courbe :

1° Les cordes qui joignent deux à deux les pieds de ces normales enveloppent une courbe de la quatrième classe;

2° Les tangentes menées par les pieds des trois normales se coupent sur une courbe du quatrième ordre ;

3° Ces tangentes rencontrent la tangente au point d'où sont menées les trois normales, en des points situés sur une courbe du quatrième ordre.

4. Les perpendiculaires abaissées des points d'une conique sur les tangentes aux extrémités des normales en ces points enveloppent une courbe de la huitième classe.

5. Les perpendiculaires abaissées de chaque point d'une conique sur les cordes qui joignent deux à deux les extrémités des trois normales menées par ce point enveloppent une courbe de la dixième classe.

6. Le lieu des sommets des angles droits dont un côté est tangent à une conique, et l'autre normal, est une courbe du sixième ordre qui a deux points doubles à l'infini, et six points de contact avec la conique, quatre en ses sommets et deux à l'infini.

7. Le lieu des sommets des angles droits dont les deux côtés sont normaux à une conique est une courbe du sixième ordre.

8. Par chaque point d'une conique on mène la normale et le diamètre, la corde qui joint les extrémités de ces deux droites enveloppent une courbe de la quatrième classe.

9. Les normales d'une conique rencontrent les diamètres qui leur sont perpendiculaires, sur une courbe du sixième ordre, qui a un point quadruple au centre de la conique.

10. Les normales aux extrémités de deux diamètres conjugués se coupent sur une courbe du sixième ordre.

11. Si l'on a sur une conique deux séries de points a et a' qui se correspondent homographiquement :

1° Les normales en deux points correspondants a, a' se coupent sur une courbe du troisième ordre ;

2° La corde qui joint les extrémités des deux normales enveloppe une courbe de la sixième classe ;

3° La corde qui joint un des deux points à l'extrémité de la normale en l'autre point enveloppe une courbe de la huitième classe ;

4° La normale en un point rencontre la tangente en l'autre point, sur une courbe du sixième ordre ;

5° La normale en un point rencontre le diamètre qui passe par l'autre point sur une courbe du sixième ordre ;

6° La droite menée d'un point à l'extrémité de la normale en l'autre point enveloppe une courbe de la quatrième classe.

Observation. — On peut généraliser tous ces divers théorèmes, en considérant sur une conique deux séries de points dans lesquelles, à un point d'une série corresponde dans l'autre série un groupe de points. Ainsi, à un point de la première série correspondront n points de la seconde série, et à un point de celle-ci correspondront n' points de la première. On obtient alors des théorèmes dont les précédents ne sont que les cas les plus simples.

Tous ces théorèmes peuvent même prendre une plus grande généralité; car ils ne sont pas le privilége des sections coniques : ils s'étendent à une classe de courbes de tous les ordres, aux courbes sur lesquelles les points se déterminent individuellement, courbes que M. Cayley a appelées *unicursales*. Ce sont, comme on sait, les courbes d'ordre m douées de $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points doubles, ou plus généralement de points multiples d'ordre quelconque équivalant à $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points doubles. (*Comptes rendus*, t. LXII, 1866; p. 579 et 1354.)

CHAPITRE II.

PROPRIÉTÉS D'UNE CONIQUE EN RAPPORT AVEC UNE COURBE GÉOMÉTRIQUE U_m OU U^n.

12. Si de chaque point d'une courbe U_m d'ordre m on mène deux tangentes à une conique, les normales aux points de contact se coupent sur une courbe de l'ordre $3m$.

13. Si de chaque point d'une courbe U_m on mène deux tangentes à la conique, les normales aux points de contact ont leurs extrémités sur une corde qui enveloppe une courbe de la classe $3m$.

14. Si de chaque point d'une courbe U_m on mène deux tangentes à une conique, les normales aux points de contact interceptent une corde qui rencontre la corde de contact sur une courbe d'ordre $4m$.

15. Si de chaque point d'une courbe U_m on mène deux tangentes à une conique, chacune de ces tangentes rencontre la normale au point de contact de l'autre sur une courbe de l'ordre $6m$.

16. Si de chaque point d'une courbe U_m on mène deux tangentes à une conique, et par les points où les normales aux deux points de contact coupent les coniques on mène les tangentes : ces tangentes se coupent sur une courbe de l'ordre $3m$.

17. Si de chaque point d'une courbe U_m on mène deux tangentes à une conique, et que du point de contact de l'une on abaisse une perpendiculaire sur la normale au point de contact de l'autre :

1° Cette perpendiculaire enveloppe une courbe de la classe $4m$;

2° Son pied sur la normale est sur une courbe de l'ordre $4m$.

18. Si de chaque point d'une courbe U_m on abaisse les normales sur une conique :

1° Les tangentes aux pieds de ces normales se coupent deux à deux en des points situés sur une courbe de l'ordre $3m$;

2° Les cordes qui joignent deux à deux les pieds des normales enveloppent une courbe de la classe $3m$ (*).

19. Si de chaque point d'une courbe U_m on mène deux tangentes à la conique, et que de ce point on mène une

(*) Les théorèmes 12, 16 et 18 ont été démontrés analytiquement par M. le professeur Desboves, comme exercices pour les classes de Mathématiques spéciales, dans son intéressant opuscule : *Théorèmes et problèmes sur les normales aux coniques*. In-8°; 1861.

droite au pôle de la corde comprise entre les extrémités des normales aux deux points de contact, cette droite enveloppe une courbe de la classe $3m$.

20. Si de chaque point a d'une courbe U_m on mène les normales à la conique, ces normales rencontrent la polaire du point a en des points situés sur une courbe de l'ordre $8m$.

21. Si de chaque point d'une courbe U_m on mène des tangentes à la conique, que par l'un des points de contact on mène la normale et par l'autre le diamètre : ce diamètre coupe la normale en un point situé sur une courbe d'ordre $6m$.

22. Les tangentes d'une courbe U^n de la classe n rencontrent les normales d'une conique qui leur sont perpendiculaires, en des points situés sur une courbe d'ordre $6n$.

23. Si par les points où chaque tangente d'une courbe U^n coupe une conique on mène les normales, ces normales se coupent sur une courbe de l'ordre $3n$.

24. Si de chaque point d'une courbe U_m on abaisse sur une conique quatre normales, les cordes qui joignent deux à deux les pieds des unes aux extrémités des autres enveloppent une courbe de la classe $6m$.

25. Si de chaque point d'une courbe U_m on abaisse sur une conique les normales, les cordes qui joignent deux à deux les extrémités de ces normales enveloppent une courbe de la classe $9m$.

26. Si de chaque point d'une courbe U_m on mène les normales d'une conique, elles rencontrent le diamètre conjugué de celui qui passe par le point de U_m, en des points situés sur une courbe de l'ordre $8m$.

27. Les perpendiculaires élevées sur les milieux des polaires des points d'une courbe U_m, relatives à une conique, enveloppent une courbe de la classe $3m$.

28. Si l'on circonscrit à une conique des parallélogrammes ayant un sommet sur une courbe U_m, les deux sommets contigus à celui-là sont sur une courbe d'ordre $2m$.

29. Si des points d'une courbe U_m on abaisse sur les polaires de ces points, relatives à une conique, des obliques, sous un angle de grandeur donnée, compté dans un même sens de rotation, ces obliques enveloppent une courbe de la classe $2m$.

30. Si de chaque point d'une courbe U_m on abaisse une perpendiculaire sur le diamètre d'une conique conjugué à celui qui passe par le point de U_m :

1° Ces perpendiculaires enveloppent une courbe de la classe $2m$;

2° Leurs pieds sont sur une courbe de l'ordre $3m$.

31. Si de chaque point d'une courbe U_m on mène les deux tangentes d'une conique, elles rencontrent le diamètre conjugué de celui qui passe par le point de U_m, en des points situés sur une courbe de l'ordre $4m$.

32. Si de chaque point d'une courbe U_m on mène deux tangentes à une conique, et que par le point de contact de l'une on mène une perpendiculaire à l'autre, cette perpendiculaire enveloppe une courbe de la classe $4m$.

Son pied est sur une courbe de l'ordre $6m$.

33. Si l'on circonscrit à une conique des quadrilatères dont deux sommets opposés soient deux points correspondants sur deux courbes homographiques U_m, U'_m, le lieu des deux autres sommets est une courbe de l'ordre $4m^2$.

CHAPITRE III.

PROPRIÉTÉS D'UNE COURBE GÉOMÉTRIQUE, CONCERNANT DES SYSTÈMES DE DEUX POINTS OU DE DEUX DROITES CONJUGUÉS PAR RAPPORT A UNE CONIQUE.

34. Par chaque point de courbure U_m^n on mène la tangente et sa conjuguée par rapport à une conique : cette droite conjuguée enveloppe une courbe de la classe $m+n$.

Si la conique se réduit à un segment ef terminé à deux points e, f, la tangente et sa conjuguée divisent ce segment en rapport harmonique.

Si e, f sont les deux points circulaires de l'infini, le théorème exprime que :

Les normales d'une courbe U_m^n enveloppent une courbe de la classe $m+n$.

Si e, f sont les points à l'infini sur deux droites rectangulaires, le théorème exprime que :

Si par chaque point d'une courbe U_m^n on mène une droite faisant avec la tangente un angle dont la bissectrice soit parallèle à une droite fixe, ces droites enveloppent une courbe de la classe $m+n$.

35. Par chaque point d'une courbe U_m^n on mène la normale et sa conjuguée par rapport à une conique : cette conjuguée enveloppe une courbe de la classe $2m+n$.

36. Si par chaque point d'une courbe U_m on mène les deux droites rectangulaires conjuguées par rapport à une conique, ces droites enveloppent une courbe de la classe $3m$.

37. Si par chaque point d'une courbe U_m on mène les tangentes d'une courbe $U^{n'}$ et les droites conjuguées de ces tangentes, par rapport à une conique C, ces droites enveloppent une courbe de la classe $2mn'$.

38. De chaque point a d'une courbe U_m on mène les tangentes d'une courbe $U^{n'}$, et l'on prend sur ces tangentes les conjugués du point a par rapport à la conique C : le lieu de ces points conjugués est une courbe de l'ordre $2mn'$.

39. Le lieu d'un point d'où l'on peut mener à deux courbes U^n, $U^{n'}$ deux tangentes, conjuguées par rapport à une conique, est une courbe de l'ordre $2nn'$.

40. En chaque point a d'une courbe U_m^n on mène la normale, sur laquelle on prend le conjugué de ce point, par rapport à une conique : le lieu de ces points conjugués est une courbe de l'ordre $2m+n$.

41. Sur chaque tangente d'une courbe U^n on prend le conjugué du point où cette tangente rencontre une droite D, par rapport à une conique C : le lieu de ces points conjugués est un courbe de l'ordre $2n$, qui a trois points multiples d'ordre n; l'un est le pôle de D, et les autres sont les points d'intersection de D et de la conique.

42. Les milieux des segments interceptés par une conique sur les tangentes d'une courbe U^n sont sur une courbe de l'ordre $2n$ qui a trois points multiples d'ordre n, l'un est le centre de la conique, et les deux autres sont ses deux points à l'infini.

43. Si sur chaque tangente d'une courbe U_m^n on prend le point conjugué du point de contact par rapport à une conique, le lieu de ces points est une courbe de l'ordre $m+n$.

Si la conique est l'ensemble de droites, on en conclut, entre autres, ce corollaire :

Si un angle droit tourne autour de son sommet, les tangentes aux points où l'un de ses côtés coupe une courbe U_m^n rencontrent l'autre côté sur une courbe d'ordre $m+n$.

44. Sur chaque tangente d'une courbe U^n on prend

les deux points conjugués par rapport à deux coniques C, C′ : le lieu de ces points est une courbe de l'ordre $3n$.

45. Le lieu d'un point duquel on peut mener deux tangentes d'une courbe U^n, conjuguées par rapport à une conique, est une courbe de l'ordre $n(n-1)$, qui a $2n$ points multiples d'ordre $(n-1)$ sur la conique.

46. Les cordes d'une courbe U_m dont les extrémités sont conjuguées par rapport à une conique enveloppent une courbe de la classe $m(m-1)$.

47. De chaque point a d'une courbe U_m on mène deux tangentes à deux courbes $U^{n'}$, $U^{n''}$, et l'on prend sur ces tangentes les conjugués du point a par rapport à une conique : la droite qui joint ces deux points conjugués enveloppe une courbe de la classe $3mn'n''$.

48. Si de chaque point a d'une courbe U_m on mène des tangentes à une courbe $U^{n'}$, ces tangentes rencontrent la polaire du point a, relative à une conique, en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $2mn'$.

CHAPITRE IV.

PROPRIÉTÉS DIVERSES DES COURBES GÉOMÉTRIQUES AUXQUELLES DONNE LIEU LA PRÉSENCE D'UNE CONIQUE.

49. Si l'on mène, de chaque point a d'une conique, des tangentes à une courbe U^n, et des droites aux points de contact de la conique et de ses tangentes parallèles aux tangentes de U^n, ces droites enveloppent une courbe de la classe $4n$.

50. Si par chaque point d'une conique on mène les tangentes à une courbe U^n, et des droites faisant avec ces tangentes des angles de grandeur donnée (comptés dans un sens de rotation déterminé), ces droites enveloppent une courbe de la classe $4n$.

51. Une conique intercepte sur les tangentes d'une courbe U^n, de la classe n, des segments :

1° Les milieux de ces segments sont sur une courbe de l'ordre $2n$;

2° Les perpendiculaires élevées par ces points milieux enveloppent une courbe de la classe n.

52. Si de chaque point d'une conique on mène deux tangentes à une courbe U^n, la corde qu'elles interceptent dans la conique enveloppe une courbe de la classe $n(n-1)$.

53. Les perpendiculaires abaissées des pôles des tangentes d'une courbe U^n, pris par rapport à une conique, sur ces tangentes, enveloppent une courbe de la classe $2n$;

Les pieds de ces perpendiculaires sont sur une courbe d'ordre $3n$.

54. Si de chaque point d'une courbe U_m on mène deux tangentes à une conique, les points milieux des cordes de contact sont sur une courbe de l'ordre $2m$;

Les perpendiculaires élevées par ces points sur les cordes de contact enveloppent une courbe de la classe $3m$;

Et les perpendiculaires élevées par les extrémités des cordes enveloppent une courbe de la classe $4m$.

55. Par chaque point a d'une courbe U_m on mène les tangentes d'une courbe $U^{n'}$: ces tangentes rencontrent la polaire du point a, relative à une conique, en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $2mn'$.

56. Les tangentes d'une courbe U^n rencontrent les diamètres d'une conique conjugués aux diamètres perpendiculaires aux tangentes en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $2n$, qui a trois points multiples d'ordre n; l'un est le centre de la conique, et les deux autres sont à l'infini sur ses axes.

57. Les normales d'une courbe U_m^n rencontrent les diamètres d'une conique dont les conjugués sont perpen-

diculaires aux normales, en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $m + 2n$, qui a un point multiple d'ordre $m + n$ au centre de la conique, et deux points multiples d'ordre n à l'infini sur les axes de la conique.

58. Si l'on circonscrit à une conique des quadrilatères dont deux sommets opposés soient deux points correspondants sur deux courbes homographiques U_m, $U_{m'}$, le lieu des deux autres sommets est une courbe d'ordre $4mm'$.

59. De chaque point d'une courbe U_m on mène deux tangentes à une conique, et l'on abaisse sur la corde de contact une oblique sous un angle de grandeur donnée, dans un sens de rotation déterminé :

1° Ces obliques enveloppent une courbe de la classe $2m$;

2° Leurs pieds sont sur une courbe de l'ordre $3m$.

CHAPITRE V.

PROPRIÉTÉS DIVERSES DES COURBES GÉOMÉTRIQUES.

60. En chaque point a d'une courbe U_m^n on mène la normale, laquelle rencontre la courbe en $(m-1)$ points : les tangentes en ces points rencontrent la tangente du point a en $(m-1)$ points dont le lieu est une courbe de l'ordre $n[n+2(m-2)]$.

61. Le lieu du sommet d'un angle droit dont un côté est tangent et l'autre est normal à une courbe U_m^n est une courbe de l'ordre $(n-1)(m+n)$.

62. Le lieu du sommet d'un angle droit dont les côtés sont normaux à une courbe U_m^n est une courbe de l'ordre $n(m+n-1)$.

63. Un angle droit tourne autour de son sommet : les tangentes aux points où un de ses côtés rencontre une

courbe U_m^n coupent l'autre côté sur une courbe d'ordre $m+n$.

64. Sur chaque tangente d'une courbe U^n se trouvent deux points correspondants dans deux figures homographiques : le lieu de ces points est une courbe de l'ordre $2n$.

65. Si de chaque point d'une conique on abaisse des normales sur deux courbes U_m^n, $U_{m'}^{n'}$, les cordes que ces normales interceptent deux à deux dans la conique enveloppent une courbe de la classe $2(m+n)(m'+n')$.

66. Les tangentes d'une courbe $U^{n'}$ coupent une courbe U_m^n en des points où l'on mène les normales : ces normales se coupent deux à deux sur une courbe de l'ordre $\frac{1}{2}n'[2m(m-1)+n(2m-3)]$.

67. Le lieu d'un point d'où l'on peut mener à deux courbes U^n, $U^{n'}$ deux tangentes faisant un angle de grandeur donnée, dans un sens de rotation déterminé, est une courbe de l'ordre $2nn'$, qui a deux points multiples d'ordre nn' aux deux points circulaires à l'infini.

68. Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une courbe U^n est une courbe de l'ordre $n(n-1)$, qui a deux points multiples d'ordre $\frac{n(n-1)}{2}$ aux deux points circulaires de l'infini, et qui passe par les $2n$ points de contact des tangentes de U^n, menées par ces deux points circulaires.

69. Les cordes qu'un angle de grandeur donnée, tournant autour de son sommet, intercepte dans une courbe U_m enveloppent une courbe de la classe $2m(m-1)$.

Lorsque l'angle est droit, la classe de la courbe est $m(m-1)$.

70. 1° Les cordes comprises entre deux courbes U_m, $U_{m'}$, qui sont vues d'un point O sous un angle droit, enveloppent une courbe de la classe $2mm'$.

2° Les cordes vues sous des angles qui ont la même bissectrice enveloppent uue courbe de la classe $2mm'$.

3° Les cordes qui ont leurs milieux sur une droite enveloppent une courbe de la classe $2mm'$.

71. Si par les points où les tangentes d'une courbe U^n rencontrent une courbe $U_{m'}$ on mène les perpendiculaires à ces tangentes, ces perpendiculaires enveloppent une courbe de la classe $2nm'$.

72. Si autour de deux points fixes on fait tourner deux rayons qui se correspondent homographiquement, les cordes qu'ils interceptent dans une courbe U_m enveloppent une courbe de la classe $2m(m-1)$.

73. Les milieux des segments interceptés par une courbe U_m sur les tangentes d'une courbe $U^{n'}$ sont sur une courbe de l'ordre $n'm(m-1)$.

74. Si sur chaque tangente d'une courbe U^n on prend les milieux des segments qui ont pour extrémités deux points de deux courbes $U_{m'}$, $U_{m''}$, ces points milieux sont sur une courbe de l'ordre $2m'm''n$.

75. Les cordes d'une courbe U_m qui ont leurs milieux sur une courbe $U_{m'}$ enveloppent une courbe de la classe $m'(m-1)$.

76. Par les points où les tangentes d'une courbe $U^{n'}$ rencontrent une courbe U_m, on mène des perpendiculaires à ces tangentes : ces perpendiculaires enveloppent une courbe de la classe $2mn'$, qui a une tangente multiple d'ordre mn' à l'infini.

77. On a une conique et deux tangentes fixes A, A', que chaque autre tangente rencontre en deux points a, a'; de chaque point a on mène les normales à une courbe U_m^n, et du point correspondant a' on mène les normales à une seconde courbe $U_{m'}^{n'}$: ces normales rencontrent les premières sur une courbe de l'ordre $2(m+n)(m'+n')$.

78. Lorsque deux courbes U_m^n, U'^n_m sont homographiques, les tangentes aux points de l'une rencontrent les normales aux points correspondants de l'autre sur une courbe de l'ordre $m + 2n$.

79. De deux points correspondants de deux courbes homographiques U_m, U'_m, on mène des tangentes à une courbe V^r, de la classe r, ces tangentes se coupent deux à deux en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $2mr(r-1)$.

80. Les tangentes aux courbes U^n, U'^n en leurs points correspondants se coupent sur une courbe d'ordre $2n$, qui a trois points multiples d'ordre n situés aux trois points qui, considérés comme appartenant à la première figure, sont eux-mêmes leurs homologues dans la seconde figure.

Observation. — La plupart des théorèmes précédents donnent lieu chacun à un ou deux autres, dans lesquels on prend pour hypothèse la conclusion du théorème primitif. On en a vu des exemples dans ma Communication du 10 avril (*Comptes rendus*, t. LXXII). Je n'ai point énoncé ici ces théorèmes que l'on forme sans difficulté, et qui, du reste, se démontrent aussi directement par le seul secours du Principe de correspondance. On conçoit qu'il en est de même de tous les théorèmes *corrélatifs*, auxquels suffit aussi la même méthode de raisonnement, et dont il est inutile de rapporter ici les énoncés.

DE QUELQUES EFFETS D'OPTIQUE RELATIFS A LA PERSPECTIVE;

Par M. Abel TRANSON.

Chacun sait que l'effet d'un tableau serait insoutenable à l'œil le moins exercé s'il pêchait contre les règles de la perspective; et il est assez connu que toute la théorie de la perspective se résume dans la règle unique de dessiner les objets par rapport à *un point de vue*, c'est-à-dire par rapport à une situation unique du spectateur.

Et pourtant il n'y a pas de lieu absolument unique et déterminé où l'on doive se placer pour apprécier un tableau. Si ce tableau est éclairé, comme il convient, par une lumière diffuse, l'artiste ou l'amateur qui l'étudient pourront, devront même, pour multiplier leurs impressions, s'approcher et s'éloigner successivement de la toile, s'en écarter à droite et à gauche.

D'ailleurs, les déplacements successifs de celui qui observe un tableau ne résultent pas de la difficulté qu'il y aurait à retrouver avec une précision mathématique la situation particulière où l'artiste s'est placé. Qu'on se rappelle, pour un instant, quelques tableaux d'une grande dimension, comme les *Noces de Cana*, par Paul Véronèse; le *Repas chez Simon le Pharisien*, du même auteur; ou des tableaux d'une grandeur bien moindre, comme la *Messe au chœur de Notre-Dame*, de Jouvenet; l'*Intérieur de l'église de Saint-Pierre, à Rome*, de Pannini; les *vues* de Canaletti, et mille autres toiles de toute dimension où la perspective joue un si grand rôle;

on conviendra que ces diverses compositions conservent toute leur harmonie, alors même que l'observateur se déplace dans un sens ou dans l'autre d'une distance comparable aux dimensions même de la toile.

Après tout, c'est le fait bien connu du tableau de l'archer qui vise à la fois à tous les spectateurs; le fait aussi de ce joli portrait, qui lorgne de tout côté et sourit « à tout le monde à la fois », dont s'étonne le bon *Joanetti,* dans le *Voyage autour de ma chambre.*

Voici comment ce fait vulgaire a été quelquefois expliqué : lorsque l'objet considéré est en relief, comme dans les créations de la statuaire, chaque déplacement de l'observateur lui découvre des parties qu'il ne voyait pas encore, et aussi lui cache des parties qui d'abord étaient visibles; de là le changement d'aspect, mais, s'il s'agit d'un tracé sur une surface sans épaisseur, les mêmes parties demeurent toujours visibles ; toujours elles conservent leurs rapports de situation et de grandeur. Ainsi, dit-on, il n'y a pas lieu de s'étonner qu'elles produisent toujours la même impression sur l'observateur, quoiqu'il change de place.

Cette explication est au moins insuffisante. Premièrement, il serait inexact de dire que l'impression du spectateur reste la même quand il change de place à l'égard d'un tableau. Car s'il se met dans une situation extrême, comme d'être à peu près dans le prolongement de la surface du tableau, le dessin apparaîtra complétement déformé, *anamorphosé.* Et comme cette apparence n'est que le dernier terme d'une déformation qui se fait par degrés insensibles, il est clair qu'à chaque situation nouvelle du spectateur correspond réellement une impression différente. En second lieu, il ne sert à rien de dire que toutes les parties du dessin conservent sur la toile les mêmes rapports de grandeur et de situation, car ce *n'est pas sur la toile qu'on les voit!*... Mais, c'est ici le nœud de la question.

En présence d'un tableau je ne vois pas la surface sur laquelle il est peint; je vois au delà d'elle un *relief idéal,* et c'est en cela même que consiste la *magie* de l'art. Je dis *au delà*, parce que telle est la condition à laquelle les artistes s'assujettissent universellement; mais par les règles même de la perspective certaines parties du sujet pourraient être figurées *au niveau* ou même *en avant* de la toile. Quelquefois déjà, dans les grandes compositions murales, des fragments de draperie et, çà et là, quelques personnages accessoires sont placés aux bords du cadre et en dépassent les limites. Mais que du centre même de la composition se projette en avant de la toile une figure principale, c'est ce que peut-être on n'a jamais tenté et d'où on pourrait, ce me semble, tirer un effet aussi grand qu'inattendu. Quoi qu'il en soit, je reviens à dire que l'impression que produit un tableau, c'est de faire voir au delà de la toile un *relief idéal.*

Donc, si je suis placé dans la situation à laquelle l'artiste a rapporté la perspective, je vois, en particulier, le relief qu'il a voulu représenter; mais, pour peu que je m'écarte de cette situation unique, je vois déjà un relief différent. Le spectacle que le tableau me présente se déplace au delà de la toile en même temps que moi-même je change de place en avant d'elle. En un mot, cette sorte d'illusion, plus ou moins grande, que fait naître une peinture est ce que les physiciens appellent un *phénomène de position,* précisément comme le phénomène de l'arc-en-ciel que deux observateurs voient au même moment sur la nuée, et qui n'est pas le même pour l'un et pour l'autre.

Pour rendre compte de cette contradiction apparente, que d'une part un tableau doive être dessiné comme étant vu d'un point unique, sous peine de produire un effet inacceptable, et que cependant une peinture conserve son harmonie étant vue de lieux sensiblement éloignés les uns des autres, il faut connaître d'après quelles lois ce relief idéal, dont j'ai parlé, varie avec les déplacements du spectateur. La connaissance de ces lois très-simples paraît propre à jeter quelque nouveau jour sur les ressources de la perspective, et peut-être à prémunir les artistes contre certaines erreurs qui ont été quelquefois commises dans la décoration intérieure des édifices.

La question peut être posée en ces termes : « Étant données les situations relatives du tableau et de l'observateur, à quel relief (idéal) correspond un dessin perspectif tracé sur ce tableau. »

C'est le problème inverse de celui que l'art de la perspective est appelé à résoudre, et qui consiste à déterminer le dessin quand on donne, avec un relief (effectif) à figurer, les situations respectives de ce relief, de l'observateur et du tableau.

Or ce problème inverse, considéré théoriquement, est tout à fait indéterminé, c'est-à-dire qu'une infinité de reliefs différents correspondent abstraitement (idéalement) à un même dessin perspectif vu d'un lieu donné; mais, pratiquement parlant, le problème est, au contraire, tout à fait déterminé. Grâce aux circonstances de la couleur, aux connaissances acquises du spectateur, surtout aux habitudes de notre organisme, si l'esprit conçoit une infinité de solutions possibles, l'œil n'en voit jamais qu'une.

C'est qu'il est impossible, par exemple, que des lignes architecturales tracées de façon à concourir en un même point du tableau n'obligent pas le spectateur, quelle que soit sa situation, à imaginer un système de droites parallèles, comme étant l'objet-relief représenté par ces lignes concourantes; seulement la direction commune des lignes *imaginées dans l'espace* varie avec la situation de l'observateur, et il est aisé de reconnaître que cette direction commune est, à chaque instant, celle de la droite qui joindrait son œil avec le point de concours des droites *tracées effectivement sur le tableau.*

Supposons, par exemple, que l'artiste ait figuré une galerie à colonnes, surmontée d'une voûte en berceau. Les socles des colonnes et leurs chapiteaux, la naissance de la voûte, la corniche, etc. offriront un ensemble de lignes parallèles à l'axe de la galerie. Or cette apparence subsistera quelque part que soit placé le spectateur. Il arrivera seulement que l'axe de la galerie paraîtra changer de direction, et ce changement sera soumis à la loi ci-dessus indiquée. De plus, si les colonnes ont été figurées comme étant également espacées, ainsi qu'il convient, elles garderont cette apparence; seulement les entre-colonnements paraîtront ou moindres ou plus grands, selon la place actuelle du spectateur, de sorte que si les colonnes sont reliées par des arcades latérales à la galerie, elles prendront l'apparence d'être surhaussées dans un cas et surbaissées dans l'autre. Mais ces variations sont de celles que l'œil peut subir sans qu'il en résulte aucun défaut d'harmonie dans l'aspect du tableau.

Considérons maintenant que tout ensemble architectural comporte au moins deux systèmes différents de directions parallèles, comme sont les systèmes de lignes horizontales relatives aux deux faces contiguës d'un même édifice.

Dans le relief que l'artiste a voulu représenter, ces deux faces contiguës et, par suite, les deux systèmes de lignes correspondantes étaient, je le suppose, rectangulaires. De sorte que, si l'effet optique d'un déplacement du spectateur tendait à leur faire attribuer une inclinaison mutuelle sensiblement différente de l'angle droit, l'œil répugnerait à une telle représentation comme étant défectueuse.

Or quel sera l'angle apparent des deux faisceaux de lignes parallèles? Il est aisé de répondre à cette question à l'aide du principe que nous avons posé ci-dessus pour fixer la direction apparente de chaque faisceau en particulier, car ce sera précisément l'angle qu'ont entre eux les deux rayons visuels menés aux deux points *de fuite* ou *points accidentels* relatifs à ces deux faisceaux.

Pour la situation par rapport à laquelle l'artiste a tracé le dessin perspectif, l'angle de ces deux rayons visuels est droit, puisque les deux directions qu'il a voulu figurer sont supposées rectangulaires; l'angle en question sera encore droit si l'œil du spectateur se déplace à la surface d'une sphère ayant pour diamètre la ligne qui joint, sur le tableau, les deux points de fuite; mais il deviendra obtus ou aigu, pour peu que l'œil soit à l'intérieur ou à l'extérieur de cette sphère. De là, ce me semble, une cause de perturbation inévitable.

Mais il faut considérer que si l'œil juge avec une grande précision tout défaut de rectitude dans le tracé d'une ligne droite, comme aussi, et presque au même degré, tout défaut de parallélisme dans un système de lignes droites, il n'est pas aussi sensible, à beaucoup près, dans l'appréciation d'un angle formé par deux rayons visuels. Ainsi, l'œil acceptera encore comme droit un tel angle, bien qu'il soit, en réalité, aigu ou obtus; et sa tolérance sous ce rapport pourra certainement aller à plusieurs degrés.

Ainsi, d'une part les lignes concourantes en un point du tableau, de quelque part qu'elles soient vues, donnent l'impression d'un système de droites parallèles, dont la direction commune est celle du rayon visuel mené à ce point de concours. De plus, si, pour une première situation du spectateur, une ligne a été représentée comme étant divisée dans un certain rapport, elle sera vue de tous les points de l'espace comme divisée de la même manière; seulement la grandeur absolue de ses parties paraîtra varier; et, d'autre part, l'œil n'ayant pas la faculté, ou tout au moins l'habitude, d'apprécier avec quelque précision la grandeur des angles visuels, l'altération de l'angle apparent entre les directions de deux faisceaux distincts, quoique réelle, reste inaperçue du spectateur qui se déplace, à moins toutefois que son déplacement ne soit considérable, parce qu'alors il y a anamorphose.

Et voilà comment il arrive qu'en se conformant aux règles de la perspective, c'est-à-dire en traçant son dessin par rapport à *un point de vue*, l'artiste produit une œuvre qui peut être considérée *simultanément* par une foule de spectateurs. Mais il faut remarquer que cette propriété extrêmement précieuse du dessin perspectif le suppose tracé sur une surface plane. On commettrait une grande erreur et on s'exposerait aux plus graves mécomptes si l'on espérait quelque résultat semblable de l'application des règles de la perspective au cas des représentations architecturales tracées sur une surface courbe. Sur une telle surface, les lignes droites ayant presque toujours pour perspectives des lignes courbes, il n'y a généralement pour les voir convenablement qu'une situation tout à fait unique.

L'artiste ne doit donc accepter la tâche de représenter sur une surface courbe les formes régulières de l'architecture, qu'autant qu'il lui sera possible de faire coïncider les lignes de l'édifice qu'il veut figurer avec les lignes réelles de la surface du tableau. On voit un heureux exemple de cette disposition dans la petite église des Carmes, de la rue de Vaugirard. Le sujet représenté est l'*Enlèvement du prophète Élie*. Le peintre a placé sa composition sur les parois d'une construction circulaire surmontée d'une voûte sphérique. Cette voûte est censée ouverte et offre aux regards le prophète enlevé au ciel. Le char n'est pas *de feu*, mais il est attelé de deux magnifiques et *ardents* coursiers. La paroi circulaire (cylindrique) a été conservée comme telle avec une très-simple décoration architecturale. Seulement à sa partie inférieure on a figuré une balustrade autour de laquelle sont groupés un grand nombre de personnages, parmi lesquels le disciple principal s'apprête à saisir le manteau du maître. Les conditions de l'art ayant été ici très-bien entendues, on peut, malgré la forme courbe des surfaces, contempler cette belle composition sans se placer à quelque point particulier du sol de l'édifice. Mais une autre église de Paris présente, en sens inverse, une curieuse confirmation de nos principes, c'est l'église Saint-Louis-d'Antin, de la rue Caumartin; là, derrière le maître-autel, sur la demi-sphère qui forme la partie supérieure d'une niche cylindrique, un artiste a représenté le Christ debout, tenant à la main sa croix; de côté et d'autre plusieurs saints et quelques instruments de la passion. Lorsqu'on se place au pied de l'autel, au centre de la composition, le dessin est correct; mais, il suffit de s'écarter d'un côté ou d'autre, de deux ou trois pas seulement, pour voir aussitôt la croix se courber comme un jonc flexible, les personnages accessoires tomber les uns sur les autres, le poteau de la flagellation s'incliner et menacer ruine, etc..

Nota. Cet article, dont je supprime quelques considérations relatives à la perspective théâtrale et qui avait été communiqué d'abord à la Société philomathique, a été depuis inséré dans la *Revue générale de l'Architecture* *et des Travaux publics* (VIII^e vol., 1849). Malgré ou plutôt à cause de cette date ancienne, j'ai cru utile de le reproduire dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, dont la plupart des lecteurs n'ont sans doute pas la faculté de consulter la magnifique publication de M. César Daly. Ce m'est d'ailleurs l'occasion d'indiquer une circonstance où, même sur une surface plane, l'application des règles de la perspective ne saurait produire un effet satisfaisant, précisément parce qu'il y manquerait cette *indifférence de situation du spectateur* dont j'ai exposé le principe. Je veux parler de la circonstance où il s'agirait de représenter sur une voûte plate ou seulement très-surbaissée, des constructions verticales. De pareilles tentatives se voient quelquefois dans nos salles de spectacles; j'en ai remarqué plusieurs dans la décoration de quelques édifices italiens, et notamment dans une salle à manger bien connue de ceux qui ont visité le palais André Doria, à Gènes. Enfin M. Victor Cousin en cite un exemple mémorable dans son livre : *Du vrai, du bien et du beau*. Il rappelle l'existence d'une célèbre peinture de Philippe de Champagne : « Qu'est devenu, dit-il, ce fameux crucifix qu'il avait peint à la voûte de l'église des Carmélites, chef-d'œuvre de perspective, qui sur un plan horizontal paraissait perpendiculaire. » L'inconvénient inévitable de telles peintures, c'est de ne pouvoir être vues sans désavantage, que d'un seul point, d'une seule position. Pour peu que l'on s'éloigne de cette position, de ce point, les lignes que l'artiste aura voulu représenter verticales, s'inclineront dans un sens ou dans l'autre. Aussi, sans vouloir mettre en doute la perfection de l'œuvre très-justement regrettée par M. Cousin, on peut affirmer, que, s'éloignant ou s'approchant tant soit peu du mur de soutènement de la voûte où le crucifix était peint, on le voyait se renverser en arrière dans le premier cas; et dans le second, tomber en avant, comme pour écraser le spectateur.

DEUX THÉORÈMES SUR LA PARABOLE;

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

I.

THÉORÈME. — *Si trois points* A, B, C, *pris sur une parabole, sont tels, que le triangle* ABC *ait son centre de gravité sur l'axe de la courbe, les normales en* A, B, C *à la parabole se coupent en un même point, et réciproquement.*

Soit

$$Y^2 = 2pX$$

l'équation de la parabole; celle de la normale en un point quelconque xy sera

$$yX + pY = y(p + x).$$

Cela posé, considérons les normales aux trois points (x, y), (x', y'), (x'', y''). Pour qu'elles concourent en un même point, il faut et il suffit que le triangle qu'elles forment ait une surface nulle. Or, au signe près, cette surface a pour expression

$$\frac{1}{2p^3(y'-y'')(y''-y)(y-y')} \times \begin{vmatrix} y & p & py + xy \\ y' & p & py' + x'y' \\ y'' & p & py'' + x''y'' \end{vmatrix}^2;$$

donc il faut et il suffit que l'on ait

$$\begin{vmatrix} y & p & py + xy \\ y' & p & py' + x'y' \\ y'' & p & py'' + x''y'' \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien

$$\begin{vmatrix} y & 1 & xy \\ y' & 1 & x'y' \\ y'' & 1 & x''y'' \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien, en remplaçant x, x', x'' par les quantités proportionnelles y^2, y'^2, y''^2,

$$\begin{vmatrix} y & 1 & y^3 \\ y' & 1 & y'^3 \\ y'' & 1 & y''^3 \end{vmatrix} = 0,$$

ou enfin

$$\begin{vmatrix} 1 & y & y^3 \\ 1 & y' & y'^3 \\ 1 & y'' & y''^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Mais ce dernier déterminant est égal à

$$(y' - y'')(y'' - y)(y - y')(y + y' + y'');$$

et comme les trois premiers facteurs sont différents de zéro, il faut et il suffit que l'on ait

$$y + y' + y'' = 0,$$

égalité qui exprime précisément que le centre de gravité du triangle ABC est sur l'axe de la parabole.

II.

Théorème. — *Si trois points d'une parabole (dont aucun d'eux n'est le sommet) sont tels, que les droites qui les joignent au sommet de la courbe aient, par rapport à l'axe, des coefficients angulaires dont la somme soit nulle, les trois centres de courbure correspondants sont en ligne droite, et réciproquement.*

Soit

$$Y^2 = 2pX$$

l'équation de la parabole; le centre de courbure correspondant au point (x, y) aura pour coordonnées

$$p + 3x, \quad -\frac{y^3}{p^2}.$$

Cela posé, considérons les centres de courbure correspondant aux trois points (x, y), (x', y'), (x'', y''). Pour qu'ils soient en ligne droite, il faut et il suffit que le triangle dont ils sont les sommets ait une surface nulle. Or cette surface est exprimée, au signe près, par

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & p + 3x & -\dfrac{y^3}{p^2} \\ 1 & p + 3x' & -\dfrac{y'^3}{p^2} \\ 1 & p + 3x'' & -\dfrac{y''^3}{p^2} \end{vmatrix}.$$

Donc il faut et il suffit que l'on ait

$$\begin{vmatrix} 1 & p + 3x & -\dfrac{y^3}{p^2} \\ 1 & p + 3x' & -\dfrac{y'^3}{p^2} \\ 1 & p + 3x'' & -\dfrac{y''^3}{p^2} \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y^3 \\ 1 & x' & y'^3 \\ 1 & x'' & y''^3 \end{vmatrix} = 0,$$

ou enfin

$$\begin{vmatrix} 1 & y^2 & y^3 \\ 1 & y'^2 & y'^3 \\ 1 & y''^2 & y''^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ce dernier déterminant est égal à

$$(y'-y'')(y''-y)(y-y')(y'y''+y''y+yy').$$

Comme les trois premiers facteurs sont différents de zéro, il faut et il suffit que l'on ait

$$y'y''+y''y+yy'=0,$$

ou bien

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{y'}+\frac{1}{y''}=0.$$

Or, pour tout point de la parabole,

$$\frac{1}{Y}=\frac{Y}{2pX};$$

donc la condition nécessaire et suffisante pour que les trois centres soient en ligne droite se réduit à

$$\frac{y}{x}+\frac{y'}{x'}+\frac{y''}{x''}=0,$$

égalité qui exprime précisément que les droites considérées ont des coefficients angulaires dont la somme est nulle.

NOTE SUR UN SYSTÈME VARIABLE DE TROIS DIRECTIONS RECTANGULAIRES;

PAR M. PAINVIN,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Lyon.

---

1. *On suppose que les cosinus des angles de trois directions rectangulaires sont des fonctions données et déterminées d'un paramètre arbitraire;*

Je me propose d'établir les propositions suivantes :

1° *Une de ces directions peut être regardée comme constamment parallèle à la tangente d'une courbe* (S) ; *les coordonnées d'un point quelconque de cette courbe dépendent du paramètre arbitraire et d'une fonction entièrement arbitraire de ce paramètre.*

2° *Les deux autres directions ne coïncideront pas, en général, avec la normale principale et la binormale de la courbe* (S) ; *pour que la coïncidence ait lieu, il faut qu'une certaine relation soit identiquement vérifiée ; on a alors, entre les cosinus des trois directions rectangulaires et leurs différentielles, les relations que M. J. Serret a données pour le cas des courbes à double courbure, et on ne les a que dans ce cas.*

2. Je désignerai par

$$\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma;\quad \cos l,\ \cos m,\ \cos n;\quad \cos p,\ \cos q,\ \cos r$$

les cosinus des angles, avec les axes de coordonnées, des trois directions considérées; ces cosinus sont des fonctions données d'un paramètre arbitraire t.

Comme ces trois directions sont rectangulaires, les relations suivantes devront avoir lieu identiquement, quel que soit t :

$$(\mathrm{I})\quad \left\{\begin{aligned}
&\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,\\
&\cos^2 l + \cos^2 m + \cos^2 n = 1,\\
&\cos^2 p + \cos^2 q + \cos^2 r = 1;\\
&\cos\alpha\cos l + \cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n = 0,\\
&\cos\alpha\cos p + \cos\beta\cos q + \cos\gamma\cos r = 0,\\
&\cos l\cos p + \cos m\cos q + \cos n\cos r = 0.
\end{aligned}\right.$$

On sait que les relations (I) entraînent comme conséquence nécessaire les suivantes :

$$
(\text{I } bis)\quad \begin{cases}
\cos^2\alpha + \cos^2 l + \cos^2 p = 1, \\
\cos^2\beta + \cos^2 m + \cos^2 q = 1, \\
\cos^2\gamma + \cos^2 n + \cos^2 r = 1; \\
\cos\alpha\cos\beta + \cos l\cos m + \cos p\cos q = 0, \\
\cos\alpha\cos\gamma + \cos l\cos n + \cos p\cos r = 0, \\
\cos\beta\cos\gamma + \cos m\cos n + \cos q\cos r = 0.
\end{cases}
$$

3. Nous pouvons regarder la direction (α, β, γ) comme constamment parallèle à la tangente d'une certaine courbe (S).

En effet, si x, y, z sont les coordonnées d'un point quelconque de cette courbe, et si ds est l'élément d'arc correspondant, on aura

$$dx = \cos\alpha\, ds, \quad dy = \cos\beta\, ds, \quad dz = \cos\gamma\, ds,$$

ou

$$dx = \varphi_1(t)\, ds, \quad dy = \varphi_2(t)\, ds, \quad dz = \varphi_3(t)\, ds,$$

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ étant des fonctions connues de t; or donnons arbitrairement la valeur

$$s = \mathrm{F}(t), \quad \text{ou} \quad ds = \mathrm{F}'(t)\, dt;$$

on conclura de là les valeurs des coordonnées x, y, z, lesquelles dépendront de la fonction $\mathrm{F}(t)$ arbitrairement choisie.

4. Désignons, pour la courbe (S), par λ, μ, ν les angles, avec les axes de coordonnées, de la binormale; par ξ, η, ζ ceux de la normale principale (α, β, γ sont ceux de la tangente); on aura, comme on sait, les relations (*Calcul*

différentiel de M. J. Serret, t. I, p. 408),

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} d\cos\alpha &= \cos\xi\, d\sigma,\\ d\cos\beta &= \cos\eta\, ds,\\ d\cos\gamma &= \cos\zeta\, d\sigma;\\ d\cos\lambda &= \cos\xi\, d\tau,\\ d\cos\mu &= \cos\eta\, d\tau,\\ d\cos\nu &= \cos\zeta\, d\tau;\\ d\cos\xi &= -\cos\alpha\, d\sigma - \cos\lambda\, d\tau,\\ d\cos\eta &= -\cos\beta\, d\sigma - \cos\mu\, d\tau,\\ d\cos\zeta &= -\cos\gamma\, d\sigma - \cos\nu\, d\tau;\end{aligned}\right.$$

$$(1\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} d\sigma &= \varepsilon\sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2}, \quad \varepsilon = \pm 1,\\ d\tau &= \varepsilon_1\sqrt{(d\cos\lambda)^2 + (d\cos\mu)^2 + (d\cos\nu)^2}, \quad \varepsilon_1 = \pm 1.\end{aligned}\right.$$

Les directions (α, β, γ), (λ, μ, ν), (ξ, η, ζ) étant rectangulaires, on a

$$\begin{aligned} \varepsilon'\cos\lambda &= \cos\beta\cos\zeta - \cos\gamma\cos\eta,\\ \varepsilon'\cos\mu &= \cos\gamma\cos\xi - \cos\alpha\cos\zeta, \quad \varepsilon' = \pm 1,\\ \varepsilon'\cos\nu &= \cos\alpha\cos\eta - \cos\beta\cos\xi,\end{aligned}$$

d'où l'on conclut, en ayant égard au premier groupe des relations (1),

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \varepsilon' d\sigma\cos\lambda &= \cos\beta\, d\cos\gamma - \cos\gamma\, d\cos\beta,\\ \varepsilon' d\sigma\cos\mu &= \cos\gamma\, d\cos\alpha - \cos\alpha\, d\cos\gamma,\\ \varepsilon' d\sigma\cos\nu &= \cos\alpha\, d\cos\beta - \cos\beta\, d\cos\alpha.\end{aligned}\right.$$

En différentiant les relations (2), il vient

$$\begin{aligned} \varepsilon'(d\sigma\, d\cos\lambda + \cos\lambda\, d^2\sigma) &= \cos\beta\, d^2\cos\gamma - \cos\gamma\, d^2\cos\beta,\\ \varepsilon'(d\sigma\, d\cos\mu + \cos\mu\, d^2\sigma) &= \cos\gamma\, d^2\cos\alpha - \cos\alpha\, d^2\cos\gamma,\\ \varepsilon'(d\sigma\, d\cos\nu + \cos\nu\, d^2\sigma) &= \cos\alpha\, d^2\cos\beta - \cos\beta\, d^2\cos\alpha;\end{aligned}$$

on déduit de là, en multipliant par $\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$, en ajoutant et en ayant égard au deuxième groupe des relations (1),

$$\begin{aligned}\varepsilon' d\sigma\, d\tau = \cos\xi(\cos\beta\, d^2\cos\gamma - \cos\gamma\, d^2\cos\beta)\\ + \cos\eta(\cos\gamma\, d^2\cos\alpha - \cos\alpha\, d^2\cos\gamma)\\ + \cos\zeta(\cos\alpha\, d^2\cos\beta - \cos\beta\, d^2\cos\alpha);\end{aligned}$$

puis, remplaçant $\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$, par les valeurs que fournit le premier groupe des relations (1), on a

$$(3)\qquad \varepsilon' d\sigma^2 d\tau = -\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ d\cos\alpha & d\cos\beta & d\cos\gamma\\ d^2\cos\alpha & d^2\cos\beta & d^2\cos\gamma\end{vmatrix}.$$

Ainsi on a, *en définitive*, les formules suivantes, qui donnent $\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$; $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$; $d\sigma$, $d\tau$, en fonction de $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, et des différentielles premières et secondes de ces mêmes quantités :

$$(\text{II})\left\{\begin{array}{ll}(1^\circ) & \cos\xi = \dfrac{d\cos\alpha}{d\tau},\quad \cos\eta = \dfrac{d\cos\beta}{d\sigma},\quad \cos\zeta = \dfrac{d\cos\gamma}{d\sigma};\\ (2^\circ) & \left\{\begin{array}{l}\varepsilon'\cos\lambda = \dfrac{\cos\beta\, d\cos\gamma - \cos\gamma\, d\cos\beta}{d\sigma},\\ \varepsilon'\cos\mu = \dfrac{\cos\gamma\, d\cos\alpha - \cos\alpha\, d\cos\gamma}{d\sigma},\\ \varepsilon'\cos\nu = \dfrac{\cos\alpha\, d\cos\beta - \cos\beta\, d\cos\alpha}{d\sigma};\end{array}\right.\\ (3^\circ) & \varepsilon\, d\sigma = \sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2};\\ (4^\circ) & \left\{\begin{array}{c}\varepsilon'\overline{d\sigma}^2 d\tau = -\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ d\cos\alpha & d\cos\beta & d\cos\gamma\\ d^2\cos\alpha & d^2\cos\beta & d^2\cos\gamma\end{vmatrix}.\\ \varepsilon = \pm 1,\quad \varepsilon' = \pm 1.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Il ne faut pas oublier que $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$; $d\cos\alpha,\ldots$;

$d^2 \cos\alpha, \ldots$ doivent vérifier identiquement les relations

$$(\text{II } bis) \quad \left\{ \begin{aligned} &\text{css}^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \\ &\cos\alpha\, d\cos\alpha \;+ \cos\beta\, d\cos\beta \;+ \cos\gamma\, d\cos\gamma \;= 0, \\ &\cos\alpha\, d^2\cos\alpha + \cos\beta\, d^2\cos\beta + \cos\gamma\, d^2\cos\gamma = -\,d\sigma^2. \end{aligned} \right.$$

5. Ceci posé, si l'on mène, par l'origine des coordonnées, des parallèles aux quatre directions

$$(\lambda, \mu, \nu), \quad (\xi, \eta, \zeta); \quad (l, m, n), \quad (p, q, r),$$

ces quatre parallèles sont dans un même plan perpendiculaire à la droite (α, β, γ).

Désignons par i l'angle de la demi-droite (l, m, n) avec la demi-droite (λ, μ, ν) ; on peut disposer de ε et ε', de manière que cet angle soit positif et aigu ; on peut encore disposer de ε et ε', de manière que l'angle des deux demi-droites (p, q, r) et (ξ, η, ζ) soit également positif et aigu. On aura, dès lors, les égalités

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} &\cos\lambda\cos l + \cos\mu\cos m + \cos\nu\cos n = \cos i, \\ &\cos\xi\cos l + \cos\eta\cos m + \cos\zeta\cos n = -\sin i; \\ &\cos\lambda\cos p + \cos\mu\cos q \;+ \cos\nu\cos r \;= \sin i, \\ &\cos\xi\cos p + \cos\eta\cos q \;+ \cos\zeta\cos r \;= \cos i. \end{aligned} \right.$$

Les deux premières égalités (4), jointes à la relation qui exprime que la direction (l, m, n) est perpendiculaire à la direction (α, β, γ), donnent le système des trois équations

$$\begin{aligned} &\cos\alpha\cos l + \cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n = 0, \\ &\cos\lambda\cos l + \cos\mu\cos m + \cos\nu\cos n = \cos i, \\ &\cos\xi\cos l + \cos\eta\cos m \;+ \cos\zeta\cos n = -\sin i. \end{aligned}$$

En ajoutant ces trois égalités respectivement multipliées par $\cos\alpha$, $\cos\lambda$, $\cos\xi$; puis par $\cos\beta$, $\cos\mu$, $\cos\eta$, et enfin par $\cos\gamma$, $\cos\nu$, $\cos\zeta$, on trouve

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos l &= \cos\lambda\cos i - \cos\xi\sin i,\\ \cos m &= \cos\mu\cos i - \cos\eta\sin i,\\ \cos n &= \cos\nu\cos i - \cos\zeta\sin i.\end{aligned}\right.$$

Les deux dernières égalités (4), jointes à la relation qui exprime que la direction (p, q, r) est perpendiculaire à la direction (α, β, γ), donnent le système des trois équations

$$\begin{aligned} \cos\alpha\cos p + \cos\beta\cos q + \cos\gamma\cos r &= 0,\\ \cos\lambda\cos p + \cos\mu\cos q + \cos\nu\cos r &= \sin i,\\ \cos\xi\cos p + \cos\eta\cos q + \cos\zeta\cos r &= \cos i.\end{aligned}$$

On déduit, comme précédemment, de ces trois équations

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos p &= \cos\lambda\sin i + \cos\xi\cos i,\\ \cos q &= \cos\mu\sin i + \cos\eta\cos i,\\ \cos r &= \cos\nu\sin i + \cos\zeta\cos i.\end{aligned}\right.$$

En remplaçant dans les équations (4) $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$; $\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$ par leurs valeurs (II), on trouve

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} \varepsilon' d\sigma\cos i &= \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ d\cos\alpha & d\cos\beta & d\cos\gamma\\ \cos l & \cos m & \cos n\end{vmatrix}\\ &= \varepsilon'(\cos p\, d\cos\alpha + \cos q\, d\cos\beta + \cos r\, d\cos\gamma),\end{aligned}\right.$$

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} \varepsilon' d\sigma\sin i &= \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ d\cos\alpha & d\cos\beta & d\cos\gamma\\ \cos p & \cos q & \cos r\end{vmatrix}\\ &= -\varepsilon'(\cos l\, d\cos\alpha + \cos m\, d\cos\beta + \cos n\, d\cos\gamma).\end{aligned}\right.$$

A l'aide des valeurs (II), on pourra exprimer $\cos l$, $\cos m$, $\cos n$; $\cos p$, $\cos q$, $\cos r$ en fonction de $\cos\alpha$, $\cos\beta$,

$\cos\gamma$, de leurs différentielles premières et secondes et de l'angle i; je ne transcrirai pas ces formules.

On constatera sans difficulté que les relations (I) sont identiquement vérifiées par les valeurs (5) et (6), en tenant compte, bien entendu, des relations (II) et (II *bis*).

6. Différentions maintenant les équations (5) et (6), on a

$$d\cos l = \cos i\, d\cos\lambda - \sin i\, d\cos\xi - (\cos\lambda \sin i + \cos\xi \cos i)\, di,$$
$$\dots\dots\dots\dots,$$
$$d\cos p = \sin i\, d\cos\lambda + \cos i\, d\cos\xi + (\cos\lambda\cos i - \cos\xi \sin i)\, di,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

En ayant égard aux équations (1), (5) et (6), ces dernières égalités donnent les valeurs définitives

$$(\mathrm{III}) \begin{cases} (1^\circ) & \begin{cases} d\cos l = \sin i \cos\alpha\, d\sigma + \cos p (d\tau - di), \\ d\cos m = \sin i \cos\beta\, d\sigma + \cos q (d\tau - di), \\ d\cos n = \sin i \cos\gamma\, d\sigma + \cos r (d\tau - di); \end{cases} \\ (2^\circ) & \begin{cases} d\cos p = -\cos i \cos\alpha\, d\sigma - \cos l (d\tau - di), \\ d\cos q = -\cos i \cos\beta\, d\sigma - \cos m (d\tau - di), \\ d\cos r = -\cos i \cos\gamma\, d\sigma - \cos n (d\tau - di). \end{cases} \end{cases}$$

7. On voit, par les équations (5) et (6), que les directions (l, m, n), (p, q, r) ne coïncident pas avec la binormale et la normale principale de la courbe touchée par la droite (α, β, γ).

Cette coïncidence aura lieu si l'angle i est nul, c'est-à-dire si l'on a identiquement

$$(9) \qquad \cos l\, d\cos\alpha + \cos m\, d\cos\beta + \cos n\, d\cos\gamma = 0.$$

Cette condition est évidemment suffisante; on constate facilement qu'elle est nécessaire, en introduisant dans les équations (5) et (6) les hypothèses

$$\cos l = \cos\lambda, \quad \cos m = \cos\mu, \quad \cos n = \cos\nu;$$
$$\cos p = \cos\xi, \quad \cos q = \cos\eta, \quad \cos r = \cos\zeta.$$

8. Lorsque l'identité (9) a lieu, c'est-à-dire lorsque i est nul, les égalités (5) et (6) et (III) donnent lieu aux relations suivantes :

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} d\cos\alpha &= \cos p\, d\sigma,\\ d\cos\beta &= \cos q\, d\sigma,\\ d\cos\gamma &= \cos r\, d\sigma;\\ d\cos l &= \cos p\, d\tau,\\ d\cos m &= \cos q\, d\tau,\\ d\cos n &= \cos r\, d\tau;\\ d\cos p &= -\cos\alpha\, d\sigma - \cos l\, d\tau,\\ d\cos q &= -\cos\beta\, d\sigma - \cos m\, d\tau,\\ d\cos r &= -\cos\gamma\, d\sigma - \cos n\, d\tau; \end{aligned}\right.$$

ce sont les relations caractéristiques des courbes à double courbure, relations énoncées et établies par M. J. Serret.

Je vais enfin démontrer que le système des trois directions rectangulaires

$$(\alpha,\ \beta,\ \gamma),\quad (l,\ m,\ n),\quad (p,\ q,\ r)$$

ne peut donner lieu à des relations caractéristiques de la forme précédente, savoir :

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &\left\{\begin{aligned} d\cos\alpha &= \cos p\, d\sigma',\\ d\cos\beta &= \cos q\, d\sigma',\\ d\cos\gamma &= \cos r\, d\sigma';\end{aligned}\right.\\ &\left\{\begin{aligned} d\cos l &= \cos p\, d\tau',\\ d\cos m &= \cos q\, d\tau',\\ d\cos n &= \cos r\, d\tau';\end{aligned}\right.\\ &\left\{\begin{aligned} d\cos p &= -\cos\alpha\, d\sigma' - \cos l\, d\tau',\\ d\cos q &= -\cos\beta\, d\sigma' - \cos m\, d\tau',\\ d\cos r &= -\cos\gamma\, d\sigma' - \cos n\, d\tau',\end{aligned}\right. \end{aligned}\right.$$

que lorsqu'on a identiquement

$$(9)\qquad \cos l\, d\cos\alpha + \cos m\, d\cos\beta + \cos n\, d\cos\gamma = 0,$$

c'est-à-dire lorsque les trois directions considérées constituent la tangente, la binormale et la normale principale d'une courbe à double courbure.

En ajoutant la somme des carrés des équations du premier groupe (11), on trouve d'abord

$$(12)\qquad d\sigma'^2 = d\sigma^2.$$

Le second groupe des égalité admises (11) peut s'écrire, en ayant égard aux relations (6) et (II),

$$\begin{aligned}
&\sin i \cos\alpha\, d\sigma + (\cos\lambda \sin i + \cos\xi \cos i)(d\tau - di - d\tau') = 0,\\
&\sin i \cos\beta\, d\sigma + (\cos\mu \sin i + \cos\eta \cos i)(d\tau - di - d\tau') = 0,\\
&\sin i \cos\gamma\, d\sigma + (\cos\nu \sin i + \cos\zeta \cos i)(d\tau - di - d\tau') = 0.
\end{aligned}$$

Ajoutons ces dernières égalités, après les avoir respectivement multipliées par $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$; puis par $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, et enfin par $\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$, on trouve

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\sin i\, d\sigma = 0,\\
&\sin i (d\tau - di - d\tau') = 0,\\
&\cos i (d\tau - di - d\tau') = 0.
\end{aligned}\right.$$

Les équations (12) et (13) donnent évidemment

$$i = 0,\quad d\sigma' = d\sigma,\quad d\tau' = d\tau;$$

c'est la proposition qu'il s'agissait de démontrer.

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 948

(voir 2e série, t. VIII, p. 277);

PAR M. O. CALLANDREAU,
Étudiant en Mathématiques, à Angoulême.

L'aire d'un polygone de m côtés est égale à la somme des $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ triangles que l'on peut former avec $m-1$ de ses côtés combinés deux à deux; chacun de ces triangles ayant deux de ses côtés égaux aux côtés correspondants du polygone et dirigés de la même manière. (G. BELLAVITIS.)

Le théorème qui fait l'objet de la question 948 est une généralisation d'une formule qui se trouve dans les *Nouvelles Annales* (*voir* 2e série, t. VIII, p. 311).

Soit un polygone de m côtés, désignons ses sommets par les lettres A, B, C, D,....

Si du sommet A, par exemple, on mène les diagonales, on le partagera en $m-2$ triangles.

Le premier triangle, ou celui qui a pour sommets A, B, C, a pour valeur, d'après la formule mentionnée plus haut,

$$\mathrm{ABC} = \frac{i}{4}(\mathrm{AB}\operatorname{conj}\mathrm{BC} - \mathrm{BC}\operatorname{conj}\mathrm{AB}).$$

Le deuxième triangle, ou celui qui a pour sommets A, C, D, a pour valeur

$$\mathrm{ACD} = \frac{i}{4}(\mathrm{AC}\operatorname{conj}\mathrm{CD} - \mathrm{CD}\operatorname{conj}\mathrm{AC});$$

or $AC = AB + BC$, d'après une règle fondamentale du calcul des équipollences.

Donc ACD sera égal à la somme

$$\frac{i}{4}(AB \operatorname{conj} CD - CD \operatorname{conj} AB) + \frac{i}{4}(BC \operatorname{conj} CD - CD \operatorname{conj} BC).$$

La 1^re^ partie de la somme représentera le triangle formé avec CD et une ligne équipollente à AB (ou égale à AB et dirigée de la même manière).

La 2^e^ partie représentera le triangle formé avec CD et l'équipollente à BC.

. . . .

De même le $(m-2)^e$ triangle sera égal à la somme de $m-2$ triangles formés par la combinaison du $(m-1)^e$ côté avec les équipollents des 1^er^, 2^e^,..., $(m-2)^e$ côtés : AB, BC,....

De là il suit que l'aire du polygone sera égale à la somme de

$$1, 2, 3, \ldots, m-2 \quad \text{ou} \quad \frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

triangles formés avec $(m-1)$ de ses côtés combinés deux à deux, chacun de ces triangles ayant deux de leurs côtés égaux aux côtés correspondants du polygone, et dirigés de la même manière.

Note. — La même question a été résolue, sans employer le calcul des équipollences, par M. Moret-Blanc, professeur au lycée du Havre, et M. Kruschwitz, étudiant à Berlin.

Question 958

(voir 2^e^ série, t. VIII, p. 480);

PAR M. O. CALLANDREAU,

Étudiant en Mathématiques à Angoulême.

Faire passer par un point une circonférence qui coupe, sous des angles donnés, deux circonférences données.

Détermination graphique du centre et du rayon de la circonférence cherchée.

Nombre des solutions du problème.

Je m'appuie sur ce principe, que la transformée par rayons vecteurs réciproques d'un cercle sur lequel se trouve l'origine est une droite perpendiculaire au diamètre origine.

Cela posé, le problème étant supposé résolu, je transforme la figure par rayons vecteurs réciproques, en prenant pour origine le point donné, et pour puissance le carré de la tangente menée du point à l'un des cercles donnés.

L'un des cercles ne change pas par la transformation, l'autre se transforme en un nouveau cercle, qu'on construit facilemement par la règle et le compas.

Enfin, le cercle qui doit couper les deux cercles donnés sous des angles donnés se transforme en une droite, d'après ce qui a été dit au commencement. On voit en outre, par les propriétés de la transformation en question, que cette droite coupera les deux cercles transformés sous les mêmes angles que le cercle cherché.

Réciproquement, si une droite coupe les deux cercles transformés sous les angles donnés dans la figure primitive, la droite sera remplacée par un cercle qui coupera les deux cercles primitifs sous les mêmes angles.

Le problème est donc ramené à mener une sécante à deux cercles telle, qu'elle coupe les deux cercles sous des angles donnés : problème qui se ramène évidemment à mener une tangente commune à deux cercles.

La droite une fois trouvée, il ne restera plus qu'à abaisser sur elle du point donné une perpendiculaire, et à achever la construction du cercle primitif, ce qui n'offre aucune difficulté.

Le problème : « mener une tangente commune à deux cercles » ayant en général quatre solutions, on voit que le problème primitif admet en général quatre solutions.

Le nombre des solutions du problème primitif, et le nombre des solutions du problème : « mener une tangente commune aux deux cercles, » sera toujours le même.

Note. — Nous avons reçu de M. Émile Laclais, à Paris, une solution analogue.

Question 962

(voir 2e série, t. VIII, p. 528);

PAR M. A. BURTAIRE,
Maître auxiliaire au lycée de Nancy.

Par un point P *pris dans le plan d'une conique, on mène une sécante qui coupe en* A *la courbe et en* B *un certain diamètre fixe. Par les points* A *et* B, *on mène des parallèles au diamètre et à la direction conjuguée. On demande le lieu de leurs points d'intersection.*

CAS PARTICULIER. — *La conique est un cercle et le point fixe est pris sur une tangente. Forme de la courbe.*

(A. GUÉBHARD.)

J'examinerai séparément les trois cas où la conique donnée est une ellipse, une hyperbole ou une parabole. Cela permettra de donner moins d'extension à la remarque que l'auteur a faite sur le degré de l'équation du lieu. Elle n'est du quatrième degré que dans le cas des coniques bifocales; elle est du second degré dans le cas de la parabole.

1° *Cas de l'ellipse.* — Je prends pour axes coordonnés le diamètre fixe OX et son conjugué OY.

Soient α, β les coordonnées du point P. Une sécante qui y passe a pour équation

$$(1) \qquad y - \beta = m(x - \alpha),$$

la parallèle au conjugué du diamètre fixe, menée par le point B où la sécante coupe l'axe OX

$$m(x-\alpha)+\beta=0. \tag{2}$$

Les deux parallèles au diamètre menées des points de rencontre de cette sécante avec l'ellipse

$$a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2=0 \tag{3}$$

sont les racines de l'équation obtenue par l'élimination de x entre (1) et (3).

L'équation du lieu s'obtiendra donc en éliminant m entre cette équation résultante et (2). On a ainsi

$$a^2\beta^2y^2+b^2[\beta x-y(x-\alpha)]^2-a^2b^2\beta^2=0. \tag{4}$$

2° *Cas de l'hyperbole.* — L'équation du lieu se déduit de la précédente par le changement de b^2 en $-b^2$:

$$a^2\beta^2y^2-b^2[\beta x-y(x-\alpha)]^2+a^2b^2\beta^2=0. \tag{5}$$

3° *Cas de la parabole.* — Je rapporte cette courbe au diamètre OX, et à la tangente au point où il la coupe. Son équation sera alors

$$y^2-2px=0. \tag{3'}$$

Les équations (1) et (2) sont maintenues.

Par un raisonnement identique à celui qui est relatif à l'ellipse, on arrive, pour l'équation du lieu, à l'équation suivante :

$$\beta y^2+2pxy-2p\alpha y-2p\beta x=0. \tag{6}$$

Ici ce n'est donc plus une courbe du quatrième degré, mais une hyperbole dont le centre est au point

$$x=\alpha-\frac{\beta^2}{p},\quad y=\beta.$$

L'une des asymptotes a pour équation

$$y = \beta,$$

l'autre

$$\beta y + 2px + (\beta^2 - 2p\alpha) = 0.$$

Il est à remarquer que si le point donné était sur la parabole, la seconde asymptote passerait par l'origine.

Cas particulier. — Si la conique est un cercle, les deux demi-diamètres conjugués a et b sont égaux, et l'équation (4) devient, après la suppression du facteur commun,

$$\beta^2 y^2 + [\beta x - y(x - \alpha)]^2 - a^2\beta^2 = 0,$$

que l'on peut écrire aussi

$$(4') \quad \beta^2(x^2 + y^2 - a^2) + y(x - \alpha)[y(x - \alpha) - 2\beta x] = 0.$$

Cette dernière forme indique que le lieu passe par les deux points communs au cercle proposé et à l'hyperbole équilatère représentée par l'expression entre crochets égalée à zéro. Cette hyperbole passe par l'origine, et a pour asymptotes les parallèles aux axes menées du point P. La courbe passe aussi par les deux extrémités du diamètre fixe. Elle est tangente aux deux parallèles au diamètre fixe menées des extrémités de celui qui est perpendiculaire, et rencontre celui-ci en des points également distants du centre. En outre, elle est tangente aux perpendiculaires au diamètre proposé élevées des points où les tangentes au cercle issues de P rencontrent cet axe.

Discussion et forme de la courbe.

(a). Le lieu est limité lorsque le point P est en dehors des deux tangentes au cercle parallèles au diamètre fixe.

Lorsque le point P est à l'intérieur de ces deux parallèles, la courbe se compose de deux portions qui s'étendent à l'infini de deux côtés et qui ont pour asymptote commune la parallèle au diamètre fixe menée du point P.

(*b*). Si ce point intérieur aux parallèles est extérieur au cercle, les deux branches de chaque portion de courbe vont à l'infini d'un même côté, différent d'ailleurs pour chacune des portions.

(*c*). Si ce point intérieur aux parallèles est aussi intérieur au cercle, les deux branches de chaque partie de la courbe vont à l'infini de deux côtés opposés.

(*d*). Si le point P se trouve sur le cercle, les deux portions se rejoignent et la courbe qui est continue se compose de deux branches infinies de côtés différents, et traversant l'asymptote qui fait aussi partie du lieu.

(*e*). Si le point est sur l'une des tangentes parallèles au diamètre fixe, la courbe est continue et composée de deux branches allant à l'infini d'un même côté.

(*f*), (*g*), (*h*). Comme cas particuliers de (*a*), (*c*) et (*e*), le point fixe peut être sur le diamètre conjugué du proposé. Alors le diamètre perpendiculaire à l'axe fixe est un axe de symétrie.

(*i*). Enfin, si le point se trouvait sur le diamètre fixe, le lieu se réduirait à la perpendiculaire élevée à ce diamètre par le point P. L'analyse donne aussi ce diamètre qui ne convient pas à la question géométrique.

Dans le cas (*h*), l'asymptote fait aussi partie du lieu, ainsi que dans le cas (*d*).

Note. — La même question a aussi été traitée par MM. Fould, élève de Mathématiques spéciales à Paris; Émile Laclais, à Paris; Michaud et Laverlochère, du collége Stanislas; L. Bossut, de Lyon; Willière, professeur à Arlon; C. Harkema, étudiant à Saint-Pétersbourg.

Question 1010

(voir 2ᵉ série, t. IX, p. 384);

PAR M. A. MORET-BLANC,
Professeur au lycée du Havre.

Trouver les nombres dont les carrés s'écrivent toujours de la même façon dans tout système de numération analogue au système décimal, dont la base est plus grande que 4.

Soit

$$ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots + kx + l$$

un nombre écrit dans le système dont la base est $x > 4$. Pour que son carré s'écrive de la même manière, quel que soit x, il faut et il suffit que, dans le développement de

$$(ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots + kx + l)^2,$$

chaque coefficient soit inférieur à la plus petite base, c'est-à-dire à 5, ce qui aura lieu si ces trois conditions sont remplies :

1° Qu'aucun chiffre ne soit supérieur à 2;

2° Que la somme des produits de deux chiffres consécutifs et des chiffres qui en sont équidistants ne soit pas > 2;

3° Que le carré d'un chiffre plus la somme des doubles produits des chiffres qui en sont équidistants ne soit pas supérieure à 4.

Voici les nombres de 1, 2, 3, 4 chiffres qui satisfont à ces conditions :

1, 2; 10, 11, 12, 20, 21; 100, 101, 102, 110, 111, 120, 200, 201, 210; 1000, 1001, 1002, 1010, 1011, 1012, 1020, 1021, 1100, 1101, 1102, 1110, 1111, 1200, 1201, 2000, 2001, 2002, 2010, 2011, 2012, 2100, 2102.

EXERCICES POUR LA LICENCE

(suite, voir même tome, p. 324);

PAR M. W. H. BESANT,
du collége de Saint-Jean à Cambridge.

7. Une parabole roule symétriquement sur une parabole égale; trouver le lieu du foyer et prouver que le lieu du foyer est la cissoïde $y^2(2a-x)=x^3$.

8. Une développante de cercle roule sur une ligne droite; la roulette du centre du cercle est une parabole.

9. L'ellipse $\frac{c}{r}=1+e\cos\theta$ roule sur une ligne droite; le lieu du foyer est donné par l'équation

$$e^2=1+\frac{2c}{y}\frac{dx}{ds}+\frac{c^2}{y^2};$$

et le lieu du centre par

$$y^4\left(\frac{ds}{dx}\right)^2=(a^2+b^2)y^2-a^2b^2,$$

$2a$ et $2b$ étant les axes.

10. La roulette, sur une droite, du centre d'une hyperbole équilatère est

$$\frac{dx}{dy}=\frac{y^2}{\sqrt{a^4-y^4}}.$$

11. Une hélice roule sur une droite qu'elle touche toujours, tandis que son axe se meut dans un plan. Un point de l'hélice trace extérieurement une cycloïde.

12. Une cycloïde roule sur une droite. Le lieu de son sommet est donné par les équations

$$x=2a(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi),\quad y=2a\varphi\sin\varphi,$$

l'origine étant le point de la ligne par lequel passe le sommet.

(*La suite prochainement.*)

NOMBRE DES SYSTÈMES DE PLANS QUE PEUT REPRÉSENTER UNE ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ ;

PAR M. PAINVIN.

1. *Quel est le nombre des* SYSTÈMES DE DEUX PLANS *que peut représenter l'équation*

$$(\mathrm{I})\quad \left\{\begin{aligned} &a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44}t^2\\ &+ 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{14}xt\\ &+ 2a_{23}yz + 2a_{24}yt + 2a_{34}zt = 0,\end{aligned}\right.$$

les coefficients de cette équation étant des fonctions entières du degré m par rapport à trois indéterminées α, β, γ.

Posons

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}, \quad \text{et} \quad \Delta_{rs} = \frac{d\Delta}{da_{rs}},$$

pour que l'équation (I) représente un système de deux plans distincts, il faut vérifier les *dix équations*

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{rrrr} \Delta_{44}=0, & \Delta_{43}=0, & \Delta_{42}=0, & \Delta_{41}=0,\\ & \Delta_{33}=0, & \Delta_{32}=0, & \Delta_{31}=0,\\ & & \Delta_{22}=0, & \Delta_{21}=0,\\ & & & \Delta_{11}=0;\end{array}\right.$$

ces dix équations équivalent à trois relations distinctes, mais toutes néanmoins doivent être vérifiées.

2. Considérons d'abord les deux équations

$$\Delta_{44}=0, \quad \Delta_{43}=0,$$

lesquelles peuvent s'écrire

$$(2)\qquad \begin{cases} \Delta_{44} = a_{13}\,\mathrm{M} + a_{23}\,\mathrm{N} + a_{33}\,\mathrm{P} = 0, \\ \Delta_{43} = a_{14}\,\mathrm{M} + a_{24}\,\mathrm{N} + a_{34}\,\mathrm{P} = 0, \end{cases}$$

après avoir posé

$$(3)\qquad (\Gamma)\quad \begin{cases} \mathrm{M} = a_{21}\,a_{32} - a_{22}\,a_{31}, \\ \mathrm{N} = a_{12}\,a_{31} - a_{11}\,a_{32}, \\ \mathrm{P} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2. \end{cases}$$

Regardons les indéterminées α, β, γ comme les coordonnées d'un point de l'espace; les équations (2), toutes deux du degré $3m$, représenteront une courbe de l'ordre $9m^2$. Cette courbe se compose de la courbe ($\mathrm{M} = 0$, $\mathrm{N} = 0$, $\mathrm{P} = 0$) et d'une courbe complémentaire.

Les équations $\mathrm{M} = 0$, $\mathrm{N} = 0$ définissent une courbe d'ordre $4m^2$, laquelle se compose aussi de deux courbes, l'une ($a_{31} = 0$, $a_{32} = 0$), d'ordre m^2, qui ne se trouve pas sur la surface $\mathrm{P} = 0$; et l'autre, d'ordre $3m^2$, qui appartient à la surface $\mathrm{P} = 0$, puisque l'équation $\mathrm{P} = 0$ est une conséquence des équations $\mathrm{M} = 0$, $\mathrm{N} = 0$, tant que a_{31} et a_{32} ne sont pas nuls.

Ainsi les trois équations

$$\mathrm{M} = 0, \quad \mathrm{N} = 0, \quad \mathrm{P} = 0,$$

définissent une courbe (Γ) d'ordre $3m^2$.

Par conséquent, les deux équations $\Delta_{44} = 0$, $\Delta_{43} = 0$ déterminent une courbe complexe composée :

1° D'une courbe (C) d'ordre $6m^2$;

2° D'une courbe (Γ) d'ordre $3m^2$.

Ajoutons maintenant que la courbe (C), et celle-là seulement, appartient aux quatre surfaces

$$(4)\qquad (\mathrm{C})\quad \Delta_{44} = 0, \quad \Delta_{43} = 0, \quad \Delta_{42} = 0, \quad \Delta_{41} = 0.$$

On a, en effet, les identités

$$a_{11}\Delta_{41}+a_{12}\Delta_{42}+a_{13}\Delta_{43}+a_{14}\Delta_{44}=0,$$
$$a_{21}\Delta_{41}+a_{22}\Delta_{42}+a_{23}\Delta_{43}+a_{24}\Delta_{44}=0,$$
$$a_{31}\Delta_{41}+a_{32}\Delta_{42}+a_{33}\Delta_{43}+a_{34}\Delta_{44}=0.$$

Or, pour les différents points de la courbe (C) (2), ces identités se réduisent aux égalités

$$\begin{array}{lcll} a_{11}\Delta_{41}+a_{12}\Delta_{42}=0, & & M\Delta_{41}=0, & M\Delta_{42}=0,\\ a_{22}\Delta_{41}+a_{22}\Delta_{42}=0, & \text{d'où l'on déduit} & N\Delta_{41}=0, & N\Delta_{42}=0,\\ a_{31}\Delta_{41}+\alpha_{32}\Delta_{42}=0, & & P\Delta_{41}=0, & P\Delta_{42}=0; \end{array}$$

par conséquent, pour tous les points de la courbe (C) (2), on a

$$\Delta_{41}=0,\quad \Delta_{42}=0,$$

puisque M, N, P sont alors différents de zéro, tandis que si M, N, P sont nuls, les égalités qui précèdent sont vérifiées sans que Δ_{41} et Δ_{42} soient nuls.

Des égalités (4) il résulte évidemment

$$\Delta=0. \tag{5}$$

3. Maintenant prenons les points communs à la courbe (C), d'ordre $6m^2$, et à la surface $\Delta_{33}=0$, d'ordre $3m$; le nombre de ces points sera

$$N=18m^3. \tag{6}$$

Eu égard à la relation bien connue

$$\Delta\frac{d^2\Delta}{da_{rs}\,da_{r_1s_1}}=\frac{d\Delta}{da_{rs}}\frac{d\Delta}{da_{r_1s_1}}-\frac{d\Delta}{da_{rs_1}}\frac{d\Delta}{da_{r_1s_1}},$$

on a pour les points en question

$$\Delta_{rr}\Delta_{33}-\Delta_{r3}^2=0,\quad \text{c'est-à-dire}\quad \Delta_{r3}=0,$$

puisque Δ_{33} est nul. Ainsi, en définitive, les $18m^3$ solutions (6) vérifient les *sept équations*

$$(7)\qquad \begin{cases} \Delta_{44}=0, & \Delta_{43}=0, \quad \Delta_{42}=0, \quad \Delta_{41}=0, \\ & \Delta_{33}=0, \quad \Delta_{32}=0, \quad \Delta_{31}=0. \end{cases}$$

Il nous reste à prendre, parmi ces solutions, celles qui vérifient les *trois dernières équations*

$$(8)\qquad \Delta_{22}=0, \quad \Delta_{21}=0, \quad \Delta_{11}=0.$$

Or, eu égard aux équations (7), les relations fondamentales relatives aux déterminants donnent lieu aux égalités

$$(9)\qquad \begin{cases} a_{11}\Delta_{21}+a_{12}\Delta_{22}=0, \\ a_{21}\Delta_{21}+a_{22}\Delta_{22}=0, \\ a_{31}\Delta_{21}+a_{32}\Delta_{22}=0, \\ a_{41}\Delta_{31}+a_{42}\Delta_{22}=0. \end{cases}$$

Tant qu'on n'aura pas

$$(10)\qquad \frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{21}}{a_{22}}=\frac{a_{31}}{a_{32}}=\frac{a_{41}}{a_{42}}=k,$$

les égalités (9) donneront

$$\Delta_{21}=0, \quad \Delta_{22}=0, \quad \text{d'où l'on conclura} \quad \Delta_{11}=0.$$

4. Nous allons maintenant démontrer qu'il y a $4m^3$ points dont les coordonnées vérifient les équations (10); puis, que les équations (9) sont vérifiées par ces $4m^3$ solutions, sans que Δ_{21} et Δ_{22} soient nuls; et enfin, qu'en ces $4m^3$ points la courbe (C) touche la surface $\Delta_{33}=0$.

1° Le nombre des solutions des équations (10) est égal à $4m^3$.

En effet, ces équations peuvent s'écrire

$$a_{11}-ka_{12}=0, \quad a_{21}-ka_{22}=0,$$
$$a_{31}-ka_{32}=0, \quad a_{41}-ka_{42}=0.$$

Si l'on élimine α, β, γ entre ces quatre équations, on aura [*voir* mon *Analytique*, *Géométrie de l'espace*, n° 1258, (1°)] une équation du degré

$$1m^3 + 1m^3 + 1m^3 + 1m^3 \quad \text{ou} \quad 4m^3,$$

par rapport à k; à chaque valeur de k correspond une seule solution commune aux quatre équations qui précèdent; donc, etc.

2° Pour chacune de ces $4m^3$ solutions, les équations (9) sont vérifiées sans que Δ_{21} et Δ_{22} soient nuls.

En effet, la première, par exemple, de ces équations devient, eu égard aux relations (10),

$$k \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$k \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - k \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$0 = 0.$$

3° Si l'on a égard aux relations (10), les équations (7) et l'équation $\Delta_{33} = 0$ sont évidemment vérifiées. Ajoutons qu'en ces points la courbe (C) touche la surface $\Delta_{33} = 0$, c'est-à-dire que les plans tangents au point (α, β, γ), [ou $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ en introduisant des coordonnées homogènes], commun aux trois surfaces

$$\Delta_{41} = 0, \quad \Delta_{42} = 0, \quad \Delta_{33} = 0,$$

se coupent suivant une même droite.

En tenant compte des relations (10), on trouve sans difficulté, pour les équations de ces trois plans tangents :

Pour la surface $\Delta_{41} = 0$

$$\begin{aligned} X = x & \left[A\left(\frac{da_{12}}{d\alpha} - k\frac{da_{22}}{d\alpha}\right) + B\left(\frac{da_{13}}{d\alpha} - k\frac{da_{23}}{d\alpha}\right) + C\left(\frac{da_{14}}{d\alpha} - k\frac{da_{24}}{d\alpha}\right)\right] \\ & + y\left[A\left(\frac{da_{12}}{d\beta} - k\frac{da_{22}}{d\beta}\right) + B\left(\frac{da_{13}}{d\beta} - k\frac{da_{23}}{d\beta}\right) + C\left(\frac{da_{14}}{d\beta} - k\frac{da_{24}}{d\beta}\right)\right] \\ & + z[\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots] + t[\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots] = 0, \end{aligned}$$

Pour la surface $\Delta_{42} = 0$

$$\begin{aligned} Y = x & \left[A\left(\frac{da_{11}}{d\alpha} - k\frac{da_{12}}{d\alpha}\right) + kB\left(\frac{da_{13}}{d\alpha} - k\frac{da_{23}}{d\alpha}\right) + kC\left(\frac{da_{14}}{d\alpha} - k\frac{da_{24}}{d\alpha}\right)\right] \\ & + y\left[A\left(\frac{da_{11}}{d\beta} - k\frac{da_{12}}{d\beta}\right) + kB\left(\frac{da_{13}}{d\beta} - k\frac{da_{23}}{d\beta}\right) + kC\left(\frac{da_{14}}{d\beta} - k\frac{da_{24}}{d\beta}\right)\right] \\ & + z[\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots] + t[\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots] = 0, \end{aligned}$$

Pour la surface $\Delta_{33} = 0$

$$\begin{aligned} Z = x & \left(\frac{da_{11}}{d\alpha} - 2k\frac{da_{12}}{d\alpha} + k^2\frac{da_{22}}{d\alpha}\right) \\ & + y\left(\frac{da_{11}}{d\beta} - 2k\frac{da_{12}}{d\beta} + k^2\frac{da_{22}}{d\beta}\right) + z(\ldots) + t(\ldots) = 0. \end{aligned}$$

Dans ces équations on a posé

$$\begin{aligned} A &= a_{23}a_{34} - a_{33}a_{24}, \\ B &= a_{32}a_{24} - a_{22}a_{34}, \\ C &= a_{22}a_{33} - a_{23}^2. \end{aligned}$$

Or on constate immédiatement qu'on a l'identité

$$kX - Y + AZ = 0;$$

ce qui démontre la propriété énoncée.

5. De là résulte que les $4m^3$ solutions du système (10) comptent pour $8m^3$ points communs à la courbe $C = 0$ et à la surface $\Delta_{33} = 0$; or ces $8m^3$ solutions ne vérifient

pas les trois dernières équations du système (1). Par conséquent :

Le système (1) *admet* $10m^3$ *solutions, c'est-à-dire que l'équation* (I) *donne* $10m^3$ *systèmes de deux plans distincts.*

QUESTIONS DE LICENCE;

PAR M. J. GRAINDORGE,
Répétiteur à l'École des Mines de Liége.

Trouver le mouvement d'un point matériel sollicité par deux forces dirigées vers un centre : l'une attractive et proportionnelle à la distance, l'autre répulsive et en raison inverse du cube de la distance. On suppose la vitesse initiale perpendiculaire au rayon vecteur initial.

Prenons pour origine le point fixe, et pour axe polaire le rayon vecteur initial que nous représenterons par r_0; désignons par v_0 la vitesse initiale, et appliquons les deux formules connues

$$(1)\qquad P = \frac{c^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\right),$$

$$(2)\qquad v^2 = c^2\left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2\right].$$

dans lesquelles nous ferons $\frac{1}{r} = u$, ce qui donnera, dans le cas actuel,

$$(3)\qquad c^2u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right) = \frac{\mu}{u} - \mu' u^3.$$

De cette formule, on déduit

$$c^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} = \frac{\mu}{u^3} - (c^2 + \mu')u,$$

et, en intégrant,

$$(4) \qquad c^2 \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = 2k - \frac{\mu}{u^2} - (c^2 + \mu')u^2;$$

on détermine la constante $2k$ par les conditions initiales du mouvement : pour $\theta = 0$, on a

$$r = r_0, \quad \text{ou} \quad u = u_0;$$

d'où

$$c^2 \left(\frac{du}{d\theta}\right)_0^2 = 2k - \frac{\mu}{u_0^2} - (c^2 + \mu')u_0^2.$$

On déduira $\left(\frac{du}{d\theta}\right)_0$ de la formule (2), en faisant $\theta = 0$,

$$v_0^2 = c^2 \left[u_0^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)_0^2\right].$$

Par suite,

$$(5) \qquad 2k = v_0^2 + \frac{\mu}{u_0^2} + \mu' u_0^2,$$

et l'équation (4) devient

$$c^2 \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = v_0^2 + \frac{\mu}{u_0^2} + \mu' u_0^2 - \frac{\mu}{u^2} - (c^2 + \mu')u^2.$$

Pour simplifier les notations, nous garderons la constante $2k$, et nous déduirons de la formule (4)

$$d\theta = -\frac{cu\,du}{\sqrt{2ku^2 - (c^2 + \mu')u^4 - \mu}}.$$

Pour intégrer cette expression, posons $u^2 = z$, et il vient

$$d\theta = -\frac{c}{2} \frac{dz}{\sqrt{2kz - (c^2 + \mu')z^2 - \mu}},$$

ou bien

$$d\theta = -\frac{c}{2}\,\frac{\sqrt{c^2+\mu'}\,dz}{\sqrt{k^2-\mu(c^2+\mu')}\sqrt{1-\frac{[(c^2+\mu')z-k]^2}{k^2-\mu(c^2+\mu')}}};$$

par conséquent,

$$\theta = \omega + \frac{c}{2\sqrt{c^2+\mu'}}\arccos\frac{(c^2+\mu')z-k}{\sqrt{k^2-\mu(c^2+\mu')}},$$

ou

$$\frac{(c^2+\mu')z-k}{\sqrt{k^2-\mu(c^2+\mu')}} = \cos\frac{2\sqrt{c^2+\mu'}}{c}(\theta-\omega).$$

L'équation de la trajectoire est donc

$$(6)\quad \frac{1}{r^2} = \frac{k}{c^2+\mu'} + \frac{\sqrt{k^2-\mu(c^2+\mu')}}{c^2+\mu'}\cos\frac{2\sqrt{c^2+\mu'}}{c}(\theta-\omega),$$

ω étant un angle constant, qui, dans le cas actuel, sera nul, puisque le rayon vecteur initial coïncide avec l'axe polaire. La vitesse initiale étant perpendiculaire au rayon vecteur initial, on a

$$c = r_0 v_0,$$

et l'on trouvera, après quelques réductions,

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r_0^2}\cos^2\frac{\sqrt{v_0^2 r_0^2+\mu'}}{v_0 r_0}\theta + \frac{\mu r_0^2}{v_0^2 r_0^2+\mu'}\sin^2\frac{\sqrt{v_0^2 r_0^2+\mu'}}{v_0 r_0}\theta.$$

En posant $\frac{\sqrt{v_0^2 r_0^2+\mu'}}{v_0 r_0} = \alpha$, l'équation de la trajectoire prend la forme

$$(7)\qquad r^2 = \frac{\alpha^2 v_0^2 r_0^2}{\alpha^2 v_0^2\cos^2\alpha\theta + \mu r_0^2\sin^2\alpha\theta}.$$

La formule

$$(8)\qquad r^2\,d\theta = c\,dt$$

nous donne

$$v_0 r_0 dt = \frac{\alpha^2 v_0^2 r_0^2}{\alpha^2 v_0^2 \cos^2\alpha\theta + \mu r_0^2 \sin^2\alpha\theta} d\theta,$$

d'où, en intégrant,

$$t + \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \text{arc tang} \left(\frac{r_0\sqrt{\mu}}{\alpha v_0} \text{tang}\,\alpha\theta \right),$$

ou

$$\text{tang}\,\alpha\theta = \frac{\alpha v_0}{r_0\sqrt{\mu}} \text{tang}(t + \varepsilon)\sqrt{\mu}.$$

Mais, pour $t = 0$, on a $\theta = 0$; donc $\varepsilon = 0$, et il vient

(9) $$\text{tang}\,\alpha\theta = \frac{\alpha v_0}{r_0\sqrt{\mu}} \text{tang}(t\sqrt{\mu}).$$

En remplaçant $d\theta$ par sa valeur dans (8), on trouve

$$dt = \frac{r\,dr}{\sqrt{-(c^2 + \mu') + 2kr^2 - \mu r^4}},$$

ou, en posant $r^2 = z$, et intégrant

$$t + \varepsilon' = \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \text{arc cos} \frac{k - \mu z}{\sqrt{k^2 - \mu(c^2 + \mu')}}.$$

On déduit de là

$$\mu r^2 = \frac{1}{2}\left(v_0^2 + \mu r_0^2 + \frac{\mu'}{r_0^2}\right) - \frac{1}{2}\left(v_0^2 - \mu r_0^2 + \frac{\mu'}{r_0^2}\right) \cos^2(t + \varepsilon')\sqrt{\mu},$$

ou bien

$$\mu r^2 = \left(v_0^2 + \frac{\mu'}{r^2}\right) \sin^2(t + \varepsilon')\sqrt{\mu} + \mu r_0^2 \cos^2(t + \varepsilon')\sqrt{\mu}.$$

La constante ε' est déterminée en observant que, pour $t = 0$, $r = 0$; donc $\varepsilon' = 0$, et il vient

(10) $$\mu r^2 = \alpha^2 v_0^2 \sin^2 t\sqrt{\mu} + \mu r_0^2 \cos^2 t\sqrt{\mu}.$$

Discussion. — Le nombre α peut être entier, fractionnaire, ou bien incommensurable; d'ailleurs, il est plus grand que l'unité, puisque $\alpha = \frac{\sqrt{v_0^2 r_0^2 + \mu'}}{v_0 r_0}$. Nous supposerons $\mu r_0^3 - \alpha^2 v_0^2 > 0$.

Premier cas. — Lorsque α est entier, on voit facilement que la trajectoire est une *rosace fermée*, ayant 2α maximums égaux au rayon vecteur initial $OA = r_0$, et $2a$ minimums qui ont pour valeur commune $OB = \frac{\alpha v_0}{\sqrt{\mu}}$.

Deuxième cas. — α fractionnaire et égal à $\frac{p}{q}$.

1° Si q est pair, le point matériel revient au point de départ pour $\theta = q\pi$; la courbe a p maximums égaux à r_0, et p minimums égaux à $\frac{\alpha v_0}{\sqrt{\mu}}$.

2° Si q est impair, le point matériel revient au point de départ pour $\theta = 2q\pi$, et la courbe a $2p$ maximums et $2p$ minimums. Elle est fermée dans les deux cas.

Troisième cas. — α *incommensurable.*

Le point matériel ne revient jamais au point de départ; car il faudrait que l'on eût

$$\frac{n\pi}{2\alpha} = 2k\pi, \quad \text{ou} \quad n = 4k\alpha,$$

n et k étant des nombres entiers, ce qui est impossible, puisque, par hypothèse, α est incommensurable. La trajectoire est donc une courbe que l'on peut, par analogie, appeler *rosace spirale.*

Remarque. — Il est facile de voir que la trajectoire est la transformée d'une courbe tracée sur un cône de révolution autour de l'axe des z, cette courbe ayant pour projection une ellipse sur le plan des xy, et le sommet du cône étant au centre de l'ellipse. L'angle au sommet du cône est donné par la formule $\sin\gamma = \frac{1}{\alpha} = \frac{v_0 r_0}{\sqrt{v_0^2 r_0^2 + \mu'}}$.

DE L'HÉLICE OSCULATRICE;

PAR M. CHARLES RUCHONNET (de Lausanne).

L'hélice tracée sur un cylindre circulaire droit est une courbe éminemment simple entre les courbes gauches, car elle est la même en tous ses points. A ce titre, il y a intérêt à la mettre en contact aussi intime que possible avec les autres courbes gauches, tout comme la droite et le cercle, le plan et la sphère. Mais il est nécessaire, au préalable, de rappeler deux ou trois formules dont nous aurons besoin.

Soient R et S les rayons de première et de seconde courbure de l'hélice, r le rayon de la section droite du cylindre, et α l'inclinaison constante des tangentes de l'hélice sur le plan de cette section; on connaît, ou l'on établit aisément les deux relations

(1) $$R = \frac{r}{\cos^2\alpha},$$

(2) $$\tang\alpha = \frac{R}{S},$$

et l'on en déduit

(3) $$r = \frac{RS^2}{R^2 + S^2}.$$

L'égalité (1) montre que, pour qu'on puisse tracer sur un cylindre donné une hélice dont le rayon du cercle osculateur ait une valeur donnée R, il suffit que r soit plus petit que R. Il y a donc une infinité d'hélices qui ont le même cercle osculateur. Les relations (2) et (3) montrent que, si l'on veut construire une hélice dont les deux rayons de courbure aient des valeurs données R et S, le problème a toujours une solution, et, comme α est nécessairement compris entre 0 et 90 degrés, que cette solution est unique.

Ceci posé, considérons une courbe gauche quelconque. Soient M, M' deux de ses points infiniment voisins, et ρ, σ les rayons de première et de seconde courbure au point M. Par ce point faisons passer une hélice. Afin de rendre le contact aussi intime que possible, disposons la de manière qu'elle ait en M même tangente et même plan osculateur que la courbe. Par le point M', menons un plan perpendiculaire à la tangente commune en M : il coupe l'hélice en un point N', et nous compterons la distance des deux courbes suivant M'N'. Cette longueur est du second ordre seulement si elles n'ont pas au point M le même cercle osculateur; nous supposerons donc qu'on ait $R = \rho$, c'est-à-dire que l'hélice soit bien l'une quelconque de celles où r et α sont liés par la relation qu'on déduit de l'équation (1) en changeant R en ρ.

Pour obtenir une expression de la grandeur M'N', faisons usage des projections de la courbe donnée et de l'hélice sur le plan osculateur commun. Soient m', n' les points où ces projections sont coupées par le plan considéré tout à l'heure (*). Ce même plan coupe la tangente et le cercle osculateur communs en des points t et k. Soit enfin c le pied de la perpendiculaire abaissée de N' sur M'm'. Le triangle M'N'c, rectangle en c, donne

$$(4) \qquad M'N' = \sqrt{\overline{N'c}^2 + \overline{M'c}^2}.$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

La détermination des deux longueurs qui figurent sous le radical sera fondée sur quelques théorèmes que je vais rappeler, et pour la démonstration desquels je renvoie au *Traité de Calcul différentiel*, par M. J. Bertrand, comme à l'ouvrage le plus répandu.

I. La distance d'une courbe gauche au plan osculateur, dans le voisinage du point de contact, est une quantité du troisième ordre, qui est égale au cube de l'arc divisé par six fois le produit des deux rayons de courbure. Par conséquent, $M'm'$ est égal à $\frac{1}{6}\frac{\overline{\text{arc}\,MM'}^3}{\rho\sigma}$, et, comme on a par hypothèse $R = \rho$, $N'n'$ est égal à $\frac{1}{6}\frac{\overline{\text{arc}\,MN'}^3}{\rho S}$.

II. A et B étant deux points d'une courbe plane infiniment voisins, ω désignant le rayon de courbure en A, et $d\omega$ l'accroissement que reçoit ω quand on passe du premier de ces points au second; la distance de B au cercle osculateur en A est une grandeur du troisième ordre (l'arc AB étant considéré comme du premier) qui a pour expression $\frac{d\omega}{6\omega}\overline{\text{arc}\,AB}^2$.

III. L'accroissement $d\omega$ est en général du premier ordre, mais il peut arriver, en des points exceptionnels et isolés, qu'il soit du second. Il résulte du précédent théorème que la distance de B au cercle osculateur en A est alors d'un ordre supérieur au troisième.

IV. Une courbe gauche et sa projection sur le plan osculateur ont au point de contact même cercle osculateur.

V. Désignons, comme plus haut, par M, M' deux points d'une courbe gauche infiniment voisins, et par m'

la projection de M' sur le plan osculateur en M. Soit, au point M', $\rho + d\rho$ le rayon du cercle osculateur de la courbe gauche; le rayon du cercle osculateur de sa projection est, en m', égal aussi à $\rho + d\rho$, à une quantité près du second ordre.

Nous retournons maintenant à l'équation (4). Considérons la première des deux quantités qui figurent sous le radical du second membre. A cause de $N'c = m'n'$, on a

$$(5)\qquad N'c = m'k - n'k.$$

Posons $\text{arc}\,MM' = ds$, $\text{arc}\,Mm' = ds'$. La courbe MM' et sa projection Mm' ont même cercle osculateur au point M (IV), et si nous désignons par $d\rho'$ l'accroissement que reçoit le rayon de courbure de la projection quand on passe de M à m', on a (II)

$$m'k = \frac{1}{6}\,\frac{d\rho'\,ds'^2}{\rho^2};$$

mais ds et ds' sont évidemment égaux, et il en est de même (V) de $d\rho$ et $d\rho'$, donc

$$m'k = \frac{1}{6}\,\frac{d\rho\,ds^2}{\rho^2}.$$

Le cercle osculateur ne variant pas sur l'hélice d'un point à un autre, il est en N' précisément égal à ρ, et, dès lors, au point n' de la projection de l'hélice, il ne diffère de ρ que d'une quantité du second ordre (V). Par conséquent, sur la courbe Mn', le rayon de courbure ne croît de M à n' que d'une quantité du second ordre. Il suit de là que $n'k$ est d'un ordre supérieur au troisième (III); il est donc négligeable par rapport à $m'k$ qui est du troisième ordre, et les équations (5) et (6) donnent alors

$$N'c = \frac{1}{6}\,\frac{d\rho\,ds^2}{\rho^2}.$$

Telle est la valeur de la première des deux quantités qui figurent au second membre de l'équation (4) ci-dessus. L'autre ne saurait être d'un ordre inférieur au troisième, car elle est égale à la différence de deux longueurs $M'm'$ et $N'n'$ qui sont toutes deux du troisième ordre (I).

La distance de la courbe à l'hélice est donc du troisième ordre pour toutes les hélices qui ont avec la courbe le cercle osculateur commun.

Parmi les droites qui rencontrent une courbe en un point donné, il en est une, la tangente, qui dans les environs de ce point est infiniment plus voisine de la courbe que toutes les autres; de même, parmi les cercles, il y en a un, le cercle osculateur, qui près du point de contact serre la courbe d'infiniment plus près que tous les autres, et le plan ainsi que la sphère présentent la même particularité. Mais l'hélice n'offre rien de semblable; il existe une infinité d'hélices dont la distance à la courbe est du troisième ordre, et parmi elles il ne s'en trouve aucune où cette distance soit d'un ordre supérieur.

Toutefois, l'une de ces hélices est, sinon infiniment plus voisine, du moins plus voisine de la courbe que toutes les autres. On la nomme *hélice osculatrice,* et nous l'obtiendrons en réduisant à son minimum la valeur de $M'N'$ donnée par l'équation (4).

Des deux quantités qui figurent au second membre de cette équation, la première, nous venons de le voir, a une valeur constante, en sorte qu'il n'y a lieu de considérer que la seconde, $M'c$. On a

$$M'c = M'm' - N'n'.$$

Les valeurs de $M'm'$, $N'n'$ ont été données plus haut (I); on peut y remplacer les arcs MM', MN'

par Mt; les substituant alors dans l'équation (7), il vient

$$M'c = \frac{1}{6}\frac{\overline{Mt}^3}{\rho}\left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{S}\right).$$

On voit par cette égalité que si l'hélice satisfait à la condition $S = \sigma$, $M'c$ s'annule, ou, pour parler exactement, est d'un ordre supérieur au troisième, et que ceci n'a lieu pour aucune autre valeur de S. Il existe toujours une hélice dont les rayons de première et de seconde courbure sont respectivement égaux à ρ et à σ, elle est unique, et c'est là l'hélice osculatrice. D'après ce que nous avons vu plus haut, sa distance à la courbe dans le voisinage du point de contact est égale à $\frac{1}{6}\frac{d\rho\, ds^2}{\rho^2}$, ce qui est précisément l'expression de la distance d'une courbe plane au cercle osculateur. Le cercle osculateur des courbes planes est un cas particulier de l'hélice osculatrice; c'est le cas limite qui se présente quand la torsion est nulle. En effet, les valeurs de $\tang\alpha$ et de r relatives à cette hélice sont, en vertu des équations (2) et (3) ci-dessus,

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\rho}{\sigma},$$

$$r = \frac{\rho\sigma^2}{\rho^2 + \sigma^2},$$

et si l'on suppose que la torsion diminue indéfiniment, tendant vers zéro, alors σ va croissant indéfiniment, et à la limite, il vient

$$\alpha = 0,$$

$$r = \rho,$$

c'est-à-dire que l'hélice osculatrice se réduit au cercle de rayon ρ, qui est le cercle osculateur.

L'hélice osculatrice est donc celle qui a mêmes rayons de première et de seconde courbure, ou, en d'autres termes, même angle de contingence et même angle de torsion que la courbe au point considéré. De cette défition il est aisé de déduire la situation de l'axe du cylindre sur lequel elle est tracée. Nous savons déjà qu'il rencontre la normale principale au point de contact, et qu'il la coupe à angle droit, car cela résulte, indépendamment de toute valeur attribuée à R et à S, de ce que la courbe donnée et l'hélice ont au point commun même tangente et même plan osculateur. Pour le déterminer complétement, concevons deux courbes quelconques disposées l'une par rapport à l'autre, comme le sont la courbe donnée et l'hélice osculatrice, et supposons qu'elles aient au point de contact M même angle de contingence et même angle de torsion. A partir de M prenons sur les deux courbes des arcs infiniment petits MM' et MN' égaux : la distance $M'N'$ est d'un ordre supérieur à celui de ces arcs, et il en est de même de l'angle que font entre elles les normales principales en M' à la première courbe, et en N' à la seconde.

Dès lors, la commune perpendiculaire aux normales principales en M et en M' à la première courbe, tend à se confondre avec la commune perpendiculaire aux normales principales en M et en N' à la seconde.

Ceci posé, supposons que l'une des deux courbes soit l'hélice osculatrice ; dans toute hélice tracée sur un cylindre circulaire droit, les normales principales rencontrent toutes l'axe du cylindre, et le coupent à angle droit, en sorte que la commune perpendiculaire de deux normales principales est située sur cet axe. Donc, *l'axe du cylindre sur lequel est tracée l'hélice osculatrice n'est autre que la commune perpendiculaire à deux normales principales de la courbe donnée infiniment voisines, prolongée de part et d'autre.*

EXERCICES SUR LE TÉTRAÈDRE ;

Par le Rév. J. WOLSTENHOLME.

(Traduit de l'anglais de *The Educational Times.*)

1. Dans un tétraèdre ABCD, si AB est perpendiculaire sur CD, et AC perpendiculaire sur BD, il en résulte que AD est perpendiculaire sur BC. Un tel tétraèdre peut être appelé *rectangle*, et l'on a

$$BC^2 + AD^2 = CA^2 + BD^2 = AB^2 + CB^2.$$

2. Dans un tétraèdre rectangle, les perpendiculaires abaissées des sommets sur les faces opposées se coupent en un point, que nous appellerons le *centre des perpendiculaires*. Un tel point n'existe pas pour un autre tétraèdre.

3. Les trois droites qui rencontrent à angle droit les couples d'arêtes opposées passent par le centre des perpendiculaires.

4. Il existe une sphère polaire à un tétraèdre rectangle telle, que chaque sommet du tétraèdre est le pôle de la face opposée par rapport à cette sphère : son centre est le centre des perpendiculaires. Cette sphère n'est possible qu'autant que tous les angles plans comprenant un angle solide sont obtus.

5. On peut mener une sphère par les milieux des arêtes et les pieds des plus courtes distances entre les arêtes opposées, et le centre de cette sphère est le centre d'inertie du tétraèdre qui bissecte la distance entre le centre de la sphère circonscrite et le centre des perpendiculaires (première sphère des douze points).

6. La sphère qui passe par les centres de gravité des faces passe aussi par leur centre des perpendiculaires, et ces points sont, sur une face, les extrémités d'un diamètre du cercle suivant lequel cette face coupe la sphère. Cette sphère trisecte la partie d'une perpendiculaire au tétraèdre comprise entre le sommet (seconde sphère de douze points).

7. Ces sphères et la sphère circonscrite ont un plan radical commun, et, à ce système de sphères appartient aussi la sphère qui a pour extrémités de son diamètre le centre d'inertie et le centre des perpendiculaires.

8. Si R, ρ sont les rayons de la sphère circonscrite et de la sphère polaire, et δ la distance de leurs centres, $\delta^2 = R^2 + 3\rho^2$, et le rayon de la première sphère des douze points est $\frac{1}{2}(R^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}$, celui de la seconde est $\frac{1}{3}R$, et celui de la sphère (7) est $\frac{1}{4}(R^2 + 3\rho^2)^{\frac{1}{2}}$. Le rayon de la section commune de toutes ces sphères est $\frac{\rho}{\delta}(R^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}$.

9. Si R, ρ' sont les rayons de la sphère circonscrite et de la première sphère des douze points, et δ' la distance de leurs centres, $\delta'^2 = R^2 - \rho'^2$.

10. Les centres de similitude de la sphère circonscrite et de la seconde sphère des douze points sont les centres d'inertie et des perpendiculaires du tétraèdre. Donc, si $ALA'a$, mené par le centre des perpendiculaires, rencontre la face opposée en A' et la sphère circonscrite en a, $La = 3\,LA'$.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1026

(voir 2e série, t. X, p. 240);

PAR M. O. CALLANDREAU,
Candidat à l'École Polytechnique.

La circonférence circonscrite à un polygone régulier de n côtés égaux à a est comprise entre na et $(n+1)a$.

(LIONNET.)

La première partie de la proposition étant évidente, je ne considère que la dernière.

Je puis prendre le rayon du cercle pour unité; dans cette supposition, le demi-côté du polygone régulier de n côtés est égal à $\sin\frac{\pi}{n}$, et il faut démontrer l'inégalité

$$\pi < (n+1)\sin\frac{\pi}{n},$$

d'où, successivement,

$$\frac{\pi}{n+1} < \sin\frac{\pi}{n},$$

$$\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n(n+1)} < \sin\frac{\pi}{n},$$

$$\frac{\pi}{n} - \sin\frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{n(n+1)}.$$

La différence $\frac{\pi}{n} - \sin\frac{\pi}{n}$ est moindre que $\frac{\pi^3}{6n^3}$, et, pour $n \geqq 3$, on a

$$\frac{\pi^3}{6n^3} < \frac{\pi}{n(n+1)}.$$

En effet, l'inégalité $\frac{\pi}{n(n+1)} > \frac{\pi^3}{6n^3}$ revient à

$$\frac{n^2}{n+1} > \frac{\pi^2}{6};$$

cette dernière est évidente pour $n \geqq 3$, parce que $\frac{\pi^2}{6}$ est moindre que 2. La question est donc résolue.

Note. — Une solution fondée, comme la précédente, sur les formules de la Trigonométrie, nous a été adressée par M. H. Helderman, ancien élève de l'École Polytechnique de Delft, professeur de mathématiques.

Pour démontrer la proposition dont il s'agit au moyen seulement de la Géométrie élémentaire, je remarquerai d'abord que, si p et P représentent les périmètres de deux polygones réguliers de n côtés, l'un inscrit, l'autre circonscrit à un cercle dont le rayon est pris pour unité, et P' le périmètre d'un polygone régulier de $2n$ côtés circonscrit au même cercle, on aura

$$\frac{P-p}{P+p} = \left(\frac{P'}{4n}\right)^2.$$

En effet, soient C le centre du cercle considéré, AB le côté du polygone inscrit p, DCD' le diamètre perpendiculaire au milieu M de AB, et DF la moitié du côté du polygone P'.

Les droites CD, CM étant les apothèmes des polygones P, p, on a

$$\frac{P-p}{P+p} = \frac{CD - CM}{CD + CM} = \frac{MD}{MD'},$$

ou, parce que l'angle DAD' est droit,

$$\frac{P-p}{P+p} = \left(\frac{AD}{AD'}\right)^2,$$

Or les triangles rectangles DAD′, FDC sont semblables et donnent

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AD'}} = \frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{DC}} = \mathrm{DF};$$

mais

$$\mathrm{DF} = \frac{\mathrm{P'}}{4n},$$

donc

$$\text{(1)} \qquad \frac{\mathrm{P} - p}{\mathrm{P} + p} = \left(\frac{\mathrm{P'}}{4n}\right)^2.$$

Cela posé, de la formule connue

$$\mathrm{P'} = \frac{2\mathrm{P}p}{\mathrm{P} + p},$$

on déduit

$$\mathrm{P'} - p = p\left(\frac{\mathrm{P} - p}{\mathrm{P} + p}\right) = p\left(\frac{\mathrm{P'}}{4n}\right)^2,$$

ou, en désignant par a le côté du polygone p,

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{P'} - p = a \times \frac{\mathrm{P'}^2}{16n}.$$

Lorsque $n = 3$, il vient

$$\mathrm{P'} = 4\sqrt{3}, \quad \frac{\mathrm{P'}^2}{16n} = \frac{48}{48} = 1, \quad \text{et} \quad \mathrm{P'} - p = a; \quad \mathrm{P'} = (n+1)a.$$

Si n augmente à partir de 3, le périmètre $\mathrm{P'}$ décroît; il en est de même, *à fortiori*, de $\frac{\mathrm{P'}^2}{16n}$;
donc, pour

$$n > 3,$$

on a

$$\mathrm{P'} - p < a; \quad \mathrm{P'} < (n+1)a.$$

Ainsi, quel que soit le nombre n des côtés de p, la circonférence circonscrite à ce polygone est moindre que $(n+1)\,a$; c'est ce qu'il s'agissait de démontrer.

Le maximum de P'^2 étant 48, si l'on pose $n = 3m$, on aura, en ayant égard à l'égalité (2),

$$P' - p < a \times \frac{1}{m},$$

inégalité qui vérifie cette proposition, qu'il est possible d'inscrire dans un cercle un polygone régulier dont le nombre des côtés soit assez grand pour que le périmètre p de ce polygone diffère de la circonférence d'une quantité moindre qu'une fraction, aussi petite qu'on voudra, de son côté. (G.)

Question 1027

(voir 2ᵉ série, t. X, p. 240);

PAR M. E. KRUTCHWITZ,
Étudiant à Berlin.

On donne un cercle et trois sommets d'un quadrilatère inscrit; déterminer le quatrième sommet par la condition que le quadrilatère soit circonscriptible.

(FERRATS.)

Soient A, B, C les sommets donnés, et D le sommet cherché; puisqu'il faut que, dans tout quadrilatère circonscriptible, les sommes des côtés opposés soient égales entre elles, nous aurons

$$AB + CD = BC + AD,$$

d'où

$$AD - CD = AB - BC.$$

Le point D appartient donc à une hyperbole dont les foyers sont A et C, et dont l'axe transverse est égal à $AB - BC$ (en supposant $AB > BC$).

Comme le plus grand des deux côtés AD, CD doit être opposé au plus petit des côtés AB, BC pour que les deux sommes $AB + CD$, $BC + AD$ soient égales, il n'y a qu'un point d'intersection satisfaisant à la question. Mais nous pouvons avoir trois solutions, selon que nous prenons A et C, ou A et B, ou B et C pour foyers de l'hyperbole.

Construction géométrique. — On décrit une circonférence du point A comme centre, avec un rayon égal à AB — BC; et sur la droite AC un segment capable de l'angle $\pi - \frac{ABC}{2}$, et du côté opposé à B. On joint ensuite le point A au point E, où l'arc de segment capable coupe la circonférence décrite du point A comme centre. En prolongeant la droite AE jusqu'à la rencontre de la circonférence, on aura le point D cherché. En effet, les égalités $AEC = \pi - \frac{ABC}{2}$ et $ADC = \pi - ABC$ donnent

$$DEC = \frac{ABC}{2} = DCE,$$

d'où

$$DC = DE \quad \text{et} \quad DA - DC = AE = AB - BC.$$

C. Q. F. D.

Note. — La même question a été résolue par M. Callandreau, candidat à l'École Polytechnique.

Questions 1036, 1037

(voir 2ᵉ série, t. X, p. 336);

PAR M. O. CALLANDREAU.

1036. *On donne le centre d'une ellipse, un point de la courbe et le centre du cercle osculateur en ce point; déterminer les axes de l'ellipse.*

p étant la distance du centre à la tangente au point donné,

ρ le rayon de courbure au même point,

b' le diamètre conjugué à celui qui passe par le même point, on a la relation bien connue

$$p = \frac{b'^2}{\rho};$$

or on connaît p et ρ, donc b' pourra être facilement déterminé en grandeur et en direction. D'ailleurs son conjugué est connu aussi en grandeur et en direction. Le problème est donc ramené à une question connue.

1037. *On donne en position l'axe focal d'une ellipse, un point de la courbe et le centre du cercle osculateur en ce point; déterminer les axes de l'ellipse.*

Nous nous servirons ici de la formule

$$\rho = \frac{n}{\cos^2\psi},$$

n longueur de la normale;

ψ angle de cette normale avec un des rayons vecteurs.

La relation déterminera ψ par le moyen de ρ et n, dont l'un est connu et dont l'autre peut être facilement déterminé. On aura alors les foyers de l'ellipse et un point, et tous les autres éléments pourront être connus.

Note. — Les mêmes questions ont été traitées par M. X., du lycée Louis-le-Grand.

Question 964

(voir 2e série, t. VIII, p. 560);

PAR M. PROSPER PEIN.

Par un point M *d'une ellipse, on peut mener trois normales à la courbe, indépendamment de celle qui a son pied en* M; *sur chacune de ces normales, on porte, à partir du point* M, *une longueur égale au segment intercepté entre le grand axe et l'ellipse: les trois points* *ainsi obtenus sont situés sur un cercle qui touche l'ellipse au point* M. (LAGUERRE.)

Rapportons l'ellipse à ses axes. Les coordonnées d'un point sont

$$x = a\cos\varphi, \quad y = b\sin\varphi.$$

La normale en ce point a pour équation

$$ax\sin\varphi - by\cos\varphi = c^2\sin\varphi\cos\varphi.$$

Cette droite rencontre la courbe en un second point dont les coordonnées sont

$$a\cos\varphi', \quad b\sin\varphi'.$$

φ' est lié à φ par la relation

$$a^2\sin\varphi\cos\varphi' - b^2\cos\varphi\sin\varphi' = c^2\sin\varphi\cos\varphi,$$

qui peut s'écrire

$$\operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\frac{\varphi+\varphi'}{2} = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Le segment intercepté par l'ellipse et le grand axe a pour expression

$$R = \frac{b}{a}(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}.$$

En divisant cette longueur par le cosinus de l'angle θ que font entre elles la normale au point φ et la normale au point φ', nous trouvons une expression indépendante de φ.

En effet

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{ba(\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\varphi')}{b^2 + a^2\operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\varphi'},$$

$$\frac{1}{\cos\theta} = \frac{(b^2 + a^2\operatorname{tang}^2\varphi)^{\frac{1}{2}}(b^2 + a^2\operatorname{tang}^2\varphi')^{\frac{1}{2}}}{b^2 + a^2\operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\varphi'},$$

$$\frac{R}{\cos\theta} = \frac{b\cos\varphi(b^2 + a^2\operatorname{tang}^2\varphi)(b^2 + a^2\operatorname{tang}^2\varphi')^{\frac{1}{2}}}{a(b^2 + a^2\operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\varphi')}.$$

Remplaçons $-\frac{b^2}{a^2}$ par $\tang\varphi \tang\frac{\varphi+\varphi'}{2}$, il vient

$$\frac{R}{\cos\theta} = \frac{b}{a}(b^2 + a^2 \tang^2\varphi')^{\frac{1}{2}},$$

expression indépendante de φ.

Donc les segments déterminés sur les trois normales qui partent du point M, portés sur ces normales à partir du point M, sont les projections d'une longueur constante comptée sur la normale en M, à partir du point M. Donc les extrémités des trois segments sont sur un même cercle tangent en M à l'ellipse.

Question 1002

(voir 2ᵉ série, t. IX, p. 431);

PAR M. H. LEZ.

En un point d'une ellipse, on prend sur la normale, en dehors de la courbe, une longueur égale au rayon de courbure en ce point : le cercle décrit sur cette longueur comme diamètre coupe orthogonalement le lieu des sommets des angles droits circonscrits à l'ellipse.

(STEINER.)

En un point quelconque D d'une ellipse, dont les demi-axes sont $OA = a$, $OB = b$, soit menée la normale $DN = n$, qui rencontre l'axe OA en N. Prenons sur cette normale, en dehors de la courbe, la longueur DE égale au rayon de courbure $\rho = \frac{a^2 n^3}{b^4}$. Soient C le milieu de DE, I et K les projections des points D et C sur l'axe OA, T le point où la tangente en D à l'ellipse coupe la droite OA prolongée, enfin M l'un des points d'intersection des cercles qui ont pour centres les points C et O, et respectivement pour rayons CD et $\sqrt{a^2+b^2}$. Il s'agit de démontrer que ces deux cercles se coupent orthogonalement, ce qui revient à prouver que le triangle OMC est rectangle en M, ou bien que l'on a

$$OM^2 + MC^2 = a^2 + b^2 + \left(\frac{a^2 n^3}{2b^4}\right)^2 = OC^2.$$

Or

(1) $$OC^2 = OK^2 + CK^2.$$

Mais les triangles semblables NDI, NCK donnent

$$CK = \frac{DI.NC}{ND};$$

on a de même

$$NK = \frac{CK.NI}{DI} = \frac{NI(ND + DC)}{ND}.$$

De plus,

$$OK = NK + OI - IN.$$

On peut donc écrire l'égalité (1) sous la forme

$$OC^2 = \left(\frac{CK.NI}{DI} + OI - IN\right)^2 + \left(\frac{DI.NC}{ND}\right)^2,$$

qui devient, en réduisant,

$$OC^2 = \left(\frac{DC.NI + OI.ND}{ND}\right)^2 + \left[\frac{DI(ND + CD)}{ND}\right]^2.$$

Cela posé, la sous-normale $NI = \frac{b^2 x}{a}$; donc

$$OC^2 = \left(\frac{\frac{n^3 a^2}{2b^4}\cdot\frac{b^2 x}{a^2} + nx}{n}\right)^2 + \left[\frac{y\left(n + \frac{n^3 a^2}{2b^4}\right)}{n}\right]^2.$$

Transformant cette nouvelle expression, on obtient

$$OC^2 = \frac{4b^8(x^2+y^2) + n^4(b^4x^2 + a^4y^2) + 4n^2b^4(b^2x^2 + a^2y^2)}{4b^8}.$$

Mais la longueur de la normale ND est donnée par l'égalité

$$n^2 = \frac{b^4 x^2 + a^4 y^2}{a^4};$$

et, d'après l'équation de l'ellipse, $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$; l'égalité (1) revient donc à

$$OC^2 = \frac{4b^8(x^2+y^2) + n^6a^4 + 4n^2b^6a^2}{4b^8}.$$

Or

$$\frac{n^2a^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2}\left(\frac{b^4x^2 + a^4y^2}{a^4}\right) = \frac{a^2y^2}{b^2} + \frac{b^2x^2}{a^2};$$

par suite

$$OC^2 = x^2 + y^2 + \frac{n^6a^4}{4b^8} + \frac{a^2y^2}{b^2} + \frac{b^2x^2}{a^2};$$

d'où

$$OC^2 = a^2 + b^2 + \frac{n^6a^4}{4b^8}.$$

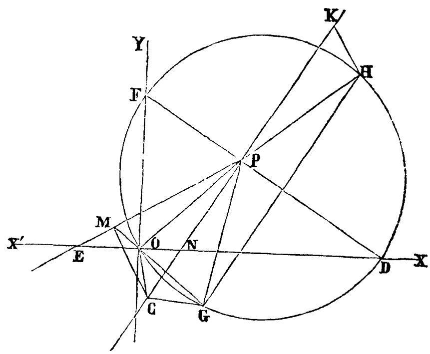
Ce qu'il fallait trouver.

Note. — MM. Pellet et Moret-Blanc ont résolu, de même, la question par le calcul.

Solution géométrique de la même question.

Supposons que OX et OY représentant les directions des axes $2a$, $2b$ de l'ellipse, la droite DPF soit tangente, au point P, à la courbe, et PN normale. Si l'on mène, du point P, une droite PE, qui fasse avec OX un angle PED égal à PDE, et par le centre O de l'ellipse la droite OM, de manière que l'angle MOE soit égal à POD, la perpendiculaire élevée à PE, au point M d'intersection des droites PE, OM, rencontrera la normale PN, au centre C, du cercle osculateur à l'ellipse au point P (*).

Soient maintenant G, H les points où les droites MO, OP prolongées coupent la circonférence décrite sur DF



comme diamètre, et HK une perpendiculaire à OH rencontrant en K le prolongement de CP, on aura

$$PK = PC.$$

En effet, la droite OD étant bissectrice de l'angle GOH, le point D est le milieu de l'arc GDH, et, par suite, le diamètre DF est perpendiculaire au milieu de la corde GH, ce qui montre que la droite PG = PH, et que l'angle CPG = HPK = CPO. Mais il résulte évidemment de la construction qui a déterminé le centre C, que l'angle

(*) Car il résulte du théorème de Newton sur les rectangles des cordes, que la circonférence osculatrice à l'ellipse au point P, coupe l'ellipse en un point P′, tel que la *corde* PP′ fait avec les axes les mêmes angles que la tangente PD. La droite PP′ est donc dirigée suivant PE. En outre, les égalités d'angles PED = PDE, MOE = POD montrent que la direction de OM est celle du diamètre conjugué à la corde PP′, puisque le rayon OP est conjugué aux cordes parallèles à la tangente DPF; donc le point M est le milieu de la corde PP′, et par conséquent le centre C de la circonférence osculatrice, au point P, appartient à la fois à la perpendiculaire MC et à la normale PN.

$\widehat{CPO} = \widehat{GMC}$; donc $\widehat{CPG} = \widehat{GMC}$. De cette dernière égalité, il faut conclure que les quatre points P, M, C, G appartiennent à une même circonférence, et que l'angle PGC est droit.

Les triangles rectangles PGC, PHK sont égaux, puisqu'on a $PG = PH$ et $\widehat{CPG} = \widehat{HPK}$; donc $PK = PC$.

Cela posé, remarquons que $OP \times PH = PF \times PD$. Or, le produit $PF \times PD$ étant égal au carré du demi-diamètre de l'ellipse conjugué à OP, on a

$$PF \times PD = a^2 + b^2 - OP^2;$$

d'où

$$OP \times PH = a^2 + b^2 - OP^2,$$

égalité qui donne successivement

$$OP^2 + OP \times PH = a^2 + b^2; \quad OP \times OH = a^2 + b^2.$$

Donc la puissance du point O, par rapport à la circonférence décrite sur PK comme diamètre, est égale à $a^2 + b^2$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. — Les considérations précédentes conduisent à des solutions très-simples de plusieurs questions ayant pour objet de déterminer les axes $2a$, $2b$ d'une ellipse au moyen de certaines données, parmi lesquelles se trouve le rayon du cercle osculateur en un point de la courbe.

1° Les données sont le centre O de l'ellipse et le rayon CP du cercle osculateur au point P de la courbe.

On inscrira, dans le cercle décrit sur CP comme diamètre, une corde PG, qui fasse avec PC un angle $CPG = CPO$. Les axes $2a$, $2b$ de l'ellipse seront dirigés suivant les bissectrices OX, OY des angles POG, POM. Et, en désignant par D, F les points où ces bissectrices rencontrent la tangente DPF, et par x et y les perpendiculaires abaissées du point P sur les droites OY, OX, on aura

$$a^2 = \mathrm{OD} \times x \quad \text{et} \quad b^2 = \mathrm{OF} \times y.$$

2° On donne la droite X'X, suivant laquelle l'axe $2a$ est dirigé; et le rayon CP du cercle osculateur au point P.

Soient menées la droite PE qui fasse avec X'X l'angle PED = PDE, et la perpendiculaire CM à PE. Le centre O de l'ellipse se trouvera à la rencontre de la droite X'X et de la droite menée du point M au symétrique du point P par rapport à X'X. Les grandeurs des axes $2a$, $2b$ seront ensuite déterminées par les formules

$$a^2 = \mathrm{OD} \times x, \quad b^2 = \mathrm{OF} \times y.$$

3° On donne le rayon CP du cercle osculateur et les points D, F, où la tangente DPF rencontre les directions des axes OX, OY.

Soit H un point commun aux deux circonférences qui ont respectivement pour diamètres DPF, et la droite PK égale à CP et prise, à partir du point P, sur le prolongement de CP. On obtiendra le centre O de l'ellipse, en prolongeant la droite HP jusqu'à sa rencontre avec la circonférence dont DF est le diamètre. Les axes seront dirigés suivant les droites OD, OF, et leurs grandeurs se détermineront comme précédemment. La question peut admettre deux solutions.

Il est encore facile de trouver la valeur de la distance des centres O, C en fonction des rayons OP, CP et des axes de l'ellipse. En effet, la droite PH étant égale à la projection de CP sur OP, le triangle OCP donne

$$\mathrm{OC}^2 = \mathrm{OP}^2 + \mathrm{CP}^2 - 2\,\mathrm{OP}.\mathrm{PH}.$$

Mais on a vu que $\mathrm{OP} \times \mathrm{PH} = a^2 + b^2 - \mathrm{OP}^2$; donc

$$\mathrm{OC}^2 = 3\,\mathrm{OP}^2 + \mathrm{CP}^2 - 2(a^2 + b^2).$$

(G.)

BIBLIOGRAPHIE ÉTRANGÈRE.

Sur la théorie de quelques courbes pédales. Mémoire de M. Barnabé Tortolini, professeur de calcul transcendant à l'Université de Rome, et l'un des quarante de la Société italienne. (Extrait des Actes de l'*Académie pontificale*, XXIV^e année, session du 16 avril 1871. Rome, imprimerie des Sciences mathématiques et physiques, via lata, n° 211, A.)

Nous donnerons une courte analyse de ce Mémoire, qui renferme des résultats remarquables obtenus par des calculs simples et élégants.

L'auteur appelle *courbe pédale*, ce que nous nommons en France *courbe podaire*, c'est-à-dire le lieu géométrique des projections d'un point fixe sur les droites tangentes à une courbe donnée.

W. Roberts, de Dublin, appelle cette même ligne la *dérivée positive* de la courbe donnée, et il nomme *dérivée négative* l'enveloppe des normales menées à la courbe donnée par ses points de rencontre avec les rayons vecteurs issus d'un point fixe (*).

Dans son opuscule, M. Tortolini commence par résoudre les deux problèmes suivants : Étant donnée l'équation d'une courbe, trouver l'équation de la dérivée positive et celle de la dérivée négative. Il montre ensuite la liaison qui existe entre ces deux genres de dérivées.

(*) On a aussi appelé, dans un cercle, *pédale* d'un point P pris sur la circonférence, la ligne droite sur laquelle se trouvent les pieds des perpendiculaires abaissées de ce point sur les côtés d'un triangle inscrit (*The Quarterly Journal*, n^os 33, 34, 36). Mais on voit que ces dénominations identiques se rapportent à des objets distincts

La courbe primitive est la dérivée négative de la dérivée positive; de même, la courbe primitive est la dérivée positive de la dérivée négative.

L'auteur s'occupe ensuite de la première dérivée négative du centre de l'ellipse. Son équation est du sixième degré; il y parvient au moyen d'une élimination élégante. Cette dérivée a reçu le nom de *courbe de Talbot*. Elle jouit de cette propriété remarquable que son quadrant représente la transcendante elliptique complète de première espèce.

La première dérivée positive du centre de l'ellipse est une courbe du quatrième degré. La seconde dérivée positive est une courbe du douzième degré, dont MM. Hirst et W. Roberts se sont occupés.

Cette dérivée a cela de remarquable, qu'elle est une figure inverse de la courbe de Talbot, c'est-à-dire qu'on l'obtient en remplaçant dans la courbe de Talbot

$$x, \quad y, \quad a, \quad b,$$

respectivement par

$$\frac{x}{x^2+y^2}, \quad \frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{b}.$$

Cette remarque importante est due à M. Hirst.

M. Tortolini rappelle, à la fin de son Mémoire, que Cayley a déterminé la surface, première dérivée négative du centre d'un ellipsoïde. Cette surface est du dixième degré.

Suivant la remarque de Hirst, on passera à la seconde dérivée positive du centre, en remplaçant dans la surface précédente

$$x, \quad y, \quad z, \quad a, \quad b, \quad c,$$

respectivement par

$$\frac{x}{r^2}, \quad \frac{y}{r^2}, \quad \frac{z}{r^2}, \quad \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{b}, \quad \frac{1}{c},$$

r étant donné par la relation

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

L'équation de cette nouvelle surface est *probablement* du vingtième degré, suivant M. Tortolini. J. B.

BIBLIOGRAPHIE.

Notice sur les principales méthodes de géométrie supérieure; par L. Millet. Laval Deverdun, imprimeur-lithographe. — Prix : 6 francs.

En publiant cet ouvrage, l'auteur s'est proposé d'offrir aux élèves d'élémentaires et de mathématiques spéciales, un livre de transition entre les traités purement classiques de géométrie et les traités de géométrie supérieure qui ont illustré les noms de Chasles, Poncelet, etc. Ce qui recommande ce travail à l'attention du public, ce sont les applications aussi nombreuses que variées qui en font un véritable recueil de problèmes, et qui permettent à l'esprit de saisir facilement tous les différents genres de questions que chaque méthode est appelée à résoudre. Après avoir exposé la méthode des transversales, les divisions anharmonique et harmonique, les faisceaux homographiques, la théorie des pôles et polaires dans le cercle, M. Millet résume en quelque sorte ces différentes méthodes par des exemples choisis, empruntés aux concours généraux des Lycées de Paris. L'auteur passe ensuite aux méthodes dites de *transformation :* ici est la véritable originalité de cet ouvrage élémentaire. Nous signalerons quelques nouvelles applications dans la méthode des polaires réciproques, et nous recommanderons particulièrement la méthode de transformation par rayons vecteurs réciproques, qui a été très développée et contient beaucoup d'applications heureuses; un nouveau théorème, p. 139, quelques démonstrations nouvelles et fort élégantes rendent cette partie très-intéressante. Dans les deux chapitres, qui sont consacrés à la méthode des projections perspectives de M. Poncelet, quelques théorèmes très-généraux font ressortir la facilité avec laquelle cette méthode sert à résoudre les questions les plus difficiles. Citons, en terminant, la méthode des figures semblables que l'auteur a cru devoir introduire dans ce recueil à cause de son importance, et enfin la méthode géométrique de Fermat pour les maxima et minima, où l'auteur a su, par un heureux choix d'exemples, montrer l'application à la géométrie d'une méthode qui appartient réellement au calcul différentiel.

L'auteur a dû autographier lui-même cet ouvrage, en présence des difficultés que présente l'impression d'un cours de géométrie contenant autant de figures nouvelles.

(Un Abonné.)

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

LICENCE ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES.

Session du 17 août 1871.

1re *Question.* — Trouver les lignes de courbure de la surface développable, enveloppe du plan mobile dont l'équation est

$$z = \alpha x + y\varphi(\alpha) + R\sqrt{1 + \alpha^2 + \varphi^2(\alpha)},$$

où α est un paramètre variable, $\varphi(\alpha)$ une fonction arbitraire de ce paramètre, et R une constante donnée.

On fera voir :

Que les génératrices rectilignes constituent un premier système de lignes de courbure, comme dans toutes les surfaces développables ;

Que les lignes de courbure du second système sont situées sur des sphères concentriques à la sphère qui touche le plan mobile.

(Durée de la séance : trois heures.)

2e *Question.* — Déterminer le mouvement d'une baguette rectiligne pesante homogène dont les extrémités sont assujetties à glisser sans frottement, l'une sur une droite horizontale Ox, l'autre sur une droite verticale Oy. On calculera les pressions exercées par les extrémités de la baguette sur les deux droites.

(Durée de la séance : trois heures.)

CONCOURS D'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES DE 1871

(voir même tome, p. 371).

2e SÉRIE D'ÉPREUVES. — LEÇONS TIRÉES AU SORT.

Mathématiques élémentaires.

1. Changement de plans de projection ; rotations ; rabattements.
2. Inscription des polygones réguliers dans le cercle.
3. Construction des tables trigonométriques.
4. Division algébrique.
5. Résolution et discussion de deux équations du premier degré à deux inconnues.
6. Mouvement réel de la Terre ; saisons.

7. Volume des corps ronds.

8. Première leçon sur la mesure des volumes.

9. Plus grand commun diviseur et plus petit multiple commun.

10. Équations du second degré à une inconnue.

11. Valeurs maximum et minimum de $\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$; discussion.

12. Cartes géographiques.

13. Quantités négatives.

14. Composition des forces parallèles; application à la détermination des centres de gravité.

15. Triangles et polygones sphériques.

16. Similitude et homothétie dans le plan.

Mathématiques spéciales.

1. Plans tangents aux surfaces de révolution (descriptive).

2. Théorie des foyers.

3. Convergence des séries.

4. Génératrices rectilignes dans les surfaces du second ordre.

5. Formule du binôme.

6. Tangentes et points multiples dans les courbes algébriques.

7. Section droite d'un cylindre oblique; développement.

8. Théorème de Sturm.

9. Diamètres et axes dans les courbes du second ordre.

10. Construction des courbes en coordonnées polaires (tangentes, asymptotes, etc.).

11. Théorie des asymptotes.

12. Réduction de l'équation du second degré à deux variables.

13. Théorie des projections; application à la transformation des coordonnées dans l'espace.

14. Homothétie; application aux surfaces du second ordre.

15. Sections circulaires des surfaces du second ordre; génération de ces surfaces à l'aide d'un cercle.

16. Règle des signes de Descartes.

3^e SÉRIE D'ÉPREUVES. — COMPOSITION ÉCRITE.

Sur les matières de la licence ès-sciences mathématiques.

1° Étant donnée une ligne S dans l'espace, on détermine la courbe S' lieu des centres des sphères d'un rayon donné, R, ayant avec cette courbe un contact du second ordre. On propose de faire voir que, réciproquement, la courbe proposée S est pour la courbe S' le lieu des centres des sphères du même rayon R ayant avec elle un contact du second ordre.

2° Une tige homogène pesante, dont on néglige les dimensions transversales, est en mouvement dans un plan vertical. On donne pour une certaine époque sa vitesse de rotation et la position du centre instantané de rotation, qu'on supposera situé sur la direction même de la tige. En cet instant la tige heurte par un de ses points, qui devient ainsi momentanément immobile, un obstacle fixe. On propose de déterminer d'abord les effets du choc, puis le mouvement ultérieur de la tige.

On examinera comment les effets du choc varient avec la position de l'obstacle fixe.

Calcul.

Calculer la plus grande des racines de l'équation

$$e^x = 31200 . \sin x + 2500 . \cos x.$$

Géométrie descriptive.

Une sphère opaque de 6 centimètres de rayon est posée sur le plan horizontal et touche en même temps le plan vertical de projection. Elle est éclairée par un point lumineux situé à 12 centimètres au-dessus du plan horizontal, et tellement placé que l'ombre portée sur le plan horizontal rencontre la ligne de terre en un point donné M et sous un angle donné.

On demande :

1° De trouver la position du point lumineux;

2° De tracer les ombres portées par la sphère sur les deux plans de projection ;

3° De construire les projections de l'ombre propre de la sphère.

On prendra le point M à 18 centimètres à droite du point A où la ligne de terre est rencontrée par la verticale qui projette le centre de la sphère sur les plans de projection. L'angle donné sera pris égal à 45 degrés.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.
(ANNÉE 1871.)

Composition de Géométrie descriptive.

Intersection de surfaces. — Un triangle équilatéral *abc* de 5 centimètres de côté, situé dans un plan horizontal élevé de 6 centimètres au-dessus de la ligne de terre : un des côtés est parallèle au plan vertical et à 6 centimètres de ce plan ;

Trois sphères ayant leurs centres aux points *a*, *b*, *c* et un rayon commun de 5 centimètres.

Il s'agit :

1° De construire l'intersection des trois sphères;

2° De détacher, par un mouvement de transport parallèle, le solide commun à ces trois sphères, et d'en faire séparément les projections.

Résolution d'un triangle.

Étant donnés dans un triangle ABC les côtés, savoir :

$$a = 22\,618^{\text{m}},78,$$
$$b = 28\,481^{\text{m}},17,$$
$$c = 34\,518^{\text{m}},95,$$

trouver les trois angles.

EXERCICES POUR LA LICENCE

(suite, voir même tome, p. 332);

Par M. W.-H. BESANT,

du collége de Saint-Jean à Cambridge.

---

13. La roulette, sur une ligne droite, du pôle d'une spirale hyperbolique $r\theta = c$, est

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\sqrt{c^2 - y^2}};$$

et le pôle de la courbe $c^n p = r^{n+1}$ est

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^{n+1} = \left(\frac{c}{y}\right)^n.$$

14. Une courbe roule symétriquement sur une courbe égale, entraînant une développante. L'enveloppe de cette dernière courbe est une développante de la courbe fixe.

15. Si une courbe roule sur une ligne droite, la cour-

bure de la roulette d'un point varie comme $\frac{d}{dp}\left(\frac{p}{r}\right)$, p et r étant rapportés à ce point.

Si la courbe est

$$\frac{a}{r} = 1 + \text{séc}\,\alpha \sin(\theta \sin\alpha),$$

la roulette est un cercle.

16. La courbe P'Q roule sur la courbe PQ, P' passant par P; la roulette de P' est, dans le voisinage de P, une parabole semi-cubique dont le paramètre est $\frac{9\rho\rho'(\rho+\rho')}{2(\rho+2\rho')^2}$, ρ et ρ' étant les rayons de courbure du point de contact.

17. Si un arc donné d'une courbe roule, d'abord extérieurement, puis intérieurement, sur le même arc d'une courbe fixe, la somme des arcs des roulettes d'un même point est indépendante de la courbe fixe.

La même indépendance existe aussi pour la somme des aires comprises entre les lignes joignant le point entraîné au point de contact.

18. Si une parabole roule sur une droite, l'enveloppe de sa directrice est une chaînette.

19. Une chaînette, $s = c \tan\psi$, roule symétriquement sur une chaînette égale; l'équation de son axe est

$$\frac{d\sigma}{d\psi} = c \log \tan \frac{\pi - \psi}{4} + \frac{c}{2} \tan \frac{\psi}{2} \,\text{séc}\, \frac{\psi}{2}.$$

20. La portion de la tangente en un point d'une hypocycloïde à trois sommets, comprise dans l'intérieur de la courbe, a une longueur constante.

21. Si une courbe ovale roule sur une ligne droite, prouver que l'aire tracée par un point O dans la courbe surpasse l'aire de la courbe de $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\, d\varphi$, en appelant

r la distance du point O à un point P de la courbe, et φ l'angle que la tangente en P fait avec une ligne fixe prise dans la courbe; appliquer ce théorème à trouver l'aire de la cycloïde.

22. Si une courbe ovale A roule sur une courbe égale et semblable B, de sorte que le point de contact est un centre de similitude, l'aire totale déterminée par un point O lorsque A a fait une révolution complète est double de l'aire que l'on aurait obtenue si la courbe A avait roulé sur une droite.

23. Une parabole roule sur une droite d'une des extrémités du paramètre à l'autre; la longueur de l'arc enveloppé par l'axe est $2a \log(2E)$.

24. Une parabole roule symétriquement sur une parabole égale d'une extrémité du paramètre $4a$ à l'autre; la longueur de l'arc enveloppé par l'axe est $2a \log(4E)$.

25. Un diamètre d'un cercle roule sur une courbe; l'enveloppe du cercle consiste en deux développantes de la courbe.

26. Un cercle de rayon b roule sur un cercle fixe de rayon a; l'aire comprise entre le cercle fixe et l'enveloppe d'un diamètre pour une demi-révolution, d'une extrémité du diamètre à l'autre, est égale à $\frac{\pi b^2}{4a}(3a+b)$.

27. La lemniscate $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ roule sur une droite; l'équation tangentielle polaire de la roulette produite par son pôle est

$$\frac{dp}{d\varphi} + p \tang\varphi = a \tang\varphi \sqrt{\sin\varphi},$$

et l'équation de l'enveloppe de son axe est

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{a}{6\sqrt{\cos\frac{2\varphi}{3}}}\left(5\sin\varphi - 3\sin\frac{\varphi}{3}\right).$$

28. Un cercle roule sur un cercle fixe ; l'enveloppe d'une droite est une développante d'épicycloïde.

29. Une chaînette roule sur une droite ; l'enveloppe d'une droite entraînée est une développante de parabole.

30. Une ellipse roule symétriquement sur une ellipse égale ; prouver que la longueur totale de l'arc enveloppé par son axe est

$$2a\left(1+\frac{1-e^2}{e}\log\frac{1+e}{1-e}\right).$$

(*La suite prochainement.*)

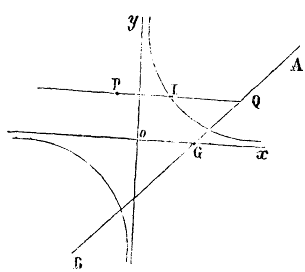
CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE (ANNÉE 1871).

PREMIÈRE SESSION.

Compositions du 7 et du 8 juillet 1871.

Composition de mathématiques.

On donne une hyperbole équilatère rapportée à ses asymptotes $xy = m^2$, et une droite fixe AB. On suppose



qu'une droite mobile PQ se déplace de manière à être constamment parallèle à Ox, que le point Q glisse sur AB et que la droite PQ ait son milieu I sur l'hyperbole. On demande :

1° Le lieu du point P;

2° Démontrer que la tangente en chaque point P du lieu, la tangente au point I de l'hyperbole et la droite AB passent par un même point;

3° Le lieu du point P ayant été trouvé, on suppose que AB change de position en tournant autour d'un point G. On demande le lieu des foyers des courbes lieux des points P.

Composition de physique.

Loi du mélange des gaz.

Cas particulier où l'un des gaz est remplacé par la vapeur d'eau à saturation.

Préparation de l'ammoniaque.

Densité de l'ammoniaque, étant donnée sa composition.

Triangle.

Résoudre un triangle connaissant les trois côtés.

Épure.

Étant donné un hyperboloïde de révolution dont l'axe est vertical, le rayon du cercle de gorge est 3 centimètres. Le rayon du cercle de base est 8 centimètres, l'hyperboloïde étant coupé par deux plans horizontaux à égale distance du cercle de gorge, l'un étant le plan horizontal. On donne, en second lieu, un ellipsoïde de révolution du même centre, dont l'axe est parallèle à la ligne de terre. Les deux diamètres ont 14 centimètres et 8 centimètres. On demande de construire les projections de l'intersection de ces deux surfaces de révolution.

Construction de la tangente.

QUESTIONS.

1040. On donne deux surfaces fixes du second ordre; on imagine une droite D telle que les plans tangents aux points où elle rencontre les deux surfaces, se coupent en un même point M :

1° Lorsqu'on se donne le point M, il y a une droite D, et une seule, satisfaisant à la question; elle est l'intersection des plans polaires du point M par rapport aux deux surfaces.

2° Lorsque le point M décrit une droite fixe, la droite D décrit une surface du second ordre circonscrite au tétraèdre conjugué par rapport aux deux surfaces.

3° Lorsque la droite D se meut sur un plan fixe, le point M décrit une cubique gauche. (L. Painvin.)

1041. On donne deux surfaces fixes du second ordre, qui *se raccordent* suivant une droite unique AB.

1° Les pôles d'un même plan, P, par rapport aux deux surfaces sont sur une droite Δ qui rencontre la ligne AB.

2° Lorsque la droite Δ décrit un plan fixe passant par AB, le plan P tourne autour d'un point fixe également situé sur AB.

3° Lorsque le plan P tourne autour d'une droite fixe, la droite Δ décrit une surface du second ordre passant par la ligne AB. (L. Painvin.)

1042. On donne quatre surfaces fixes du second ordre passant par une même courbe gauche du quatrième ordre, ayant un point double de rebroussement :

1° Un point M se meut sur l'une d'elles; trouver le lieu du point de rencontre des plans polaires du point M par rapport à chacune des trois autres surfaces.

2° Un plan P touche l'une d'elles; trouver l'enveloppe du plan passant par les pôles du plan P relatifs à chacune des trois autres surfaces. (L. PAINVIN.)

1043. On donne une conique et dans le même plan une droite, sur la conique deux premiers points fixes M, N et un troisième point variable a; les droites aM, aN interceptent sur la droite D un segment mn dont la situation et la grandeur varient avec la situation du point a. Démontrer qu'il existe sur le plan deux points d'où on voit ces segments variables sous un angle constant; et que, si on déplace les points M et N, les segments mn pourront être vus encore, soit sous le même angle que précédemment, soit sous un nouvel angle, selon les situations nouvelles de M et N; mais que c'est toujours aux mêmes points du plan qu'il faudra se placer pour les voir sous un angle constant.

Nota. Lorsque la droite donnée est une directrice de la conique, les points en question sont le foyer correspondant et son symétrique. — Ce cas particulier a déjà été indiqué et démontré dans les *Nouvelles Annales* (t. XVII, p. 31 et 179, année 1858).

(A. TRANSON.)

1044. Une droite et un segment fixe AB sont situés dans un plan quelconque; si l'on joint un point quelconque P du plan aux extrémités A et B du segment, les lignes PA et PB déterminent sur la droite la perspective A'B' du segment. Quelle courbe doit décrire le point P pour que cette perspective conserve toujours la même longueur?

(HARKEMA.)

THÉORÈME SUR LES SURFACES;

PAR M. L. PAINVIN.

1. J'énoncerai d'abord la proposition que je veux établir :

1° *Soient donnés trois points fixes* A, B, C *et une surface fixe* Σ *du* $m^{ième}$ *ordre; on imagine un point* M *se déplaçant sur la surface* Σ, *puis, avec trois autres points fixes* A', B', C' *donnés dans l'espace, on construit une pyramide* $A'B'C'S$ *telle qu'on ait toujours, quelle que soit la position du point* M *sur la surface* Σ,

$$SA' = MA, \quad SB' = MB, \quad SC' = MC;$$

le point S *décrira une surface* (S) *d'ordre* $4m$ *en général; l'ordre se réduira à* $2m$ *si la surface directrice* Σ *est symétrique par rapport au plan* ABC.

2° *Prenons maintenant sur* MA, MB, MC *des longueurs* MA_1, MB_1, MC_1 *telles que leur résultante soit dirigée suivant la normale en* M *à la surface* Σ; *si l'on porte alors sur* SA', SB', SC' *des longueurs* SA'_1, SB'_1, SC'_1 *respectivement égales à* MA_1, MB_1, MC_1, *la résultante des trois lignes* SA'_1, SB'_1, SC'_1 *sera normale en* S *à la surface* (S).

Je n'ai pas besoin d'ajouter qu'on a un théorème analogue pour les courbes.

2. Nous prendrons pour plan des xy le plan des trois points A, B, C; soient alors

$$\alpha, \ \beta, \ 0; \quad \alpha_1, \ \beta_1, \ 0; \quad \alpha_2, \ \beta_2, \ 0$$

les coordonnées respectives des points A, B, C; puis

$$a,\ b,\ c;\quad a_1,\ b_1,\ c_1;\quad a_2,\ b_2,\ c_2$$

celles des points A′, B′, C′; désignons enfin par λ, μ, ν les coordonnées du point M, et par x, y, z celles du point S, et posons

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} r^2 &= (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2,\\ r_1^2 &= (x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2,\\ r_2^2 &= (x-a_2)^2+(y-b_2)^2+(z-c_2)^2; \end{aligned}\right.$$

d'après les conditions imposées, on aura

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} (\lambda-\alpha)^2+(\mu-\beta)^2+\nu^2 &= r^2,\\ (\lambda-\alpha_1)^2+(\mu-\beta_1)^2+\nu^2 &= r_1^2,\\ (\lambda-\alpha_2)^2+(\mu-\beta_2)^2+\nu^2 &= r_2^2, \end{aligned}\right.$$

$$(3)\qquad F(\lambda,\mu,\nu)=0,$$

en supposant que $F(x,y,z)=0$ est l'équation de la surface directrice Σ.

Si l'on élimine λ, μ, ν entre les quatre équations (2) et (3), on aura un résultat de la forme

$$(4)\qquad \varphi(r,r_1,r_2)=0,$$

qui sera l'équation de la surface engendrée (S), en y supposant r, r_1, r_2 remplacés par leurs valeurs (1).

Remarque. — Si l'on remplace, dans l'équation (4), r, r_1, r_2 par les valeurs (2), on aura une identité, pourvu qu'on tienne compte de la relation (3); en d'autres termes, si, après cette substitution, on élimine ν, par exemple, entre les équations (3) et (4), on aura une *identité* en λ et μ; cette remarque nous sera utile plus loin.

3. Cherchons d'abord le degré de l'équation (4).

En ajoutant les équations (2), on trouve

$$3(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)-2\lambda(\alpha+\alpha_1+\alpha_2)-2\mu(\beta+\beta_1+\beta_2) \\ +\alpha^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2+\beta^2+\beta_1^2+\beta_2^2=r^2+r_1^2+r_2^2;$$

d'après cela, on pourra substituer au système (2) un système formé de l'équation précédente et de deux équations de la forme

$$l\lambda+m\mu=Ar^2+A_1r_1^2+A_2r_2^2+A_3,$$
$$l_1\lambda+m_1\mu=Br^2+B_1r_1^2+B_2r_2^2+B_3;$$

de là on déduit

$$\lambda=Lr^2+L_1r_1^2+L_2r_2^2+L_3,$$
$$\mu=Mr^2+M_1r_1^2+M_2r_2^2+M_3,$$
$$\nu^2=Nr^4+N_1r_1^4+N_2r_2^4+N'r_1^2r_2^2+N''r^2r_2^2+N'''r^2r_2^2 \\ +Pr^2+P_1r_1^2+P_2r_2^2+P_3,$$

L, L_1, L_2,..., N,..., N',..., P,... étant des constantes.

Il est maintenant facile de constater que la substitution de ces dernières valeurs dans l'équation $F(\lambda,\mu,\nu)=0$ donnera un résultat du degré $4m$ ou du degré $2m$ en x, y, z, suivant que cette équation renfermera ou ne renfermera pas de puissances impaires de ν, c'est-à-dire suivant que la surface Σ ne sera pas ou sera symétrique par rapport au plan ABC.

4. Démontrons maintenant la propriété relative aux normales.

D'après la remarque faite au n° 2, les dérivées, par rapport à λ et μ, du premier membre de l'équation (4) doivent être identiquement nulles, si l'on y regarde r, r_1, r_2 comme ayant les valeurs (2), et si l'on y considère ν comme une fonction de λ et μ définie par l'équation (3);

on a donc, d'après cela,

$$\frac{d\varphi}{dr}\frac{dr}{d\lambda}+\frac{d\varphi}{dr_1}\frac{dr_1}{d\lambda}+\frac{d\varphi}{dr_2}\frac{dr_2}{d\lambda}$$
$$+\left(\frac{d\varphi}{dr}\frac{dr}{d\nu}+\frac{d\varphi}{dr_1}\frac{dr_1}{d\nu}+\frac{d\varphi}{dr_2}\frac{dr_2}{d\nu}\right)\frac{d\nu}{d\lambda}=0,$$

$$\frac{d\varphi}{dr}\frac{dr}{d\mu}+\frac{d\varphi}{dr_1}\frac{dr_1}{d\mu}+\frac{d\varphi}{dr_2}\frac{dr_2}{d\mu}$$
$$+\left(\frac{d\varphi}{dr}\frac{dr}{d\nu}+\frac{d\varphi}{dr_1}\frac{dr_1}{d\nu}+\frac{d\varphi}{dr_2}\frac{dr_2}{d\nu}\right)\frac{d\nu}{d\mu}=0;$$

mais les équations (2) nous donnent

$$\frac{dr}{d\lambda}=\frac{\lambda-\alpha}{r},\quad \frac{dr}{d\mu}=\frac{\mu-\beta}{r},\quad \frac{dr}{d\nu}=\frac{\nu}{r},\ldots;$$

et, d'après l'équation (3), il vient

$$\frac{dF}{d\lambda}+\frac{dF}{d\nu}\frac{d\nu}{d\lambda}=0,\quad \frac{dF}{d\mu}+\frac{dF}{d\nu}\frac{d\nu}{d\mu}=0;$$

on a donc les relations

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dr}\dfrac{\lambda-\alpha}{r}+\dfrac{d\varphi}{dr_1}\dfrac{\lambda-\alpha_1}{r_1}+\dfrac{d\varphi}{dr_2}\dfrac{\lambda-\alpha_2}{r_2}=K\dfrac{dF}{d\lambda}, \\ \dfrac{d\varphi}{dr}\dfrac{\mu-\beta}{r}+\dfrac{d\varphi}{dr_1}\dfrac{\mu-\beta_1}{r_1}+\dfrac{d\varphi}{dr_2}\dfrac{\mu-\beta_2}{r_2}=K\dfrac{dF}{d\mu}, \\ \dfrac{d\varphi}{dr}\dfrac{\nu}{r}+\dfrac{d\varphi}{dr_1}\dfrac{\nu}{r_1}+\dfrac{d\varphi}{dr_2}\dfrac{\nu}{r_2}=K\dfrac{dF}{d\nu}. \end{cases}$$

Si maintenant nous portons sur MA, MB, MC des longueurs $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, les projections de la résultante de ces longueurs sur les axes Ox, Oy, Oz de coordonnées seront

$$A\frac{\lambda-\alpha}{r}+B\frac{\lambda-\alpha_1}{r_1}+C\frac{\lambda-\alpha_2}{r_2},$$

$$A\frac{\mu-\beta}{r}+B\frac{\mu-\beta_1}{r_1}+C\frac{\mu-\beta_2}{r_2},$$

$$A\frac{\nu}{r}+B\frac{\nu}{r_1}+C\frac{\nu}{r_2},$$

puisque les longueurs MA, MB, MC sont respectivement égales, d'après les hypothèses, à r, r_1, r_2. Mais si, d'un autre côté, la résultante des longueurs $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ doit coïncider avec la normale au point (λ, μ, ν) à la surface Σ, $F(\lambda, \mu, \nu) = 0$, on aura

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &A\frac{\lambda-\alpha}{r} + B\frac{\lambda-\alpha_1}{r_1} + C\frac{\lambda-\alpha_2}{r_2} = K'\frac{dF}{d\lambda},\\ &A\frac{\mu-\beta}{r} + B\frac{\mu-\beta_1}{r_1} + C\frac{\mu-\beta_2}{r_2} = K'\frac{dF}{d\mu},\\ &A\frac{\nu}{r} + B\frac{\nu}{r_1} + C\frac{\nu}{r_2} = K'\frac{dF}{d\nu}.\end{aligned}\right.$$

L'élimination de $\frac{dF}{d\lambda}$, $\frac{dF}{d\mu}$, $\frac{dF}{d\nu}$, entre les équations (5) et (6), conduit à

$$\begin{aligned} &A\frac{\lambda-\alpha}{r} + B\frac{\lambda-\alpha_1}{r_1} + C\frac{\lambda-\alpha_2}{r_2}\\ &\quad = K''\left(\frac{d\varphi}{dr}\frac{\lambda-\alpha}{r} + \frac{d\varphi}{dr_1}\frac{\lambda-\alpha_1}{r_1} + \frac{d\varphi}{dr_2}\frac{\lambda-\alpha_2}{r_2}\right),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

équations qu'on peut écrire

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(A - K''\frac{d\varphi}{dr}\right)\frac{\lambda-\alpha}{r} + \left(B - K''\frac{d\varphi}{dr_1}\right)\frac{\lambda-\alpha_1}{r_1}\\ &\qquad + \left(C - K''\frac{d\varphi}{dr_2}\right)\frac{\lambda-\alpha_2}{r_2} = 0,\\ &\left(A - K''\frac{d\varphi}{dr}\right)\frac{\mu-\beta}{r} + \left(B - K''\frac{d\varphi}{dr_1}\right)\frac{\mu-\beta_1}{r_1}\\ &\qquad + \left(C - K''\frac{d\varphi}{dr_2}\right)\frac{\mu-\beta_2}{r_2} = 0,\\ &\left(A - K''\frac{d\varphi}{dr}\right)\frac{1}{r} + \left(B - K''\frac{d\varphi}{dr_1}\right)\frac{1}{r_1}\\ &\qquad + \left(C - K''\frac{d\varphi}{dr_2}\right)\frac{1}{r_2} = 0.\end{aligned}\right.$$

Or le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{\lambda-\alpha}{r} & \frac{\lambda-\alpha_1}{r_1} & \frac{\lambda-\alpha_2}{r_2} \\ \frac{\mu-\beta}{r} & \frac{\mu-\beta_1}{r_1} & \frac{\mu-\beta_2}{r_2} \\ \frac{1}{r} & \frac{1}{r_1} & \frac{1}{r_2} \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} \lambda-\alpha & \lambda-\alpha_1 & \lambda-\alpha_2 \\ \mu-\beta & \mu-\beta_1 & \mu-\beta_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

n'est pas nul, puisqu'il représente le double de la surface du triangle ABC; il résulte donc des équations (7) :

$$(8) \qquad A = K'' \frac{d\varphi}{dr}, \quad B = K'' \frac{d\varphi}{dr_1}, \quad C = K'' \frac{d\varphi}{dr_2}.$$

5. Ceci établi, portons les longueurs $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ sur SA′, SB′, SC′; les projections de la résultante sur Ox, Oy, Oz seront respectivement

$$A\frac{x-a}{r} + B\frac{x-a_1}{r_1} + C\frac{x-a_2}{r_2},$$
$$A\frac{y-b}{r} + B\frac{y-b_1}{r_1} + C\frac{y-b_2}{r_2},$$
$$A\frac{z-c}{r} + B\frac{z-c_1}{r_1} + C\frac{z-c_2}{r_2};$$

ou, d'après les valeurs (8),

$$K''\left(\frac{d\varphi}{dr}\frac{x-a}{r} + \frac{d\varphi}{dr_1}\frac{x-a_1}{r_1} + \frac{d\varphi}{dr_2}\frac{x-a_2}{r_2}\right),$$
$$K''\left(\frac{d\varphi}{dr}\frac{y-b}{r} + \frac{d\varphi}{dr_1}\frac{y-b_1}{r_1} + \frac{d\varphi}{dr_2}\frac{y-b_2}{r_2}\right),$$
$$K''\left(\frac{d\varphi}{dr}\frac{z-c}{r} + \frac{d\varphi}{dr_1}\frac{z-c_1}{r_1} + \frac{d\varphi}{dr_2}\frac{z-c_2}{r_2}\right),$$

ou enfin

$$(9) \qquad K''\frac{d\varphi}{dx}, \quad K''\frac{d\varphi}{dy}, \quad K''\frac{d\varphi}{dz}.$$

Mais ces dernières valeurs sont précisément proportionnelles aux cosinus des angles, avec les axes, de la normale en $S(x, y, z)$ à la surface (4); la résultante de SA'_1, SB'_1, SC'_1 est donc dirigée suivant cette normale. C. Q. F. D.

6. Le théorème général que je viens d'établir renferme, comme cas particulier, le suivant :

1° *Étant donnés trois points fixes* A, B, C, *et trois autres points* A', B', C' *dans l'espace; si l'on considère un point quelconque* M *dans le plan* ABC, *et qu'on construise une pyramide* A'B'C'S *telle qu'on ait toujours, quel que soit le point* M,

$$SA' = MA, \quad SB' = MB, \quad SC' = MC;$$

le point S *engendrera une surface du second ordre.*

2° *Si l'on prend sur* MA, MB, MC *des longueurs* MA_1, MB_1, MC_1 *telles que les trois forces, ayant pour intensités ces longueurs, soient en équilibre, et qu'on porte sur* SA', SB', SC', *à partir du point* S, *des longueurs* SA'_1, SB'_1, SC'_1, *respectivement égales à* MA_1, MB_1, MC_1; *la résultante des forces* SA'_1, SB'_1, SC'_1 *sera normale en* S' *à la surface engendrée.*

La première partie de ce théorème particulier est due à Jacobi, la seconde à Joachimsthal (*voir* le *Journal de Borchardt*, t. LXXIII, p. 180 et 207).

NOTE SUR LE QUADRILATÈRE INSCRIT DONT LES DIAGONALES SONT RECTANGULAIRES;

PAR M. L. SANCERY, à Nice.

La question qui a été proposée pour le concours général de Mathématiques élémentaires en 1870 (voir *Nou-*

velles Annales, t. IX, p. 383) portait sur les propriétés du quadrilatère inscrit dont les diagonales sont rectangulaires. Ces propriétés sont assez nombreuses, et il en est qu'on rencontre dans les œuvres d'Archimède. Parmi celles dont le concours exigeait la démonstration, plusieurs se trouvant exposées dans certains ouvrages élémentaires fort répandus, on peut croire que la partie la plus essentielle de la question consistait à trouver le lieu géométrique des sommets du quadrilatère circonscrit. C'est ce lieu que nous allons établir à l'aide de la seule Géométrie. Nous développerons ensuite un autre lieu lié au précédent, et nous ajouterons les énoncés d'un assez grand nombre de propriétés.

La figure que nous avons à considérer, comportant un très-grand nombre de points, le lecteur est prié de la construire d'après les indications suivantes.

Le rayon r de la circonférence donnée O a une longueur de 45 millimètres; le point P, autour duquel on fait tourner les diagonales rectangulaires, est situé à droite, sur le rayon horizontal, à une distance du centre égale à 24 millimètres. La première diagonale AC, passant par P, fait un angle φ de 13 degrés avec le prolongement de OP et au-dessus de ce prolongement. Des points A et C, A est le plus éloigné de P et se trouve au-dessous du diamètre horizontal. Le quadrilatère inscrit est ABCD, le quadrilatère circonscrit, formé par les tangentes menées par les sommets du premier, est A'B'C'D', A' étant l'intersection de tangentes en A et B. Les lettres se succèdent dans le parcours des quadrilatères de gauche à droite; AB et DC se coupent en K, BC et AD en L, A'B' et D'C' en M, B'C' et A'D' en N.

I. Les diagonales A'C', B'D' du quadrilatère circonscrit se coupent en P et passent respectivement par les points K, L, intersections des côtés opposés du quadrilatère inscrit. Les points K, L, M, N sont sur la polaire de P par rapport au cercle O. Le quadrilatère A′B′C′D′ est inscriptible dans une circonférence O′, et la polaire du point P, par rapport à cette circonférence, est encore la droite KLMN; d'où il suit que le centre O′ est sur la ligne OP. Ce sont ces propriétés auxquelles nous faisions allusion en commençant.

2. Pour démontrer que les sommets du quadrilatère variable A′B′C′D′ sont toujours sur la même circonférence, nous chercherons la valeur du produit A′P.PC′. Nous obtiendrons ainsi une première relation entre le rayon R du cercle circonscrit et la distance O′P ou D. Nous exprimerons ensuite que la droite KLMN est la polaire du point P par rapport aux deux circonférences O et O′. Nous aurons ainsi une seconde relation entre R et D. De ces deux relations résultera naturellement la démonstration.

En abaissant PI, OG, OF perpendiculaires sur A′B′, BD, AC, on a, par le triangle A′PB,

$$A'P^2 = A'B^2 + BP^2 + 2\,A'B.BI,$$

puis, par les triangles rectangles semblables A′OB, BPC,

$$A'B = r\,\frac{PB}{PC},$$

et enfin, par les triangles rectangles semblables PBI, OBG,

$$BI = \frac{OG.PB}{r}.$$

Il suit de là

$$A'P^2 = \frac{BP^2}{PC^2}\,(r^2 + PC^2 + 2\,OG.PC);$$

mais le triangle OPC donne

$$r^2 = \mathrm{PC}^2 + d^2 + 2\,\mathrm{PC}.\mathrm{FP};$$

par conséquent, si l'on observe que $\mathrm{FP} = \mathrm{OG}$, et si l'on remplace $\mathrm{PC}^2 + 2\,\mathrm{OG}.\mathrm{PC}$ par $r^2 - d^2$, on obtiendra

$$\mathrm{A'P}^2 = \frac{\mathrm{BP}^2}{\mathrm{PC}^2}(2r^2 - d^2).$$

Par analogie on a aussi

$$\mathrm{PC'}^2 = \frac{\mathrm{PC}^2}{\mathrm{BP}^2}(2r^2 - d^2).$$

De ces deux relations on déduit

$$\mathrm{A'P}.\mathrm{PC'} = 2r^2 - d^2;$$

or, dans le cercle O' on a immédiatement

$$\mathrm{A'P}.\mathrm{PC'} = \mathrm{R}^2 - \mathrm{D}^2;$$

par conséquent,

$$\mathrm{R}^2 - \mathrm{D}^2 = 2r^2 - d^2.$$

Soient Q le point d'intersection des droites OP, KL, et p, P les distances OQ, O'Q, on a

$$d.p = r^2, \quad \mathrm{D}.\mathrm{P} = \mathrm{R}^2,$$

d'où

$$p = \frac{r^2}{d}, \quad \mathrm{PQ} = \frac{r^2 - d^2}{d} = \frac{\mathrm{R}^2 - \mathrm{D}^2}{\mathrm{D}}.$$

Si l'on remplace $\mathrm{R}^2 - \mathrm{D}^2$ par $2r^2 - d^2$, la dernière relation devient

$$\frac{r^2 - d^2}{d} = \frac{2r^2 - d^2}{\mathrm{D}},$$

on en tire

$$\frac{r^2 - d^2}{d} = \frac{r^2}{\mathrm{D} - d} \quad \text{ou} \quad \mathrm{OO'} = \frac{dr^2}{r^2 - d^2}.$$

Par suite, si, dans la relation

$$R^2 = (OO' + d)(OO + p)$$

on remplace OO′ et p par leurs valeurs, on trouve

$$R^2 = \frac{r^4(2r^2 - d^2)}{(r^2 - d^2)^2}.$$

Les valeurs de OO′ et de R, étant constantes, montrent que, lorsqu'on fait tourner autour du point P les cordes rectangulaires AC, BD, le quadrilatère A′B′C′D′ reste toujours inscrit dans la même circonférence.

3. Étant donné le quadriatère variable ABCD, dont les diagonales rectangulaires passent par le point fixe P, on abaisse des perpendiculaires de ce point sur les quatre côtés, et l'on prend les milieux de ces côtés. Trouver le lieu des pieds des perpendiculaires et des points milieux.

Soient $P\alpha'$, $P\beta'$, $P\gamma'$, $P\delta'$ les perpendiculaires abaissées du point P respectivement sur AB, BC, CD, DA. Prolongeons ces droites jusqu'à ce qu'elles rencontrent les côtés CD, DA, AB, BC en m'', m''', m, m'. Dans le triangle rectangle CPD, les angles $CP\gamma'$, CDP sont égaux entre eux; mais CDP = CAB comme ayant la même mesure, donc $CP\gamma' = CAB$; d'ailleurs, $CP\gamma' = APm$, par conséquent $CAB = APm$. Le triangle AmP ayant deux angles égaux est donc isoscèle, et $mA = mP$. Si du point m comme centre avec mA pour rayon on décrit une circonférence, elle passera d'abord par les points A, P, puis par le point B, puisque l'angle APB est droit, autrement dit m est le milieu de AB. Ainsi, le prolongement de la perpendiculaire $P\gamma'$ sur CD passe par le milieu m du côté opposé à CD dans le quadrilatère ABCD.

Si l'on joint les points milieux, la figure $mm'm''m'''$ sera un rectangle, puisque ses côtés sont respectivement parallèles aux droites AC, BD. Les diagonales mm'', $m'm'''$ sont donc égales, et si de leur intersection ω avec ωm pour rayon on décrit une circonférence, elle passera par les points m, m', m'', m''', et aussi par les points α', β', γ', δ', puisque les angles $m\alpha' m''$, $m\gamma' m''$, $m'\beta' m'''$, $m'\delta' m'''$ sont droits. Par là on voit que les projections du point P sur les côtés et les milieux de ces côtés sont sur une même circonférence.

Joignons maintenant m''O; la figure PmOm'' est un parallélogramme, car Om et Pm'' sont parallèles comme perpendiculaires à AB; Pm et Om'' le sont aussi comme perpendiculaires à CD. Il en résulte, les diagonales se coupant en parties égales, que le milieu ω de mm'' est aussi le milieu de OP. Le centre de la circonférence $m\alpha' m'\beta'\gamma' m''\delta' m'''$ est donc invariable.

Évaluons son diamètre mm'', que nous désignerons par 2ρ. Le triangle rectangle $mm'm''$ donne

$$mm''^2 = mm'^2 + m'm''^2 = \frac{\mathrm{AC}^2 + \mathrm{BD}^2}{4};$$

or

$$\mathrm{AC}^2 + \mathrm{BD}^2 = 8r^2 - 4d^2;$$

par conséquent,

$$4\rho^2 = 2r^2 - d^2.$$

Le diamètre est donc constant. Ainsi le lieu demandé est une circonférence ayant pour centre le milieu ω de OP et pour rayon

$$\rho = \frac{\sqrt{2r^2 - d^2}}{2}.$$

Remarque. — On a trouvé Om = Pm'' = $\frac{\mathrm{DC}}{2}$; ainsi, dans le quadrilatère ABCD, la distance d'un côté au centre est égale à la moitié du côté opposé.

4. Les rayons des deux cercles O′, ω étant respectivement fournis par les formules

$$R^2 = \frac{r^4(2r^2 - d^2)}{(r^2 - d^2)^2}, \quad 4\rho^2 = 2r^2 - d^2,$$

on obtient par la division

$$\frac{R}{2\rho} = \frac{r^2}{r^2 - d^2};$$

mais on a trouvé

$$OO' = \frac{dr^2}{r^2 - d^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{OO'}{OP} = \frac{r^2}{r^2 - d^2},$$

d'ailleurs $OP = 2O\omega$, donc

$$\frac{R}{\rho} = \frac{O'O}{O\omega} = \frac{2r^2}{r^2 - d^2}.$$

Il suit de là que les deux courbes O′, ω ont pour centre de similitude inverse le centre de la circonférence donnée et que le rapport de similitude est $\frac{2r^2}{r^2 - d^2}$. Il est évident que la polaire du point P par rapport au cercle ω est encore la droite KL.

5. Si l'on prolonge la ligne A′O jusqu'à son intersection A_1 avec la circonférence ω, ce point sera l'antihomologue de A′, mais si l'on mène le diamètre du cercle ω qui passe par A_1, son autre extrémité sera l'homologue directe de A′; or, l'angle $A_1 m \alpha'$ étant droit, ce diamètre passe par α'; ainsi α' est l'homologue direct de A′.

Les points α', β', γ', δ' étant les homologues respectifs de A′, B′, C′, D′, il en résulte que le quadrilatère $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ est homothétique direct avec A′B′C′D′. La ligne $A'\alpha'$

coupant $O'\omega$ en S, ce point sera le centre de similitude direct des deux cercles O', ω et l'on aura

$$\frac{SO'}{S\omega} = \frac{OO'}{O\omega} = \frac{2r^2}{r^2 - d^2}.$$

6. Le quadrilatère $A'B'C'D'$ étant inscriptible, et circonscriptible, son semblable $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ jouit de la même propriété. Il est donc circonscriptible à un cercle dont on obtiendra le centre en cherchant l'homologue de O par rapport à S. Or, les points A', α' étant homologues, il suffira, pour obtenir ce centre, de mener par α' une parallèle à $A'O$ et de déterminer son intersection avec SO; mais $\alpha'P$ est justement parallèle à $A'O$; le point P est donc le centre de cette circonférence. Si l'on mène BS, elle coupera $\alpha'\beta'$ au point de contact b. En joignant les points de contact a, b, c, d, on obtiendra un quadrilatère $abcd$ qui sera homothétique direct de ABCD. Le rayon ρ_1 de la dernière circonférence s'obtiendra par la proportion

$$\frac{\rho_1}{r} = \frac{r^2 - d^2}{2r^2}, \quad \text{d'où} \quad \rho_1 = \frac{r^2 - d^2}{2r}.$$

Les diagonales $\alpha'\gamma'$, $\beta'\delta'$ se couperont en un point P', qui, étant l'homologue de P par rapport à S, sera fixe comme le point P.

7. Les résultats précédents peuvent être ainsi résumés :

Étant donné un quadrilatère variable inscrit dans une circonférence et dont les diagonales rectangulaires se coupent toujours en un point fixe P, *si l'on projette ce point fixe sur les quatre côtés, les projections obtenues seront les sommets d'un quadrilatère variable toujours inscriptible dans la même circonférence, dont les diagonales passeront toujours par un point fixe, et* *dont les côtés seront toujours tangents à une même circonférence ayant le point* P *pour centre.*

Il est visible en outre que, puisque aux quadrilatères $A'B'C'D'$, ABCD correspondent les deux quadrilatères $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$, *abcd*, à ces deux derniers en correspondront deux autres, et ainsi de suite indéfiniment. Tous ces quadrilatères auront le point S pour centre de similitude direct.

8. Voici maintenant un tableau de quelques propriétés du système des deux quadrilatères ABCD, $A'B'C'D'$.

Soient α, β les angles DAB, ABC dont les valeurs sont fournies par les relations

$$\cos\alpha = \frac{d\cos\varphi}{r}, \quad \cos\beta = \frac{d\sin\varphi}{r},$$

où φ désigne l'angle OPA. On a

1°

$$\begin{aligned}
\mathrm{AKD} &= \beta - \alpha - \alpha'\mathrm{P}m,\\
\mathrm{ALB} &= 180° - (\alpha + \beta) = \beta'\mathrm{P}m',\\
\mathrm{A'MD'} &= \mathrm{ALB} + \mathrm{AKB},\\
\mathrm{A'NB'} &= \mathrm{ALB} - \mathrm{AKB};
\end{aligned}$$

2°

$$\begin{aligned}
\mathrm{ABD} &= 45° + \frac{\beta - \alpha}{2} = \mathrm{ACD},\\
\mathrm{BAC} &= 45° - \frac{\beta - \alpha}{2} = \mathrm{BDC},\\
\mathrm{DBC} &= \frac{\alpha + \beta}{2} - 45° = \mathrm{CAD},\\
\mathrm{BCA} &= 135° - \frac{\alpha + \beta}{2} = \mathrm{BDA};
\end{aligned}$$

3°

$$\begin{aligned}
\mathrm{A'} &= \alpha + \beta - 90°, & \mathrm{C'} &= 270 - (\alpha + \beta),\\
\mathrm{B'} &= 90° + \beta - \alpha, & \mathrm{D'} &= 90° - (\beta - \alpha);
\end{aligned}$$

4°

$$A' + L = 90^\circ, \qquad D' + K = 90^\circ,$$
$$CC'D - L = 90^\circ, \quad BB'C - K = 90^\circ;$$

5°

$$Pm^2 + Pm'^2 + Pm''^2 + Pm'''^2 = 2r^2,$$
$$P\alpha' . P\beta', P\gamma' . P\delta' = \frac{(r^2 - d^2)^3}{4r^2},$$
$$Om . Om' . Om'' . Om''' = \frac{r^2}{4}(r^2 - d^2),$$
$$\sin A' . \sin B' = \frac{r^2 - d^2}{r^2},$$

ou

$$\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) = \frac{d^2 - r^2}{r^2};$$

6°

$$A'B = r\frac{PA}{PD}, \quad A'B' = r\frac{AC}{PD},$$
$$A'A . C'D = r^2, \quad A'A . A'D = r^2\frac{AP}{PC},$$
$$\frac{AA'}{AD'} = \frac{PB}{PD};$$

7° Les diagonales du quadrilatère ABCD sont les bissectrices des angles des diagonales du quadrilatère A′B′C′D′ :

$$\frac{PA'}{PD'} = \frac{PB}{PD}, \quad \frac{A'A}{AD'} = \frac{BP}{PD};$$

8° S étant la surface du quadrilatère ABCD,

$$A'C' + B'D' = S\,\frac{2\sqrt{2r^2 - d^2}}{r^2 - d^2},$$
$$A'C' . B'D' = \frac{4r^2(2r^2 - d^2)}{r^2 - d^2};$$

9°

$$\frac{AA'}{A'P} = \frac{r}{\sqrt{2r^2 - d^2}},$$

$$\operatorname{tang} \frac{A'PD'}{2} = \frac{AC}{BD}, \quad \sin A'PD' = \frac{S}{2r^2 - d^2},$$

$$\frac{\sin PA'B}{\sin PA'A} = \frac{\text{tr.}\,BCD}{\text{tr.}\,ADC};$$

10° S', σ, σ' étant les surfaces des quadrilatères $A'B'C'D'$, $mm'm''m'''$, $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$,

$$\frac{S'}{S} = \frac{2r^2}{r^2 - d^2}, \quad \frac{\sigma'}{S} = \frac{2r^2}{r^2 - d^2},$$

$$\frac{S'}{S} = \frac{S}{\sigma'}, \qquad \frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{r^2}{r^2 - d^2}.$$

THÉORÈMES DE STATIQUE;

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

I.

THÉORÈME. — *Étant donnés n points dans l'espace, la somme des carrés des droites qui joignent ces points deux à deux, de toutes les manières possibles, vaut n fois la somme des carrés des droites qui joignent ces mêmes points au centre de gravité du système qu'ils forment.*

Comme le carré de toute droite de l'espace est la somme des carrés des projections de cette droite sur trois axes rectangulaires, il suffit de démontrer le théorème pour n points en ligne droite.

Considérons donc n points en ligne droite; prenons pour origine le centre de gravité du système qu'ils forment; désignons leurs abscisses par $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$; et remarquons que, l'origine étant le centre de gravité,

$$\sum x = 0.$$

Cela posé, le carré de la droite qui joint les points d'indices α, β est

$$(x_\alpha - x_\beta)^2; \tag{1}$$

celui de la droite qui joint le centre de gravité au point d'indice ε est

$$x\ . \tag{2}$$

Il suffit donc de prouver que la somme des expressions (1) vaut n fois la somme des expressions (2).

Or, on a évidemment

$$\sum (x_\alpha - x_\beta)^2 = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{matrix} \right\|^2,$$

ou bien

$$\sum (x_\alpha - x_\beta)^2 = \begin{vmatrix} n & x \\ \sum x & \sum x^2 \end{vmatrix};$$

à cause de $\sum x = 0$, on a aussi

$$\begin{vmatrix} n & \sum x \\ \sum x & \sum x^2 \end{vmatrix} = n \sum x^2.$$

Donc

$$\sum (x_\alpha - x_\beta)^2 = n \sum x_\varepsilon^2. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

II.

Théorème. — *Étant donnés n points dans l'espace, la somme des carrés des aires des triangles ayant pour sommets ces points pris trois à trois, de toutes les manières possibles, vaut n fois la somme des carrés des aires des triangles ayant pour sommets le centre de* *gravité du système des n points et un couple quelconque de ces mêmes points pris deux à deux, de toutes les manières possibles.*

Comme le carré de l'aire de tout triangle est la somme des carrés des aires des projections de ce triangle sur trois plans rectangulaires, il suffit d'établir le théorème pour n points situés dans un même plan.

Considérons donc n points dans un plan; prenons pour origine le centre de gravité du système, et pour axes deux droites rectangulaires quelconques passant par l'origine; désignons par $x_1 y_1$, $x_2 y_2, \ldots, x_n y_n$ les coordonnées des n points; et remarquons que, l'origine étant le centre de gravité du système, on a

$$\Sigma x = \Sigma y = 0.$$

Cela posé, le carré de l'aire du triangle qui a pour sommets les points d'indices α, β, γ est

$$(3) \qquad \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_\alpha & x_\beta & x_\gamma \\ y_\alpha & y_\beta & y_\gamma \end{vmatrix}^2;$$

le carré de l'aire de celui qui a pour sommets l'origine et les points d'indices ε, ζ est

$$(4) \qquad \frac{1}{4}\begin{vmatrix} x_\varepsilon & x_\zeta \\ y_\varepsilon & y_\zeta \end{vmatrix}^2.$$

Il suffit donc de prouver que, abstraction faite du facteur $\frac{1}{4}$, la somme des expressions (3) vaut n fois la somme des expressions (4).

Or, on a évidemment

$$\sum \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_\alpha & x_\beta & x_\gamma \\ y_\alpha & y_\beta & y_\gamma \end{vmatrix}^2 = \left\|\begin{matrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n \end{matrix}\right\|^2,$$

ou bien

$$\sum \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_\alpha & x_\beta & x_\gamma \\ y_\alpha & y_\beta & y_\gamma \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} n & \Sigma x & \Sigma y \\ \Sigma x & \Sigma x^2 & \Sigma xy \\ \Sigma y & \Sigma yx & \Sigma y^2 \end{vmatrix};$$

on a aussi

$$\sum \begin{vmatrix} x_\varepsilon & x_\zeta \\ y_\varepsilon & y_\zeta \end{vmatrix}^2 = \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{Vmatrix}^2,$$

ou bien

$$\sum \begin{vmatrix} x_\varepsilon & x_\zeta \\ y_\varepsilon & y_\zeta \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \Sigma x^2 & \Sigma xy \\ \Sigma yx & \Sigma y^2 \end{vmatrix};$$

à cause de $\Sigma x = \Sigma y = 0$, on a enfin

$$\begin{vmatrix} n & \Sigma x & \Sigma y \\ \Sigma x & \Sigma x^2 & \Sigma xy \\ \Sigma y & \Sigma yx & \Sigma y^2 \end{vmatrix} = n \begin{vmatrix} \Sigma x^2 & \Sigma xy \\ \Sigma yx & \Sigma y^2 \end{vmatrix}.$$

Donc

$$\sum \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_\alpha & x_\beta & x_\gamma \\ y_\alpha & y_\beta & y_\gamma \end{vmatrix}^2 = n \sum \begin{vmatrix} x_\varepsilon & x_\zeta \\ y_\varepsilon & y_\zeta \end{vmatrix}^2.$$

C. Q. F. D.

III.

Théorème. — *Étant donnés n points dans l'espace, la somme des carrés des volumes des tétraèdres qui ont pour sommets ces n points pris quatre à quatre, de toutes les manières possibles, vaut n fois la somme des carrés des volumes des tétraèdres qui ont pour sommets le centre de gravité du système des n points, et un groupe de ces n points pris trois à trois, de tous les manières possibles.*

Pour le démontrer, prenons pour origine le centre de gravité du système des n points, et pour axes trois droites rectangulaires quelconques passant par cette origine; désignons par $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2, \ldots,$ $x_n y_n z_n$ les coordonnées des n points; et remarquons que, l'origine étant le centre de gravité, on a

$$\Sigma x = \Sigma y = \Sigma z = 0.$$

Cela posé, le carré du volume du tétraèdre qui a pour sommets les points d'indices α, β, γ, δ, est

$$(5) \qquad \frac{1}{36}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_\alpha & x_\beta & x_\gamma & x_\delta \\ y_\alpha & y_\beta & y_\gamma & y_\delta \\ z_\alpha & z_\beta & z_\gamma & z_\delta \end{vmatrix}^2;$$

et le carré du volume du tétraèdre qui a pour sommets l'origine et les points d'indice ε, ζ, η est

$$(6) \qquad \frac{1}{36}\begin{vmatrix} x_\varepsilon & x_\zeta & x_\eta \\ y_\varepsilon & y_\zeta & y_\eta \\ z_\varepsilon & z_\zeta & z_\eta \end{vmatrix}^2.$$

Il suffit donc de prouver que, abstraction faite du facteur $\frac{1}{36}$, la somme des expressions (5) vaut n fois la somme des expressions (6).

Or, on a évidemment

$$\sum \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_\alpha & x_\beta & x_\gamma & x_\delta \\ y_\alpha & y_\beta & y_\gamma & y_\delta \\ z_\alpha & z_\beta & z_\gamma & z_\delta \end{vmatrix}^2 = \left\Vert \begin{matrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ y_1 & y_2 & \ldots & x_n \\ z_1 & z_2 & \ldots & z_n \end{matrix} \right\Vert^2,$$

ou bien

$$\sum \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_\alpha & x_\beta & x_\gamma & x_\delta \\ y_\alpha & y_\beta & y_\gamma & y_\delta \\ z_\alpha & z_\beta & z_\gamma & z_\delta \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} n & \Sigma x & \Sigma y & \Sigma z \\ \Sigma x & \Sigma x^2 & \Sigma xy & \Sigma xz \\ \Sigma y & \Sigma yx & \Sigma y & \Sigma yz \\ \Sigma z & \Sigma zx & \Sigma zy & \Sigma z^2 \end{vmatrix};$$

on a aussi

$$\sum \begin{vmatrix} x_\varepsilon & x_\zeta & x_\eta \\ y_\varepsilon & y_\zeta & y_\eta \\ z_\varepsilon & z_\zeta & z_\eta \end{vmatrix}^2 = \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ z_1 & z_2 & \dots & z_n \end{Vmatrix}^2,$$

ou bien

$$\sum \begin{vmatrix} x_\varepsilon & x_\zeta & x_\eta \\ y_\varepsilon & y_\zeta & y_\eta \\ z_\varepsilon & z_\zeta & z_\eta \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \Sigma x^2 & \Sigma xy & \Sigma xz \\ \Sigma yx & \Sigma y^2 & \Sigma yz \\ \Sigma zx & \Sigma zy & \Sigma z^2 \end{vmatrix};$$

enfin, à cause de $\Sigma x = \Sigma y = \Sigma z = 0$, on a

$$\begin{vmatrix} n & \Sigma x & \Sigma y & \Sigma z \\ \Sigma x & \Sigma x^2 & \Sigma xy & \Sigma xz \\ \Sigma y & \Sigma yx & \Sigma y^2 & \Sigma yz \\ \Sigma z & \Sigma zx & \Sigma zy & \Sigma z^2 \end{vmatrix} = n \begin{vmatrix} \Sigma x^2 & \Sigma xy & \Sigma xz \\ \Sigma yx & \Sigma y^2 & \Sigma yz \\ \Sigma zx & \Sigma zy & \Sigma z^2 \end{vmatrix}.$$

Donc

$$\sum \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_\alpha & x_\beta & x_\gamma & x_\delta \\ y_\alpha & y_\beta & y_\gamma & y_\delta \\ z_\alpha & z_\beta & z_\gamma & z_\delta \end{vmatrix}^2 = n \sum \begin{vmatrix} x_\varepsilon & x_\zeta & x_\eta \\ y_\varepsilon & y_\zeta & y_\eta \\ z_\varepsilon & z_\zeta & z_\eta \end{vmatrix}^2,$$

C. Q. F. D.

IV.

Remarque. — Si l'on désigne par ΣL^2, ΣS^2, ΣV^2 et Σl^2, Σs^2, Σv^2 les sommes des carrés des lignes, surfaces et volumes considérés dans les énoncés précédents (les lettres minuscules se rapportant aux figures dont l'origine fait partie), les trois théorèmes qu'on vient de démontrer peuvent se résumer ainsi :

$$\frac{\Sigma L^2}{\Sigma l^2} = \frac{\Sigma S^2}{\Sigma s^2} = \frac{\Sigma V^2}{\Sigma v^2} = n.$$

Remarque. — Les droites qui joignent les n points donnés au centre de gravité peuvent être regardées, soit comme n forces appliquées au même point et se faisant équilibre, soit comme les parallèles menées d'un même point aux n côtés d'un contour fermé. Chacune de ces manières d'envisager ces droites permet de modifier les énoncés des théorèmes précédents.

Remarque. — Les trois démonstrations développées ci-dessus reposent sur un même fait algébrique. Ce fait est général ; mais on ne lui voit pas d'autre interprétation géométrique que les précédentes.

Remarque. — Le premier des trois théorèmes qui précèdent a déjà, m'a-t-on dit, été donné par Carnot. Les deux derniers sont probablement nouveaux.

PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. DOUCET,

Professeur au lycée de Lyon.

Considérons deux triangles, l'un fixe ABC en grandeur et en position, l'autre A′B′C′ de grandeur constante et assujetti seulement à avoir ses côtés respectivement parallèles à ceux de ABC.

C′B′	coupe	AC	en un point	2	et AB	en un point	5
A′C′	»	AB	»	6		»	3
A′B′	»	BC	»	4		»	1

On voit facilement que les deux triangles 1, 3, 5 ; 2, 4, 6 sont équivalents. Cela posé : Démontrer que la surface de 1, 3, 5 est maximum, si les deux triangles ABC, A′B′C′ ont leurs centres de gravité en coïncidence.

Ce théorème, dont l'énoncé est dû à M. Lemoine, se trouve indiqué comme exercice, p. 511 du *Traité d'algèbre* de M. H. Laurent.

Je prends CB et CA pour axes des x et des y.

Soient a, b, c les trois côtés de ABC.

Les cotés de $A'B'C'$ seront $a\theta$, $b\theta$, $c\theta$,

θ étant positif, si l'homothétie est directe, négatif dans le cas contraire.

Soient x et y les coordonnées de C'. On a immédiatement, pour les coordonnées des points 1, 2, 3, 4, 5, 6,

	x	y
(1)	0	$b\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\theta\right)$
(2)	0	y
(3)	x	0
(4)	$a\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\theta\right)$	0
(5)	$a\left(1-\dfrac{y}{b}\right)$	y
(6)	x	$b\left(1-\dfrac{x}{a}\right).$

La surface 1, 3, 5 a pour expression le déterminant

$$\pm\frac{1}{2}\sin C\begin{vmatrix} 1 & 0 & b\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\theta\right) \\ 1 & x & 0 \\ 1 & a\left(1-\dfrac{y}{b}\right) & y \end{vmatrix},$$

ou, en développant d'après la règle de Sarrus,

$$\pm\frac{1}{2}\sin C\left[xy-ab\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\theta\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)\right].$$

On trouve la même expression pour l'aire 2, 4, 6.

Déterminons le signe à adopter dans chaque cas.

Considérons l'ellipse

$$f(xy) = xy - ab\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \theta\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{a} - 1\right) = 0.$$

Elle coupe l'axe des x en B et en un point B$''$ dont l'abscisse est $-a\theta$.

Elle coupe l'axe des y en A et en un point A$''$ dont l'ordonnée est $-b\theta$.

Ces valeurs montrent que

si $\theta > 0$, C est intérieur à cette ellipse,

et que

si $\theta < 0$, C est extérieur à cette ellipse.

Or, pour $x = y = 0$, on a

$$f(x, y) = ab\theta.$$

Donc, si x et y sont les coordonnées d'un point intérieur à cette ellipse, on aura

$$f(x, y) > 0,$$

et, si x et y sont les coordonnées d'un point extérieur, on aura

$$f(x, y) < 0.$$

Dans le premier cas, il faut adopter le signe $+$, dans le second, le signe $-$, pour avoir la surface 1, 3, 5 en valeur absolue.

Nous voyons en même temps que la surface 1, 3, 5 varie avec x et y proportionnellement au z du paraboloïde elliptique

$$z = xy - ab\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \theta\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right),$$

lequel z a un maximum pour les valeurs de x et y correspondant au centre C_1 de l'ellipse $f(x, y) = 0$.

On a pour C_1

$$x = \frac{a}{3}(1 - \theta),$$

$$y = \frac{b}{3}(1 - \theta).$$

Le centre de gravité du triangle A'B'C' dans la position $A_1B_1C_1$ a donc pour coordonnées

$$x = \frac{a}{3}(1 - \theta) + \frac{a}{3}\theta = \frac{a}{3},$$

$$y = \frac{b}{3}(1 - \theta) + \frac{b}{3}\theta = \frac{b}{3},$$

et coïncide, par conséquent, avec celui du triangle ABC.

Remarque I. — La surface maximum est $\frac{S}{3}(1+\theta+\theta^2)$, S désignant l'aire du triangle ABC.

Remaque II. — Si C' se meut sur l'ellipse $f(x, y) = 0$, les trois points 1, 3, 5 ainsi que 2, 4, 6, sont en ligne droite.

Remarque III. — Si C' se meut sur l'ellipse $f(x, y) = K$, K étant constant, la surface 1, 3, 5 reste constante.

BIBLIOGRAPHIE ÉTRANGÈRE.

Thèse de M. Julius Petersen pour le grade de docteur en philosophie.

Om Ligninger, des loses ved kvadratrod med Anveldelse paa Problemers Losning ved Passer og Lineal. — Kjøbenhavn (*).

I. — *Des équations résolubles par des racines carrées.*

1. *La forme des racines.* — Si l'équation est irréductible, elle doit être du degré 2^p. Toute racine peut

(*) *Sur les équations résolubles par des racines carrées, avec application aux problèmes résolubles par la ligne droite et le cercle.* — Copenhague.

donc être déterminée par p extractions de racines carrées (n° 10). Une racine, quelle qu'elle soit, étant connue, on en déduira les autres en prenant chaque radical avec son double signe.

2. *Décomposition d'un polynôme rationnel en facteurs rationnels.* — Détermination d'un facteur de $f(x)$ du deuxième degré; il est facteur commun à $f(x)$ et $f\left(\frac{k}{x}\right)$, k étant le produit d'un couple de racines; détermination de k; cas des racines égales (n^os^ 3-5). Extension à des facteurs d'un degré quelconque. Forme générale d'un tel facteur; ses coefficients sont des fonctions rationnelles d'un quelconque parmi eux, excepté le cas où l'équation qui détermine celui-ci a des racines égales (n^os^ 6, 7).

3. *Résolution des équations irréductibles résolubles par des racines carrées.* — On peut, à cet effet, employer par exemple la substitution

$$y = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \ldots)^2.$$

L'équation en y est de degré impair; elle a, par conséquent, une racine rationnelle, à l'aide de laquelle le degré de l'équation donnée se réduit à la moitié (n^os^ 1-3). Si une des racines peut être exprimée en fonction rationnelle et symétrique d'un certain nombre des autres racines, la résolution de l'équation se réduit en général à celle d'autres équations d'un degré moins élevé (n° 4). Si une équation peut être résolue par des racines carrées et au moyen de la méthode ordinaire, on extrait la racine carrée de son premier membre, les coefficients du reste auront pour facteurs communs tous ceux que contiennent les racines dans les radicaux du premier ordre (n° 5).

II. — *Résolution des problèmes géométriques par la règle et le compas.*

1. *Conditions de possibilité.* — Les coniques sont les seules courbes dont on puisse, par la règle et le compas, déterminer les points d'intersection avec une droite quelconque, et les seules courbes auxquelles on puisse tirer des tangentes d'un point donné arbitrairement (nos 4, 5). Les cercles et les droites sont les *seules* lignes dont, par la règle et le compas, on puisse déterminer les points d'intersection avec un cercle quelconque (no 11). Une courbe dont on peut déterminer, moyennant les mêmes instruments, les points d'intersection avec un cercle quelconque appartenant à un réseau linéaire, est *nécessairement* une quartique bicirculaire (courbe du quatrième ordre douée de points doubles aux points circulaires situés à l'infini) [nos 7, 8]. Extension à un système de droites avec un paramètre arbitraire (nos 13-15).

2. *Méthode générale. Lieux géométriques.* — La détermination d'un point qui doit se trouver sur une droite qui, elle-même, est indépendante des autres quantités données, peut se faire au moyen de cinq essais tout au plus, ou bien le problème n'est pas résoluble. Si l'on substitue un cercle à la droite, trois essais suffiront (nos 1-4). Applications (no 5). Application de cette méthode à la détermination de lieux géométriques.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE CAUCHY : TOUTE ÉQUATION A UNE RACINE;

PAR M. WILLIAM WALTON.

(Traduit de l'anglais de *The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics.*)

Repésentons par $f(x)$ le polynôme de la théorie des équations, et supposons que les coefficients des diverses puissances de x soient des quantités réelles. Remplaçons x par $u+v\sqrt{-1}$, u et v étant réels, et posons

$$f(u+v\sqrt{-1}) = P + Q\sqrt{-1};$$

P et Q sont des quantités réelles.

Différentions cette équation $\lambda+\mu$ fois par rapport à u, et désignons la dérivée d'ordre $(\lambda+\mu)$ de $f(x)$ par $f_{\lambda+\mu}(x)$; nous aurons

$$f_{\lambda+\mu}(u+v\sqrt{-1}) = \frac{d^{\lambda+\mu}P}{du^{\lambda+\mu}} + \sqrt{-1}\,\frac{d^{\lambda+\mu}Q}{du^{\lambda+\mu}}.$$

Différentions maintenant λ fois par rapport à u, μ fois par rapport à v, nous aurons

$$(-1)^{\frac{1}{2}\mu} f_{\lambda+\mu}(u+v\sqrt{-1}) = \frac{d^{\lambda+\mu}P}{du^{\lambda}\,dv^{\mu}} + \sqrt{-1}\,\frac{d^{\lambda+\mu}Q}{du^{\lambda}\,dv^{\mu}}.$$

Ces deux résultats nous montrent que l'on a

$$(-1)^{\frac{1}{2}\mu}\left(\frac{d^{\lambda+\mu}P}{du^{\lambda+\mu}} + \sqrt{-1}\,\frac{d^{\lambda+\mu}Q}{du^{\lambda+\mu}}\right) = \frac{d^{\lambda+\mu}P}{du^{\lambda}\,dv^{\mu}} + \sqrt{-1}\,\frac{d^{\lambda+\mu}Q}{du^{\lambda}\,dv^{\mu}}.$$

De cette relation, on déduit les deux systèmes

$$(1)\qquad \mu \text{ pair } \left\{ \begin{aligned} \frac{d^{\lambda+\mu}\mathrm{P}}{du^\lambda\, dv^\mu} &= (-1)^{\frac{1}{2}\mu}\frac{d^{\lambda+\mu}\mathrm{P}}{du^{\lambda+\mu}},\\ \frac{d^{\lambda+\mu}\mathrm{Q}}{du^\lambda\, dv^\mu} &= (-1)^{\frac{1}{2}\mu}\frac{d^{\lambda+\mu}\mathrm{Q}}{du^{\lambda+\mu}}; \end{aligned}\right.$$

$$(2)\qquad \mu \text{ impair } \left\{ \begin{aligned} \frac{d^{\lambda+\mu}\mathrm{P}}{du^\lambda\, dv^\mu} &= (-1)^{\frac{1}{2}(\mu+1)}\frac{d^{\lambda+\mu}\mathrm{Q}}{du^{\lambda+\mu}},\\ \frac{d^{\lambda+\mu}\mathrm{Q}}{du^\lambda\, dv^\mu} &= (-1)^{\frac{1}{2}(\mu-1)}\frac{d^{\lambda+\mu}\mathrm{P}}{du^{\lambda+\mu}}. \end{aligned}\right.$$

Désignons par F la quantité $\mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2$, et nous allons déterminer la nature du minimum de F, qui existe certainement. Écrivons $u+h$, $v+k$ à la place de u et v, et appelons F′ la valeur correspondante de F, alors

$$\begin{aligned} \mathrm{F}' - \mathrm{F} = {} & \left(h\frac{d}{du} + k\frac{d}{dv}\right)(\mathrm{P}^2+\mathrm{Q}^2)\\ & + \frac{1}{1.2}\left(h\frac{d}{du} + k\frac{d}{dv}\right)^2(\mathrm{P}^2+\mathrm{Q}^2) + \ldots. \end{aligned}$$

Cette expression montre que l'existence d'un minimum pour F exige que l'on ait

$$(3)\qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{P}\frac{d\mathrm{P}}{du} + \mathrm{Q}\frac{d\mathrm{Q}}{du} &= 0,\\ \mathrm{P}\frac{d\mathrm{P}}{dv} + \mathrm{Q}\frac{d\mathrm{Q}}{dv} &= 0. \end{aligned}\right.$$

Mais, en faisant dans (2) $\lambda = 0$, $\mu = 1$, on voit que $\frac{d\mathrm{P}}{dv} = -\frac{d\mathrm{Q}}{du}$, $\frac{d\mathrm{Q}}{dv} = \frac{d\mathrm{P}}{du}$; donc, par suite de (3), on doit avoir simultanément

$$\mathrm{F}\frac{d\mathrm{P}}{du} = 0,\quad \mathrm{F}\frac{d\mathrm{P}}{dv} = 0,\quad \mathrm{F}\frac{d\mathrm{Q}}{du} = 0,\quad \mathrm{F}\frac{d\mathrm{Q}}{dv} = 0.$$

Par suite, on devra avoir simultanément ou bien

$$P = 0, \quad Q = 0,$$

ou bien

$$\frac{dP}{du} = 0, \quad \frac{dP}{dv} = 0, \quad \frac{dQ}{du} = 0, \quad \frac{dQ}{dv} = 0.$$

Supposons d'abord que P et Q ne soient pas tous deux nuls, et choisissons la seconde hypothèse; et supposons, en outre, que, dans le développement par rapport aux puissances de h et k, de la valeur de $F' - F$, le premier ordre des coefficients différentiels partiels de P et Q, dont quelques-uns au moins ne sont pas nuls, soit $2r$. Il est inutile de considérer l'hypothèse où cet ordre de coefficients serait impair, puisque, dans cette circonstance, on n'aurait pas un minimum pour F.

On a donc

$$(4) \quad 1.2\ldots 2r(F' - F) = \left(h\frac{d}{du} + k\frac{d}{dv}\right)^{2r}(P^2 + Q^2) + \ldots.$$

Maintenant, à l'aide du théorème de Leibnitz, on a

$$\frac{d^{2r}P^2}{du^{2r-\nu}\,dv^\nu} = \frac{d^{2r-\nu}}{du^{2r-\nu}}\left(P\frac{d^\nu P}{dv^\nu} + \frac{\nu}{1}\frac{dP}{dv}\frac{d^{\nu-1}P}{dv^{\nu-1}} + \ldots + P\frac{d^\nu P}{dv^\nu}\right)$$

$= 2P\dfrac{d^{2r}P}{du^{2r-\nu}\,dv^\nu} +$ des multiples des coefficients différentiels de P d'ordre inférieur, lesquels sont tous nuls.

Donc on a

$$(5) \qquad \frac{d^{2r}P^2}{du^{2r-\nu}\,dv^\nu} = 2P(-1)^{\frac{1}{2}\nu}\frac{d^{2r}P}{du^{2r}}, \quad \text{pour } \nu \text{ pair},$$

ou

$$(6) \quad \frac{d^{2r}P^2}{du^{2r-\nu}\,dv^\nu} = 2P(-1)^{\frac{1}{2}(\nu+1)}\frac{d^{2r}Q}{du^{2r}}, \quad \text{pour } \nu \text{ impair}.$$

En employant le même procédé, on trouve

$$\frac{d^{2r}Q^2}{du^{2r-\nu}\,dv^\nu} = 2Q\,\frac{d^{2r}Q}{du^{2r-\nu}\,dv^\nu}\,\nu,$$

c'est-à-dire

$$(7)\qquad \frac{d^{2r}Q^2}{du^{2r-\nu}\,dv^\nu} = 2Q(-1)^{\frac{1}{2}\nu}\,\frac{d^{2r}Q}{du^{2r}} \quad \text{pour} \quad \nu \text{ pair},$$

ou

$$(8)\qquad \frac{d^{2r}Q^2}{du^{2r-\nu}\,dv^\nu} = 2Q(-1)^{\frac{1}{2}(\nu-1)}\,\frac{d^{2r}P}{du^{2r}} \quad \text{pour} \quad \nu \text{ impair}.$$

Par suite de ces relations, l'équation (4) devient, c_ν indiquant le nombre de combinaisons de $2r$ objets ν à ν,

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\,1.2\ldots 2r(F'-F)\\
&\quad = P\left[h^{2r}\frac{d^{2r}P}{du^{2r}} - c_1 h^{2r-1}k\,\frac{d^{2r}Q}{du^{2r}} - \ldots\right.\\
&\qquad\qquad \left. + (-1)^r c_1 hk^{2r-1}\,\frac{d^{2r}Q}{du^{2r}} + (-1)^r k^{2r}\,\frac{d^{2r}P}{du^{2r}}\right]\\
&\qquad + Q\left[h^{2r}\frac{d^{2r}Q}{du^{2r}} + c_1 h^{2r-1}k\,\frac{d^{2r}P}{du^{2r}} - \ldots\right.\\
&\qquad\qquad \left. + (-1)^{r-1} c_1 hk^{2r-1}\,\frac{d^{2r}P}{du^{2r}} + (-1)^r k^{2r}\,\frac{d^{2r}Q}{du^{2r}}\right],
\end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned}
&1.2\ldots 2r(F'-F)\\
&= \left(P\,\frac{d^{2r}P}{du^{2r}} + Q\,\frac{d^{2r}Q}{du^{2r}}\right)\left[(h+k\sqrt{-1})^{2r} + (h-k\sqrt{-1})^{2r}\right]\\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{-1}}\left(Q\,\frac{d^{2r}P}{du^{2r}} - P\,\frac{d^{2r}Q}{du^{2r}}\right)\left[(h+k\sqrt{-1})^{2r} - (h-k\sqrt{-1})\right]^{2r} + \ldots
\end{aligned}$$

Posant

$$h = \rho\cos\theta, \quad k = \rho\sin\theta,$$

$$P\,\frac{d^{2r}P}{du^{2r}} + Q\,\frac{d^{2r}P}{du^{2r}} = c\sin\alpha, \quad Q\,\frac{d^{2r}P}{du^{2r}} - P\,\frac{d^{2r}Q}{du^{2r}} = c\cos\alpha,$$

on a

$$\tfrac{1}{2}1.2\ldots 2r(F'-F) = c\rho^{2r}\sin(\alpha + 2r\theta) + \text{des termes en } \rho \text{ d'un degré supérieur à } 2r.$$

Mais, en choisissant convenablement la valeur de la quantité arbitraire θ, on peut donner une valeur négative au terme $c\rho^{2r}\sin(\alpha + 2r\theta)$; donc on n'aura pas de valeur minima pour F dans cette hypothèse, et, par suite, puisque l'existence de ce minimum est évidente, P et Q sont capables d'être simultanément nuls. Cette conclusion établit que toute équation a une racine.

On a supposé, dans la démonstration précédente, que les coefficients étaient réels. Cette restriction peut être écartée; en effet, $f(x)$ peut être représenté par

$$\varphi(x) + \sqrt{-1}\,\psi(x),$$

φ et ψ renfermant seulement des coefficients réels. Si l'on a $f(x) = 0$, on en tire

$$[\varphi(x)]^2 = -[\psi(x)]^2,$$

ou

$$[\varphi(x)]^2 + [\psi(x)]^2 = 0.$$

Cette équation, nous venons de le prouver, a toujours une racine $u + v\sqrt{-1}$; donc

$$\varphi(x) + \sqrt{-1}\,\psi(x) = 0,$$

ou

$$\varphi(x) - \sqrt{-1}\,\psi(x) = 0$$

aura une racine. Supposons que ce soit la première; mettant $u + v\sqrt{-1}$ dans cette équation, on a un résultat de la forme

$$P + Q\sqrt{-1} + \sqrt{-1}\,(P' + Q'\sqrt{-1}) = 0$$

ou

$$P - Q' + \sqrt{-1}\,(P' + Q) = 0,$$

et par suite

$$P = Q', \quad P' = -Q.$$

Substituant $u - v\sqrt{-1}$ dans la seconde, on a

$$P - Q\sqrt{-1} - \sqrt{-1}\,(P' - Q'\sqrt{-1}) = 0,$$

ou

$$P - Q' - \sqrt{-1}\,(P' + Q) = 0,$$

résultat vrai, en vertu des relations $P = Q'$, $P' = -Q$.

Donc l'équation $f(x) = 0$ a toujours une racine, que ses coefficients soient, ou non, réels.

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 966

(voir 2e série, t. VIII, p. 561);

PAR M. MORET-BLANC,
Professeur au lycée du Havre.

Si l'on désigne par C_m^p le nombre des combinaisons sans répétition de m objets p à p, en regardant C_m^0 comme égal à l'unité, on a l'identité suivante :

$$C_k^0 C_{n+1}^{2k+1} + C_{k+1}^1 C_{n+1}^{2k+3} + C_{k+2}^2 C_{n+1}^{2k+5} + \ldots = 2^{n-2k} C_{n-k}^k.$$

(DÉSIRÉ ANDRÉ.)

On sait que C_m^p est le coefficient de x^p dans le développement de $(1 + x)^m$.

Cela posé, le premier membre de l'égalité à démontrer est le coefficient de x^{2k+1} dans le developpement de

$$(1+x)^{n+1}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-(k+1)}.$$

Or,

$$(1+x)^{n+1}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-(k+1)}=(1+x)^{n+1}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{k+1}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-(k+1)}$$
$$=x^{k+1}(1+x)^{n-k}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-(k+1)},$$

et le coefficient de x^{2k+1}, dans cette expression, sera celui de x^k dans le développement de

$$(1+x)^{n-k}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-(k+1)},$$

c'est-à-dire

$$C_{n-k}^{k}+C_{k+1}^{1}C_{n-k}^{k+1}+C_{k+2}^{2}C_{n-k}^{k+2}+\ldots$$
$$=C_{n-k}^{k}\left(1+\frac{n-2k}{1}+\frac{(n-2k)(n-2k-1)}{1.2}\right.$$
$$\left.+\frac{(n-2k)(n-2k-1)(n-2k-2)}{1.2.3}+\ldots+1\right)$$
$$=(1+1)^{n-2k}C_{n-k}^{k}=2^{n-2k}C_{n-k}^{k}.$$

On a donc identiquement

$$C_k C_{n+1}^{2k+1}+C_{k+1}^{1}C_{n+1}^{2k+3}+C_{k+2}^{2}C_{n+1}^{2k+5}+\ldots=2^{n-2k}C_{n-k}^{k}.$$

C. Q. F. D.

Note. — La même question a été résolue par M. Kruschwitz, étudiant en Mathématiques, à Berlin.

Questions 968 *et* 969

(voir 2ᵉ série, t. VIII, p. 561);

PAR M. LUCIEN BIGNON, de Lima (Pérou).

968. *Si l'on désigne par n un nombre entier positif, et par* D_n *la différence des puissances* $n^{\text{ièmes}}$ *des racines*

de l'équation $x^2 + px + q = 0$, on aura, à partir de $n = 2$,

$$D_n = (-1)^{n-1}\left[p^{n-1} - \frac{n-2}{1}p^{n-3}q + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}p^{n-5}q^2 - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3}p^{n-7}q^3 + \ldots\right]D_1;$$

le développement s'arrête pour une valeur, particulière de n, au dernier terme qui ne s'évanouit pas.

969. *Déduire de la formule précédente la relation*

$$n = 2^{n-1} - \frac{n-2}{1}2^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}2^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3}2^{n-7} + \ldots.$$

(G.-P.-W. Baehr.)

968. Soient a et b les racines de l'équation

$$x^2 + px + q = 0;$$

la formule est vraie pour $n = 2$ et $n = 3$; il suffit donc de faire voir que, si elle est vraie pour l'indice $n - 1$ et pour l'indice $n - 2$, elle l'est aussi pour l'indice n.

Or, nous avons l'identité

$$a^n - b^n = (a^{n-1} - b^{n-1})(a + b) - ab(a^{n-2} - b^{n-2})$$

et

$$a + b = -p, \quad ab = q;$$

puis, par suite de l'hypothèse,

$$(a^{n-1} - b^{n-1})(a + b) = (-1)^{n-3}\left[p^{n-1} - \frac{n-3}{1}p^{n-3}q + \frac{(n-4)(n-5)}{1.2}p^{n-5}q^2 + \ldots\right]D_1$$

et

$$
\begin{aligned}
&-ab\,(a^{n-2}-b^{n-2})\\
&=(-1)^{n-3}\left[-p^{n-3}q+\frac{n-4}{1}p^{n-5}q^2\right.\\
&\qquad\left.-\frac{(n-5)(n-6)}{1.2}p^{n-7}q^3+\ldots\right]D_1.
\end{aligned}
$$

Le terme de rang $(m+1)$, dans la première de ces deux équations, est, en ne tenant compte que de ce qui est dans la parenthèse,

$$\pm\frac{[n-(m+2)]\ldots(n-2m)[n-(2m+1)]}{1.2\ldots m}.$$

Le terme de rang m dans la seconde, qui a le même coefficient en p et en q que celui dont nous venons de trouver la valeur, est

$$\pm\frac{[n-(m+2)]\ldots[n-(2m-1)](n-2m)}{1\ 2\ldots(m-1)}.$$

En faisant la somme de ces deux termes, on trouve, pour le terme général de rang $m+1$,

$$\pm\frac{[n-(m+1)]\ldots[n-(2m-1)](n-2m)}{1.2\ldots m}p^{n-2m-1}q^m,$$

car

$$\frac{n-(2m+1)}{m}+1=\frac{n-(m+1)}{m};$$

et comme

$$(-1)^{n-1}=(-1)^{n-3},$$

le théorème est démontré.

969. Le second membre de la relation donnée est, à part D_1, ce que devient le second membre de la relation du n° 968 quand on y fait

$$p = 2, \quad q = 1,$$

c'est-à-dire

$$a = 1 \quad \text{et} \quad b = 1.$$

Or,

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = \frac{D_n}{D_1} = a^{n-1} + ba^{n-2} + \ldots + b^{n-1},$$

et, par suite, dans le cas présent,

$$\frac{D_n}{D_1} = 1^{n-1} + 1^{n-2} + \ldots + 1^{n-1} = n.$$

Le théorème est donc démontré.

Note. — Les mêmes questions ont été traitées par MM. Laclais, à Paris; Octave Espanet, du lycée de Nîmes; O. Callandreau, à Angoulême; Moret-Blanc, professeur au lycée du Havre; Cerruti Valentino, étudiant en Mathématiques, à Turin; Émile Pône, élève de Mathématiques spéciales au lycée de Besançon; Kruschwitz, étudiant en Mathématiques à Berlin.

Question 982

(voir 2e série, t. IX, p. 93);

Par M. MORET-BLANC,

Professeur au lycée du Havre.

Soient A *et* B *deux points d'une ellipse dont* F *et* G *sont les deux foyers, les droites* FA *et* GB *se coupent au point* D *et les droites* FB *et* GA *au point* E.

Désignons respectivement par φ, γ, η et δ *les angles*

AFB, AGB, AEB, ADB.

Démontrer les relations suivantes :

$$\text{FA.FB} \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \text{GA.GB} \sin^2 \frac{\gamma}{2},$$

$$\text{FA.GB.} \cos^2 \frac{\delta}{2} = \text{GA.FB} \cos^2 \frac{\eta}{2}.$$

(Laguerre.)

1° Tirons la corde AB (*). Les triangles AFB, AGB donnent

$$\overline{AB}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{FB}^2 - 2FA.FB\cos\varphi$$

$$= (FB - FA)^2 + 4FA.FB\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 - 2GA.GB\cos\gamma$$

$$= (GA - GB)^2 + 4GA.GB\sin^2\frac{\gamma}{2}.$$

Or, de

$$FB + GB = FA + GA,$$

on tire

$$FB - FA = GA - GB;$$

donc, il faut aussi qu'on ait

$$FA.FB\sin^2\frac{\gamma}{2} = GA.GB\sin^2\frac{\gamma}{2}.$$

2° Soit B_1 le symétrique du point B par rapport au centre.

Tirons AB_1, FB_1 et GB_1 :

$$FB_1 = GB,\ \ GB_1 = FB,\ \ \widehat{AFB_1} = 180° - \delta,\ \ \widehat{AGB_1} = 180° - \eta.$$

Cela posé, les triangles AFB_1, AGB_1 donnent

$$\overline{AB_1}^2 = \overline{FA}^2 + \overline{GB}^2 + 2FA.GB\cos\delta$$

$$= (FA - GB)^2 + 4FA.GB\cos^2\frac{\delta}{2},$$

$$\overline{AB_1}^2 = \overline{GA}^2 + \overline{FB}^2 + 2GA.FB\cos\eta$$

$$= (FB - GA)^2 + 4GA.FB\cos^2\frac{\eta}{2}.$$

Or,

$$FA - GB = FB - GA;$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

donc

$$FA.GB\cos^2\frac{\delta}{2} = GA.FB\cos^2\frac{\eta}{2}.$$

Remarque. — Si l'on remplace l'ellipse par une hyperbole, les mêmes relations subsistent quand les points A et B sont pris sur la même branche; il faut changer les sinus en cosinus, et réciproquement, quand ils sont pris sur des branches différentes.

Note. — Cette question a été résolue aussi par MM. E. Kruschwitz, étudiant à Berlin; H. Lez, à Lorrez-le-Bocage; Cerruti Valentino, étudiant en Mathématiques, à Turin; F. Vivier, élève de Mathématiques spéciales au lycée de Montpellier; H. Brocard, lieutenant du Génie; Charles Bloch, du lycée Napoléon; Willière, professeur à Arlon.

Questions 1014 *et* 1016

(voir 2e série, t. X, p. 96);

PAR M. E. PELLET,
Élève à l'École Normale.

1014. *En faisant tourner, d'un même angle et dans le même sens, les génératrices d'une surface gauche autour de leur point central et dans leur plan central, on obtient une nouvelle surface gauche qui a la même ligne de striction que la première.* (G. FOURET.)

Soient G une génératrice de la première surface; M son point central et P son plan central, et G′ la génératrice correspondante de la seconde surface. Le plan P contient G′ et la tangente menée par M à la ligne de striction de la première surface, qui est aussi située sur la seconde; il est donc tangent en M à la seconde surface. Pour démontrer le théorème, il suffit donc de démontrer qu'il est normal au cône directeur de cette dernière, mené par un point de G′. Or, cela est évident, si l'on considère que ce cône s'obtient en faisant tourner les génératrices du cône directeur de la première surface d'un même angle et dans le même sens autour du sommet du cône et dans les plans normaux au cône (*).

1016. *Déterminer les sommets et les arêtes d'une surface gauche ayant pour ligne de striction une courbe donnée et pour cône directeur un cône de révolution également donné.* (G. FOURET.)

Prenons pour axe des z l'axe du cône, et désignons par i l'ouverture de ce cône, par x, y, z les coordonnées d'un point quelconque de la courbe, et par α, β, γ les cosinus de la génératrice correspondante. On a

$$\gamma = \cos i \quad \text{et} \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{dx}{dy},$$

puisque le plan qui passe par la génératrice, et qui est parallèle à l'axe des z, contient la tangente à la courbe.

La relation $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ donne ensuite

$$\alpha = \pm \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} \sin i, \quad \beta = \pm \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} \sin i,$$

les mêmes signes devant être pris en même temps. Par un point (x, y, z) de la courbe passent donc deux génératrices de la surface, dont les équations sont

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} X &= \pm \frac{dx \tan g\, i}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} (Z - z) + x, \\ Y &= \pm \frac{dy \tan g\, i}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} (Z - z) + y. \end{aligned} \right.$$

En changeant la direction positive de l'axe des z, les équations de la seconde génératrice deviennent identiques à celles de la première relativement aux anciens axes;

(*) BERTRAND, *Calcul différentiel*, p. 585.

nous pouvons donc nous borner à l'étude de celle-ci. A cet effet, nous effectuerons un changement d'axes coordonnés, nous prendrons pour axe des z' la génératrice même que nous voulons étudier, pour axe des x' la perpendiculaire à cette génératrice menée par son point central et dans son plan central, et pour axe des y' la perpendiculaire aux droites précédentes. Pour simplifier on peut supposer que, dans le premier système, le plan des xz coïncide avec le plan central; alors les formules de transformation sont

$$x = z' \sin i + x' \cos i,$$
$$z = z' \cos i - x' \sin i,$$

et les équations de la génératrice menée par le point (x, y, z) deviennent

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & X' \cos^2 i + \sin i \cos i \, Z' - x \cos i \\ & \quad = \frac{dx \sin i}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} (Z' \cos i - X' \sin i - z), \\ & Y' = \frac{dy \tang i}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} (Z' \cos i - X' \sin i - z) + y. \end{aligned} \right.$$

En général, $\frac{dy}{dx}$ est un infiniment petit du premier ordre en même temps que x et z; en réduisant chaque coefficient à sa *valeur principale*, il vient

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} & X' = -\frac{\sin 2i}{4} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 Z' + (x - z \tang i) \cos i, \\ & Y' = \sin i \frac{dy}{dx} Z' + y - z \frac{dy}{dx} \tang i. \end{aligned} \right.$$

Si l'on coupe la surface par un plan perpendiculaire à l'axe des Z', on a, en se bornant aux infiniment petits du premier ordre,

$$X' = (x - z \tang i) \cos i, \quad Y' = \sin i \frac{dy}{dx} Z',$$

et la tangente à la section menée par $X' = o$, $Y' = o$ a pour équation

$$\frac{Y'}{X'} = \frac{\frac{dy}{dx}\tang i}{x - z \tang i} Z'.$$

Dans le cas où la courbe est un cercle, situé dans un plan perpendiculaire à l'axe du cône, la surface est un hyperboloïde de révolution, et l'on a

$$z = o, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{a},$$

au signe près, a étant le rayon du cercle de gorge; par suite,

$$\frac{Y'}{X'} = \frac{\tang i}{a} Z'.$$

Si le cône se réduit à un plan, $\tang i$ est infini, et les équations (1) doivent être remplacées par les suivantes :

$$Z - z = o, \quad Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x).$$

Si le plan des zx coïncide avec un des plans centraux, la génératrice correspondante coïncide avec l'axe des x; et la tangente à la courbe, intersection de la surface par un plan perpendiculaire à cette génératrice, au point où elle coupe cette génératrice, a pour équation

$$\frac{Y}{Z} = \frac{\frac{dy}{dx}}{z} X.$$

Un sommet d'une surface est un point où la surface, dans une petite étendue, est symétrique par rapport aux plans des sections principales correspondantes, aux infiniment petits du troisième ordre près.

Les sommets d'une surface réglée appartiennent à la ligne de striction. En effet, soient A un sommet, S et S′ les plans des sections principales correspondantes, M et M′ deux points de la section déterminée par S, symétriques par rapport au plan S′; P et P′ les plans tangents correspondants. Ces plans sont normaux à S, de plus P coupe la surface suivant deux droites, en ne considérant que les points voisins de M, symétriques par rapport à S; il en est de même de P′, et les droites de P′ sont symétriques de celles de P par rapport à S′. Donc ces droites font avec le plan S des angles égaux ou supplémentaires. Parmi ces droites sont évidemment comprises les génératrices en M et M′, qui, ne faisant entre elles que des angles très-petits, font avec S des angles égaux. Il résulte de là que si par un point de l'espace on mène des plans parallèles aux plans tangents aux divers points de la section déterminée par S et les génératrices correspondantes, ces plans se rencontreront suivant une droite commune, la perpendiculaire à S, et les génératrices sont symétriques deux à deux par rapport au plan tangent en A. Ce plan est donc normal au cône directeur de la surface, et par suite un plan central; le raisonnement précédent montre, en outre, que la courbe sphérique, intersection du cône directeur par une sphère concentrique, a un sommet sur la génératrice correspondante à A. Lorsque le plan tangent en A coupe la surface suivant deux droites, le plan parallèle est orthogonal au cône directeur à son entrée et à sa sortie, et la courbe sphérique a deux sommets sur les génératrices correspondantes à A; de plus, les tangentes aux sections principales sont les bissectrices de ces génératrices.

Dans le cas où le cône directeur est de révolution, on ne doit chercher les sommets de la surface qu'aux points de la ligne de striction où la tangente est perpendiculaire ou parallèle à l'axe du cône.

Si la tangente est parallèle à cet axe on a, pour les points voisins du point de contact,

$$z = s, \quad x = as^2, \quad y = bs^3;$$

par suite, les équations (3) deviennent

$$X' = -\frac{\sin 2i}{4}\frac{9b^2s^2}{4a^2}\cdot Z' + as^2 - s\sin i,$$

$$Y' = 3\sin i\frac{bs}{2a}Z' + b(1 - 3\tang i)s^3.$$

L'intersection par un plan perpendiculaire n'offre aucune particularité si Z' n'est pas nul; mais lorsque Z' est nul, on a

$$X' = -s\sin i, \quad Y' = b(1 - 3\tang i)s^3,$$

et la courbe a un point d'inflexion; le point n'est donc pas réellement un sommet, les sommets se trouvent seulement aux points où la tangente est perpendiculaire à l'axe du cône.

Lorsque $i = \frac{\pi}{2}$, on a, pour les points de la ligne de striction où la tangente est perpendiculaire au plan directeur,

$$Z' = s, \quad Y' = bs^3 + \frac{3b}{2a}s(X' - as^2),$$

et les sections de la surface par un plan passant par ces points offrent des points d'inflexion comme précédemment.

Si la tangente à la ligne de striction est parallèle au plan directeur, on a

$$Z' = as^2, \quad Y' = bs^2, \quad x = s,$$

d'où

$$Y' = bs^2 + 2bs(X' - s) = 2bsX' - bs^2.$$

L'intersection par un plan perpendiculaire à la génératrice, c'est-à-dire à l'axe des X', est une courbe tangente à l'axe des Y', pourvu que X' ne soit pas nul; de sorte que le plan des $X'Y'$, qui est normal au plan central, est tangent tout le long de la génératrice. Pour $X' = 0$, la section a un point de rebroussement à l'origine; de sorte que ce point est un point singulier de la surface.

Lorsque i est différent de $\frac{\pi}{2}$ on obtient un point analogue pour les points de la courbé de striction où la tangente est parallèle au cône directeur, c'est-à-dire pour les points de cette ligne correspondant à l'intersection du cône directeur de la surface avec le cône indicateur de la courbe, formé par les parallèles aux tangentes de la courbe. En effet, pour ces points on a

$$x - z \operatorname{tang} i = 0,$$

et les équations (2) se réduisent à

$$X' = -\frac{\sin 2i}{4}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 Z' + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 z \sin i,$$

$$Y' = \frac{dy}{dx} \operatorname{tang} i\,(Z' \cos i - X' \sin i - z) + y,$$

$\frac{dy}{dx}$ étant infiniment petit du premier ordre avec z.

Les points que nous avons considérés n'offrent aucune singularité sur la courbe. En examinant ceux qui en offrent, on a d'autres points singuliers sur la surface. Ainsi lorsque $\frac{dy}{dx}$ est un infiniment petit d'ordre supérieur au premier, le plan central est tangent tout le long de la génératrice, si $x - z \operatorname{tang} i$ n'est pas nul.

Question 1020

(voir 2ᵉ série, t. X, p. 191);

PAR UN ABONNÉ.

Un point matériel décrit une ellipse sous l'action d'une force tendant vers un point fixe O. *Démontrer que la loi de la force est donnée par*

$$\mathrm{F} = \frac{\overline{\mathrm{DD}'}^6}{\overline{\mathrm{OP}}^2 . \overline{\mathrm{PP}'}^3},$$

P *désignant la position de la molécule;* PP', *la corde passant par le point* O, *et* DD' *le diamètre parallèle à cette corde.* (A. WITWORTH.)

Je considère un des cercles ayant pour projection l'ellipse proposée, et, dans le plan de ce cercle, le point o qui a pour projection le point fixe O; soient p, P', d, d' les points du cercle qui ont pour projections les points P, P', D, D' de l'ellipse, et soit f la force dont F est la projection.

Il est clair que si je démontre que la loi de la force f est donnée par

$$(1) \qquad f = \frac{\overline{dd'}^6}{\overline{op}^2 . \overline{pp'}^3},$$

la question proposée sera résolue, car je pourrai écrire

$$f.\cos\varphi = \frac{(dd'\cos\varphi)^6}{(op.\cos\varphi)^2\,(pp'.\cos\varphi)^3},$$

et par suite

$$\mathrm{F} = \frac{\overline{\mathrm{DD}'}^6}{\overline{\mathrm{OP}}^2 . \overline{\mathrm{PP}'}^3},$$

si φ désigne l'angle que les droites parallèles dd', op, pp' font avec le plan de l'ellipse. Toute la question est donc de démontrer la loi (1).

Soient alors R le rayon du cercle et ω l'angle que fait OP avec la perpendiculaire abaissée du point o sur la tangente au cercle en p. On sait que l'expression d'une force centrale est

$$\frac{c^2 r}{\rho \delta^3},$$

c désignant une constante, r la distance du mobile au centre d'action, ρ le rayon de courbure et δ la distance du centre d'action à la tangente. Or, ici, si je prends c^2 égal à $8R^4$, ce qui ne change pas la loi, j'ai pour cette loi

$$f = \frac{8R^4 . op}{R\,(op . \cos\omega)^3} = \frac{(2R)^6}{\overline{op}^2 . (2R\cos\omega)^3};$$

mais

$$(2R)^6 = \overline{dd'}^6,$$

$$(2R\cos\omega)^3 = \overline{pp'}^3;$$

donc la loi de la force f est donnée par

$$f = \frac{\overline{dd'}^6}{\overline{op}^2 . \overline{pp'}^3},$$

C. Q. F. D.

Note. — Cette question a aussi été résolue par M. Guébhard, étudiant en médecine, à Paris.

PROPRIÉTÉS DES DIAMÈTRES DES COURBES GÉOMÉTRIQUES;

PAR M. CHASLES.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXII.)

Newton, dans son *Énumération des courbes du troisième ordre,* a fait connaître et a appelé *diamètre* d'une courbe une certaine droite, qui est le lieu des centres de gravité (ou centres des moyennes distances) des points dans lesquels une série de droites parallèles rencontrent la courbe.

Cette belle propriété des courbes géométriques paraît être la première que l'on ait connue. Newton la présentait comme une généralisation, ainsi que celle du rapport constant des produits des segments faits sur deux transversales parallèles à deux axes fixes, des propriétés des sections coniques. Elles étaient susceptibles elles-mêmes d'une certaine généralisation, qu'on obtient par une simple perspective, dans laquelle les droites parallèles deviennent des droites concourantes en un même point. Le théorème des diamètres conduit ainsi, comme l'a fait remarquer M. Poncelet (*), au beau théorème de Côtes, démontré par Maclaurin, savoir que, « si sur des transversales partant d'un point fixe on prend les centres des moyennes harmoniques des points d'intersection de ces droites et d'une courbe géométrique, le lieu de ces points est une droite (**), » droite que l'on a appelée depuis *axe harmonique* du point fixe.

(*) *Mémoires sur les centres des moyennes harmoniques;* voir *Journal de Crelle,* t. III.

(**) MACLAURIN, *Traité des courbes géométriques.*

On s'est fort peu occupé jusqu'ici de la conception des *diamètres* de Newton, dont on ne trouve peut-être quelques propriétés que dans un Mémoire de Steiner. Bien que le théorème de Côtes n'ait pas été non plus le sujet de recherches spéciales, il intervient dans la belle théorie des *polaires* des courbes, de Bobillier (*), où il prend une importance réelle par son association avec la courbe même que l'on appelle la *polaire* d'une courbe donnée U. Que celle-ci soit d'ordre m, la polaire est une courbe d'ordre $(m-1)$ qui passe par les points de contact des $m(m-1)$ tangentes de U qu'on peut mener par un point fixe. Ce point est dit le *pôle* de la polaire. Bobillier considère la polaire de la courbe d'ordre $(m-1)$, laquelle est d'ordre $m-2$; puis la polaire de celle-ci, et ainsi de suite, et arrive à une conique dont la polaire est une droite. Cette droite est précisément l'*axe harmonique* du point fixe, relatif à la courbe d'ordre m. Un théorème général fort important, concernant deux quelconques des polaires successives (**), renferme en particulier cette double proposition, relative à la première polaire d'une courbe et à la dernière, c'est-à-dire à l'*axe harmonique* :

La polaire d'un point P *est le lieu des points dont les axes harmoniques passent par ce point* P.

Et réciproquement : *L'axe harmonique d'un point est le lieu des points dont les polaires passent par le point.*

Cette double propriété des *axes harmoniques* est la clef de cette théorie. Ainsi l'on conclut immédiatement du second énoncé que : *Une droite, considérée comme*

(*) Voir *Annales de Mathématiques* de Gergonne, t. XVIII. 1827-1828, p. 89, 157, 253, et t. XIX, p. 106, 138, 302.

(**) *Ibid.*, t. XIX, p. 302-307.

axe harmonique, $a(m-1)^2$ *pôles, qui sont les points d'intersection des polaires de deux points de la droite;* et, par suite, que ces $(m-1)^2$ points appartiennent aux polaires de tous les autres points de la droite; que *ces polaires forment donc un faisceau d'ordre* $(m-1)$; d'où se conclut aussi que $2(m-2)$ *de ces polaires sont tangentes à une droite quelconque :* proposition fort utile, et de laquelle dérive aussi cette propriété fondamentale de la théorie des axes harmoniques, savoir que :

La courbe enveloppe des axes harmoniques des points d'une droite D *est de la classe* $(m-1)$.

C'est-à-dire que $(m-1)$ axes harmoniques passent par un même point I. En effet, les axes qui passent par ce point ont leurs pôles sur la polaire du point I; or cette polaire, d'ordre $m-1$, a $(m-1)$ points sur la droite D; ce sont les pôles des $(m-1)$ axes harmoniques passant par le point I.

On reconnaît aussi que cette courbe de la classe $(m-1)$ est de l'ordre $(m-2)$, c'est-à-dire qu'elle a $2(m-2)$ points sur une droite quelconque L. En effet, un point de la courbe est l'intersection des axes harmoniques de deux points infiniment voisins a, a' de la droite D. Ce point d'intersection est le pôle d'une polaire passant par les deux points a, a', et conséquemment tangente à la droite D en a. Mais les polaires de tous les points de la droite forment un faisceau d'ordre $(m-1)$; il y en a donc $2(m-2)$ qui sont tangentes à la droite D. Or les axes harmoniques des $2(m-2)$ points de contact sont tangents à leur courbe enveloppe aux points où ils coupent la droite L; ce qui démontre que la courbe est de l'ordre $2(m-2)$.

Steiner, dans un travail fort étendu, concernant les courbes algébriques et leurs transversales rectilignes, dont l'analyse a été communiquée à l'Académie de Berlin, en mai 1851 (*), a considéré les *diamètres* de Newton, et en fait connaître quelques propriétés. On y trouve notamment la classe et l'ordre de la courbe enveloppe de ces diamètres, et deux théorèmes que j'indiquerai parmi ceux qui font le sujet de ma Communication. J'ignore si les démonstrations du beau Mémoire de Steiner ont été publiées depuis sa mort, et si d'autres géomètres se sont occupés aussi de cette théorie des diamètres.

C'est par le principe de correspondance que je démontre toutes les propositions qui vont suivre, et que je réunis ici comme nouvel exemple des applications si variées de ce mode de raisonnement.

§ I. — *Où l'on considère deux séries de points qui se correspondent anharmoniquement sur la droite de l'infini.*

1. Si l'on a sur la droite située à l'infini deux séries de points a, a' qui se correspondent anharmoniquement, une courbe U_m possède m diamètres dont les transversales passent par les points a' qui correspondent aux points a des diamètres.

Par conséquent :

a. Il existe, dans une courbe U_m, m diamètres dont chacun fait, avec la direction de ses transversales, un angle de grandeur constante, compté dans un sens de rotation déterminé.

b. Il existe m diamètres perpendiculaires chacun à ses transversales.

c. Il existe m diamètres faisant avec leurs transversales des angles dont la bissectrice est de direction constante.

(*) Voir *Journal de Mathématiques,* de Crelle, t. XLVII, p. 7-106; 1854. Une traduction due au regretté M. Woepcke, avait déjà paru dans le *Journal de Mathématiques*, de M. Liouville, t. XVIII, p. 315-356; 1853.

Dans les propositions suivantes, susceptibles de trois énoncés différents, nous ne donnerons que l'énoncé relatif aux perpendiculaires.

2. Les perpendiculaires aux transversales des diamètres, menées par les points où ces diamètres rencontrent la courbe U_m, enveloppent une courbe de la classe m^2, qui a une tangente multiple d'ordre $m(m-1)$ à l'infini.

3. Deux diamètres, dont l'un est perpendiculaire aux transversales de l'autre, se coupent sur une courbe de l'ordre $m(m-2)$, qui a m points multiples d'ordre $(m-2)$ à l'infini.

4. Deux diamètres dont les transversales sont rectangulaires se coupent sur une courbe de l'ordre $2(m-2)$.

5. Deux diamètres rectangulaires se coupent sur une courbe de l'ordre $2(m-1)(m-2)$, qui a deux points multiples d'ordre $(m-1)(m-2)$ à l'infini.

§ II. — *Où l'on considère les points de rencontre des diamètres et de la courbe* U_m.

6. Les transversales des diamètres, menées par les points où ils rencontrent la courbe U_m, enveloppent une courbe de la classe $m(m-1)$, qui a une tangente multiple d'ordre $m(m-2)$ à l'infini.

7. Si, par le centre des moyennes distances des points de rencontre d'un diamètre et de la courbe U_m, on mène la transversale du diamètre, ces transversales enveloppent une courbe de la classe (m^2-2m-1), qui a une tangente multiple d'ordre $m(m-2)$ à l'infini.

8. Les centres des moyennes distances des points d'intersection de chaque diamètre avec la courbe U_m sont sur une courbe de l'ordre $m(m-2)$, qui a m points multiples d'ordre $(m-2)$ à l'infini.

9. Les transversales des diamètres, menées par leurs points de contact avec leur courbe enveloppe sont les tangentes d'une courbe de la classe $(2m - 3)$, qui a une tangente multiple d'ordre $(m - 2)$ à l'infini (*).

10. Les perpendiculaires aux transversales des diamètres, menées par leurs points de contact avec leur courbe enveloppe, sont les tangentes d'une courbe de la classe $(2m - 3)$.

11. Les transversales des diamètres, menées par les points où ils rencontrent la courbe U_m, enveloppent une courbe de la classe $m(m - 1)$.

§ III. — *Où l'on considère les tangentes et les normales de la courbe* U_m.

12. Les diamètres de la courbe U_m^n rencontrent les tangentes de cette courbe parallèles aux transversales des diamètres, en des points situés sur une courbe de l'ordre $m(n - 1)$.

13. Les diamètres de U_m^n rencontrent les tangentes qui leur sont perpendiculaires en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $2n(m - 1)$, qui a deux points multiples d'ordre $n(m - 1)$ aux deux points circulaires de l'infini.

14. Les diamètres de U_m^n rencontrent les normales parallèles à leurs transversales sur une courbe de l'ordre $m(n + 1)$, qui a m points multiples d'ordre n, et m points simples à l'infini.

15. Les diamètres de U_m^n rencontrent les tangentes perpendiculaires à leurs transversales sur une courbe de l'ordre mn, qui a m points multiples d'ordre n à l'infini.

(*) Ce théorème et le précédent sont les deux de Steiner, que nous avons annoncés ci-dessus. (Voir *Journal de Mathématiques* de M. Liouville, t. XVIII, p. 340 et 341.)

16. Les diamètres de U_m^n rencontrent les normales qui leur sont perpendiculaires sur une courbe de l'ordre $(m-1)(m+2n)$, qui a à l'infini deux points multiples d'ordre $n(m-1)$ aux deux points circulaires et m points multiples d'ordre $(m-1)$ aux points de U_m^n.

17. Les diamètres de U_m^n rencontrent les normales perpendiculaires à leurs transversales sur une courbe de l'ordre $m(n+1)$.

18. Si, par les points où les diamètres rencontrent la courbe U_m, on leur mène des perpendiculaires, ces perpendiculaires enveloppent une courbe de la classe $2m(m-1)$, qui a une tangente multiple d'ordre $m(m-1)$ à l'infini.

§ IV. — *Où l'on considère une courbe $U_{m'}^{n'}$ en rapport avec les diamètres de la courbe U_m.*

19. Les tangentes d'une courbe $U^{n'}$ parallèles aux transversales d'un diamètre d'une courbe U_m rencontrent ce diamètre en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre mn'.

20. Les normales d'une courbe $U_{m'}^{n'}$ parallèles aux transversales d'un diamètre de U_m rencontrent ce diamètre en des points situés sur une courbe de l'ordre $m'+mn'$.

21. Les normales d'une courbe $U_{m'}^{n'}$ perpendiculaires aux transversales d'un diamètre de U_m rencontrent ce diamètre sur une courbe d'ordre $mn'+m'$.

22. Si, par les points où les diamètres de U_m rencontrent une courbe $U_{m'}$ on mène des parallèles à leurs transversales, ces parallèles enveloppent une courbe de la classe mm'.

23. Si, par les points de rencontre des diamètres de U_m et d'une courbe $U_{m'}$, on mène des perpendiculaires aux

transversales des diamètres, ces perpendiculaires enveloppent une courbe de la classe mm'.

24. Les diamètres de deux courbes U_m, U_{m_1} conjugués aux mêmes transversales se coupent sur une courbe d'ordre $(m + m_1 - 2)$.

§ V. — *Diamètres d'une courbe* U_m *en relation avec une courbe unicursale* $U_{m'}$.

On a sur une courbe unicursale quelconque $U_{m'}$ d'ordre m', deux séries de points α, α' qui se correspondent anharmoniquement. Les théorèmes suivants se rapportent à ces deux séries de points.

25. *Lemme.* — Il existe, sur la courbe unicursale $U_{m'}$, $2mm'$ points α tels, qu'un diamètre de U_m, passant par chacun de ces points α, a pour transversale la droite menée d'un point donné P au point α'.

26. Si l'on mène par chaque point a de $U_{m'}$ les diamètres de U_m, les transversales de ces diamètres, menées par les points correspondants α', enveloppent une courbe de la classe mm'.

27. Les diamètres menés par chaque point α rencontrent leurs transversales menées par le point α', en des points dont le lieu est une courbe de l'ordre $m'(2m - 1)$.

28. Les diamètres passant par chaque point α rencontrent les transversales menées avec leurs propres diamètres par le point α', en des points situés sur une courbe de l'ordre $m(m' - 1)(2m - 1)$.

29. Par chaque point α on mène les transversales des diamètres qui passent par ce point; et de même, par chaque point correspondant α' on mène les transversales des diamètres qui passent par ce point : ces transversales rencontrent les premières sur une courbe de l'ordre $2m'm(m - 1)$.

30. Les perpendiculaires élevées par chaque point α sur les diamètres qui passent par ce point rencontrent les transversales des diamètres menées par les points α' sur une courbe de l'ordre mm'.

EXPOSÉ D'UNE THÉORIE GÉOMÉTRIQUE ÉLÉMENTAIRE DES SECTIONS CONIQUES

(suite et fin, voir 2e série, t. X, p. 305);

PAR M. AUGUSTE MOREL,

Ancien Élève de l'École Polytechnique, répétiteur à Sainte-Barbe.

CHAPITRE III. — LA PARABOLE.

88. La parabole est une courbe telle que les distances de chacun de ses points à un point fixe F et à une droite fixe DD' sont égales entre elles. Le point fixe s'appelle *foyer*, la droite fixe est la *directrice*. Cette définition nous donne deux moyens de construire la courbe.

89. Construire la courbe d'un mouvement continu.

90. Construire la courbe par points.

91. *Théorème.* — La parabole a pour axe de symétrie la droite abaissée du foyer perpendiculairement à la directrice.

92. *Théorème.* — Suivant qu'un point est intérieur ou extérieur à la parabole, sa distance au foyer est inférieure ou supérieure à sa distance à la directrice.

93. *Théorème.* — Si une corde rencontre la directrice en P, la courbe en M et N, la ligne FP est la bissec-

trice extérieure de l'angle des rayons vecteurs passant en M et N.

Démonstration analogue à celle de l'ellipse.

94. *Corollaire I.* — Une droite ne peut rencontrer une parabole en plus de deux points.

Corollaire II. — Toute droite parallèle à l'axe ne peut rencontrer la courbe qu'en un point.

Corollaire III. — La parabole n'a pas de centre.

Corollaire IV. — Si les points M et N se confondent, l'angle PFM est droit, et, par suite, la ligne qui joint le point F au point où la tangente rencontre la directrice est perpendiculaire au rayon vecteur passant au point de contact.

Corollaire V. — Si par les extrémités d'une corde focale on mène des tangentes à la parabole, ces lignes se couperont sur la directrice; et réciproquement, si d'un point de la directrice on mène des tangentes à la courbe, la ligne qui joint les points de contact passe par le foyer.

Corollaire VI. — La tangente au sommet est perpendiculaire à l'axe.

95. *Théorème.* — La tangente fait des angles égaux avec le rayon vecteur et la parallèle à l'axe passant par le point de contact.

En effet, si du point N de contact je mène la perpendiculaire Nn sur la directrice, et que je joigne le point F au point Q de rencontre de la tangente et de la directrice, les deux triangles rectangles NFQ, NnQ sont égaux, car ils ont le côté NQ commun et le côté Nn égal à NF. Ce que démontre le théorème.

96. *Corollaire I.* — La tangente n'a qu'un point commun avec la courbe, tous les autres points étant extérieurs.

Corollaire II. — La normale bissecte l'angle du rayon vecteur et de la parallèle à l'axe menée par son pied. Si, par suite, on suppose des rayons calorifiques ou lumineux parallèles à l'axe et venant se réfléchir sur la courbe, ils convergeront au point F. C'est de là que lui vient le nom de *foyer*.

97. *Théorème.* — Le lieu des points symétriques du foyer par rapport aux tangentes est la directrice.

98. *Corollaire.* — Le lieu géométrique des projections du foyer sur les tangentes est la tangente au sommet.

99. *Théorème.* — La sous-tangente, PR, est double de la distance du sommet, A, au pied R de l'ordonnée du point de contact, M.

En effet, le triangle FMP est isoscèle; la projection H du foyer F sur la tangente MP, est au milieu de MP, et sur la tangente au sommet; donc $PR = 2AR$.

C. Q. F. D.

100. *Théorème.* — La sous-normale à la parabole est constante.

Car les deux triangles rectangles AHF, MRN sont semblables et donnent

$$\frac{AF}{AH} = \frac{RN}{RM},$$

et comme $MR = 2AH$, il en résulte que $NR = 2AF = FD$.

101. *Théorème.* — Le carré de l'ordonnée est proportionnel à la distance du sommet au pied de l'ordonnée.

En effet, le triangle PMN étant rectangle et MR étant perpendiculaire sur l'hypoténuse, on a

$$MR^2 = RN \times RP = FD \times 2AR.$$

102. *Problème.* — Mener une tangente à la parabole par un point pris sur la courbe.

103. *Problème.* — Mener une tangente à la parabole par un point extérieur.

104. *Corollaire.* — La condition nécessaire et suffisante pour que l'angle des tangentes soit droit est que le point donné soit sur la directrice.

105. *Théorème.* — Si l'on joint le foyer aux deux points de contact et au point M de rencontre de deux tangentes, et que du point M on mène une parallèle à l'axe : 1° la ligne FM est la bissectrice de l'angle des rayons vecteurs des points de contact; 2° l'une des tangentes fait avec FM un angle égal à celui que fait l'autre avec la parallèle à l'axe.

Pour le démontrer, je mène par les points de contact des perpendiculaires à la directrice et je joins les pieds de ces perpendiculaires au point M; il est facile de voir, d'après cette construction, que : 1° la ligne FM bissecte l'angle des rayons vecteurs des points de contact; 2° la tangente MN est perpendiculaire sur FP, et la parallèle à l'axe est perpendiculaire sur la directrice; donc l'angle NMQ que forment ces lignes est égal à l'angle que forme MF avec l'autre tangente. C. Q. F. D.

106. *Problème.* — Mener à la parabole une tangente parallèle à une droite donnée.

Remarque. — La parabole n'a pas d'asymptote.

107. *Problème.* — Trouver les points de rencontre d'une droite et d'une parabole.

108. *Théorème.* — Le milieu d'une corde de direction donnée est sur une droite parallèle à l'axe menée

par le point où la perpendiculaire abaissée du foyer sur la direction donnée rencontre la directrice.

En effet, si j'appelle α ce point, la ligne $F\alpha$ passant par les points F, φ symétriques par rapport à la sécante, le point α est le milieu de la tangente commune aux deux cercles ayant pour centres les points de rencontre de la parabole et de la droite donnée et passant par le foyer. Donc la parallèle à l'axe passant par le point α passe aussi par le milieu de la corde.

Cette parallèle à l'axe s'appelle le diamètre des cordes parallèles à la direction donnée.

109. Réciproquement, toute parallèle à l'axe est un diamètre. Pour cela, il me suffit de prouver que si je prends une corde ayant son milieu sur une parallèle αm à l'axe, cette corde est perpendiculaire à la ligne $F\alpha$ joignant le foyer au point α où la parallèle à l'axe coupe la directrice. Prenons le cercle dont le centre est en un des points communs aux deux lignes et passant par le foyer. Soient s le point où il touche la directrice et φ le point où il coupe αF; on a d'après un théorème connu $as^2 = \alpha\varphi \times \alpha F$. De même, le second cercle nous donnera

$$\alpha R^2 = \alpha\varphi' \times \alpha F.$$

Mais, comme par hypothèse on a $\alpha s = \alpha R$, on en déduit

$$\alpha\varphi' = \alpha\varphi,$$

et par suite les deux cercles se coupent sur αF, qui est ainsi la perpendiculaire à la ligne qui joint leurs centres.

110. Il n'y a pas lieu de chercher le diamètre conjugué d'un diamètre donné, puisque les droites parallèles à l'axe ne rencontrent la courbe qu'en un point. Du reste, la construction directe appliquée à ce cas nous apprendrait que ce diamètre n'existe pas.

111. *Théorème.* — La parabole peut être considérée comme la limite d'une ellipse ou d'une hyperbole dont un foyer reste fixe, ainsi que le sommet voisin, pendant que l'autre sommet s'éloigne indéfiniment.

Chapitre IV. — Les coniques.

112. J'appelle *conique* une courbe plane telle que le rapport des distances de l'un quelconque de ses points à un point fixe F appelé *foyer* et à une droite fixe DD′ appelée *directrice* soit constant.

113. *Théorème.* — La section plane d'un cône droit à base circulaire est une conique telle que nous l'avons définie.

La section admet toujours un axe de symétrie qui est la ligne d'intersection du plan sécant et du plan perpendiculaire mené par l'axe, plan qui existe toujours et qui est unique lorsque l'axe n'est pas perpendiculaire au plan sécant.

Cela posé, je considère une sphère inscrite au cône et tangente au plan sécant (PP′). Cette sphère est coupée par le plan de symétrie pris comme plan de la figure suivant un grand cercle tangent aux génératrices et tangent à la droite PP′, qui est l'axe de symétrie. Il sera donc possible de construire une pareille sphère, cette construction se ramenant à celle d'un cercle inscrit dans un triangle.

Soit F le point de contact de la sphère et du plan sécant, et soit (AB) le cercle de contact avec le cône, cercle projeté sur la figure suivant son diamètre AB et dont le plan rencontre le plan (PP′) suivant une droite (D) perpendiculaire au plan de la figure et se projetant tout entière au point D. Enfin, considérons un point (M) de la courbe dont la projection sur PP′ est m. Toutes les tangentes menées d'un point à la sphère étant égales, on a $(\mathrm{MC}) = (\mathrm{MF})$, (MC) étant la portion de la génératrice comprise entre le point (M) et le cercle (AB). Mais toutes les portions de génératrices comprises entre des plans perpendiculaires à l'axe sont égales; et si je mène par le point m une parallèle mr à AB, j'aurai $(\mathrm{MC}) = \mathrm{A}r$. De plus, la distance du point (M) à la droite (D) est égale à $m\mathrm{D}$; on en conclut facilement que l'on a l'égalité

$$\frac{\mathrm{A}r}{m\mathrm{D}} = \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

114. *Corollaire.* — On peut mener un cercle exinscrit au triangle formé par les génératrices et l'axe de symétrie; on en déduit qu'il existe un second foyer F′ et une seconde directrice (D′). De plus, les deux foyers sont également distants des points où l'axe de symétrie rencontre la courbe; il en est de même pour les deux directrices.

115. Il est facile de déduire de là que :

1° Si l'axe de symétrie rencontre les deux génératrices sur une même nappe du cône, dans lequel cas le rapport $\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}$ est plus petit que 1, la somme des distances d'un point quelconque aux deux foyers est constante : la courbe est donc une ellipse ;

2° Lorsque le plan sécant est parallèle à une génératrice, le rapport $\frac{\mathrm{PA}}{\mathrm{PD}}$ est égal à l'unité, et nous avons par définition une parabole;

3° Enfin, le plan continuant à tourner rencontre les deux nappes du cône, et l'on verrait que la différence des distances d'un point quelconque aux deux foyers est constante : la courbe est donc une hyperbole.

Le rapport $\frac{PA}{PD}$, qui est ici plus grand que l'unité, ne peut dépasser une certaine limite qui s'obtient lorsque le plan sécant est parallèle à l'axe.

116. Ce rapport $\frac{PA}{PD}$ peut être exprimé au moyen de DD', de PP' et de FF'; il est précisément égal à ce que nous avons appelé précédemment l'excentricité.

117. *Théorème.* — Réciproquement, toute conique, telle que nous l'avons définie, peut être placée sur un cône de révolution.

Appelons θ l'angle que fait la génératrice avec l'axe. Dans le triangle ADP, nous connaissons DP distance de la directrice au sommet; AP, puisque nous connaissons $\frac{AP}{DP}$ et l'angle A, qui est égal au complément de θ. Ce triangle sera toujours possible si, en nommant K le rapport $\frac{PA}{PD}$, on a

$$K < \frac{1}{\cos\theta}.$$

Lorsque K sera inférieur ou au plus égal à 1, cette inégalité aura toujours lieu. Donc :

On peut toujours placer une ellipse ou une parabole sur un cône de révolution donné.

Lorsque le rapport K est plus grand que 1, le problème ne sera pas toujours possible. Si, par le sommet, nous menons un plan parallèle au plan sécant, il coupera le cône suivant une génératrice qui fera, avec sa projection, un angle β, et nous trouverons facilement que l'on a

$$K = \frac{1}{\cos\beta}.$$

On en déduira, comme condition de possibilité,

$$\frac{1}{\cos\beta} < \frac{1}{\cos\theta},$$

ou, puisque les angles sont inférieurs à un droit,

$$\beta < \theta.$$

Mais l'angle β est précisément égal, comme le démontre la théorie de l'hyperbole, à l'angle que fait l'asymptote avec l'axe transverse. Donc :

Pour que l'on puisse placer une hyperbole sur un cône donné, il est nécessaire que l'angle de la génératrice du cône avec son axe soit au moins égal à l'angle de l'asymptote avec l'axe transverse, et, inversement, si cette condition est remplie, l'on peut placer l'hyperbole sur le cône.

118. Supposons que le sommet du cône s'éloigne indéfiniment, la base restant la même, le cône deviendra un cylindre, et, le plan sécant ne pouvant rencontrer qu'une seule nappe, on aura ce théorème que l'on pourrait démontrer directement de la même manière que les précédents : La section d'un cylindre de révolution par un plan oblique à l'axe est une ellipse dont le petit axe est égal au diamètre du cylindre, et, inversement, on peut toujours placer une ellipse sur un cylindre de révolution dont le diamètre est égal au petit axe de cette courbe.

119. Il en résulte qu'un cercle peut être considéré comme la projection orthogonale d'une ellipse dont le petit axe est égal au diamètre de ce cercle; inversement, une ellipse peut être considérée comme la projection orthogonale d'un cercle dont le diamètre est égal au grand axe de cette ellipse.

120. Le cercle lui-même peut être considéré comme une section plane du cône, et par conséquent les propriétés générales des coniques quelconques peuvent être déduites des propriétés analogues du cercle par la méthode des projections cylindriques ou coniques. Ainsi, la projection d'une droite étant en général une droite, on peut déduire des propriétés du cercle qu'une droite ne peut rencontrer qu'en deux points une conique; que d'un point on ne peut mener que deux tangentes à une conique, etc., etc. Nous allons donner certaines propriétés des coniques déduites de celles du cercle, en les présentant d'une manière générale pour les trois courbes.

Pôles et polaires.

121. On sait que la position d'un point sur une ligne peut être déterminée par la distance de ce point à un point fixe pris sur la ligne, et par la direction du mouvement d'un mobile qui se déplacerait du point fixe vers le point considéré; on est alors amené à considérer deux directions opposées de ce mouvement, et on les désigne par les mots *direction positive* et *direction négative*, ou par les signes + ou —, et le sens du mouvement se déterminera immédiatement à l'inspection du signe, en partant de l'égalité fondamentale

$$AB = - BA.$$

Mais la position d'un point est aussi donnée lorsque l'on connaît, en grandeur et en signe, la valeur du rapport de ses distances à deux points fixes, A et B, pris sur la même ligne.

122. Nous rappellerons seulement la définition suivante : Lorsque deux points, C et D, situés sur une droite AB, sont tels que, en prenant les rapports de leurs distances aux deux points fixes A et B, on ait

$$\frac{CA}{CB} = -\frac{DA}{DB},$$

ces points sont conjugués harmoniques par rapport à A et B. On en déduit facilement que A et B sont *conjugués harmoniques* par rapport à C et D.

Si nous joignons un point quelconque O aux quatre points A, B, C, D, nous formons un *faisceau harmonique*, et l'on sait qu'un tel faisceau divise harmoniquement toutes les droites qu'il rencontre, et que, si une sécante est parallèle à l'un des rayons du faisceau, elle est divisée par les trois autres en deux parties égales. Il résulte de là, en particulier, que :

La projection conique d'une division harmonique est une autre division harmonique.

123. *Théorème.* — Si d'un point P on mène une sécante qui rencontre une conique en A et B, et par les points A et B des tangentes à cette conique, le lieu du point D de rencontre de ces tangentes, lorsque la sécante tourne autour du point P, est une ligne droite qui rencontre AB au point H, conjugué harmonique de P par rapport à A et B.

Le théorème est facile à démontrer pour un cercle, et par suite s'étendra facilement aux coniques quelconques.

Cette droite s'appelle la *polaire* du point P, et, réciproquement, le point P est le *pôle* de cette droite.

124. La polaire jouit des propriétés suivantes :

1° Si le pôle est extérieur, la polaire coïncide avec la corde de contact des tangentes issues de ce point à la courbe.

2° Quel que soit le point, si l'on mène un diamètre par ce point, les tangentes aux extrémités de ce diamètre sont parallèles, et parallèles au diamètre conjugué de celui qui passe par le point; la polaire sera, par suite, conjuguée du diamètre passant par le pôle, puisqu'elle devra rencontrer l'une des tangentes précédentes à l'infini, c'est-à-dire lui être parallèle.

3° Le pôle d'une droite passant par un point est sur la polaire de ce point, et inversement.

125. Nous pouvons chercher la position relative d'un point et de sa polaire par rapport à une conique.

1° *Ellipse.* — Le point et sa polaire sont d'un même côté du centre. Si nous prenons le point où la polaire rencontre le diamètre passant par le pôle, nous pouvons facilement reconnaître que ce point et le pôle sont l'un intérieur, l'autre extérieur à la courbe, et que, si le pôle est sur la courbe, la polaire passe par le pôle, et n'est autre que la tangente.

2° *Parabole.* — Menons un diamètre de la courbe; ce diamètre est la perspective d'une corde du cercle passant par le point où ce cercle rencontre la génératrice parallèle au plan sécant. Nous voyons, dans ce cas, que la perspective de la division harmonique sera parallèle à l'un des rayons du faisceau, et, par suite, nous aurons le théorème suivant :

Si d'un point M pris sur la courbe on mène une tangente et une corde quelconque, la distance du point où la tangente rencontre le diamètre conjugué de la corde au milieu de cette corde sera double de la distance du point de rencontre de la courbe et du diamètre à ce même milieu.

3° *Hyperbole.* — Lorsque le pôle est à l'intérieur de la courbe, la polaire est à l'extérieur, et du même côté du centre. Si le pôle est sur la courbe, la polaire n'est autre chose que la tangente en ce point.

Si le pôle est à l'extérieur de la courbe, il peut occuper trois positions très-distinctes : il peut être sur un diamètre réel, sur un diamètre imaginaire, ou sur une asymptote.

Supposons-le d'abord sur une asymptote : dans ce cas, l'une des tangentes se confond avec l'asymptote elle-même, et son point de contact est à l'infini. Donc la polaire est parallèle à l'asymptote sur laquelle se trouve le pôle.

Si le point n'est pas sur l'asymptote, nous pouvons remarquer que les lignes qui joignent un foyer au pôle et au point commun à la directrice et à la polaire sont toujours rectangulaires. Il est facile de conclure de là que, si le pôle est sur un diamètre réel, la polaire est située du même côté du centre, et que, si le pôle est sur un diamètre imaginaire, le pôle et la polaire sont situés de part et d'autre du centre.

On en déduit un moyen de construire facilement le point de tangence de la courbe et des tangentes menées d'un point, et l'on peut remarquer que, si un point est compris dans l'angle des asymptotes où se trouve la courbe, les deux points de contact sont sur une même branche; dans le cas contraire, ils sont situés sur des branches différentes.

126. Comme dernière application de la propriété générale des coniques considérées comme perspective d'un cercle, nous énoncerons les deux théorèmes suivants, faciles à démontrer dans le cas du cercle :

Si un hexagone est inscrit dans une conique, les points de concours des côtés opposés sont en ligne droite.

Si un hexagone est circonscrit à une conique, les diagonales joignant les sommets opposés passent par un même point.

Les coniques polaires réciproques d'un cercle.

127. Étant donné, dans le plan d'un cercle, un système de droites et de points, si l'on prend les pôles de toutes ces droites et les polaires de tous ces points, on obtient une seconde figure formée de points et de droites, et telle qu'en opérant de la même manière sur cette seconde figure, on retrouvera la première. Ces deux figures s'appellent, pour cela, *polaires réciproques* par rapport au cercle.

De même, si nous prenons une courbe et ses diverses tangentes, et que nous considérions la suite des pôles de ces tangentes, nous obtiendrons une nouvelle courbe, dont les tangentes seront les polaires des points de la première. L'une des courbes étant définie par ses points, l'autre le sera par ses tangentes, dont elle sera l'*enveloppe*. On verrait facilement que, si l'on opérait de la même manière par rapport à la seconde courbe, on retrouverait précisément la première. Donc ces deux lignes sont des lignes *polaires réciproques*.

128. *Théorème.* — Le rapport de la distance de deux points au centre d'un cercle est égal au rapport des distances de chacun de ces points à la polaire de l'autre par rapport à ce cercle.

129. *Théorème.*— La polaire réciproque d'un cercle C par rapport à un cercle O, appelé *cercle directeur,* est une conique ayant pour foyer le centre O et pour directrice la polaire du centre C du cercle considéré par rapport au cercle directeur.

En effet, prenons une tangente MR au cercle C; soient P le pôle de cette tangente, DD' la polaire de C. On aura, d'après le théorème précédent, en menant du point P une perpendiculaire PN sur DD′,

$$\frac{OP}{OC} = \frac{PN}{CM}, \quad \text{ou} \quad \frac{OP}{PN} = \frac{OC}{CM} = \text{const.} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Si le point O est extérieur au cercle C, la courbe sera une hyperbole ; s'il est sur la circonférence C, on aura une parabole ; s'il est intérieur, on aura une ellipse.

On peut donc déduire l'étude de certaines propriétés des coniques de l'étude des cercles, principalement au moyen des deux théorèmes suivants :

L'angle compris entre deux droites est égal à l'angle que forment les rayons vecteurs menés de l'origine aux points correspondants.

Les distances de l'origine à un point et à la droite correspondante sont inversement proportionnelles.

Nous allons prendre quelques théorèmes généraux pour montrer l'usage que l'on peut faire de cette théorie pour l'étude des coniques. Nous présenterons parallèlement les propriétés du cercle et celles des coniques.

130. Si d'un point pris dans l'intérieur d'un cercle on mène une sécante, et par ses extrémités des tangentes, la somme des inverses des distances de ce point aux deux tangentes est constante.	Si l'on joint le foyer d'une ellipse aux deux points de contact des tangentes parallèles, la somme de ces rayons vecteurs est constante.
Les angles des deux tangentes avec leur corde de contact sont égaux.	Les angles des tangentes parallèles avec les rayons vecteurs des points de contact sont égaux.
131. Lorsqu'un polygone régulier est circon-	Si l'on suppose une rose des vents ayant son centre

scrit à une circonférence, la somme des distances d'un point intérieur aux différents côtés est constante pour un même nombre de côtés du polygone.

au foyer d'une ellipse, la somme des inverses des rayons vecteurs comptée sur ces droites est constante pour un même nombre de rayons de la rose.

132. Dans le cas particulier d'une parabole, c'est-à-dire dans le cas où le point O serait sur le cercle C, il serait facile de prouver que la ligne d'intersection des deux cercles n'est autre chose que la tangente au sommet de la parabole, et d'en déduire :

1° Que cette ligne est le lieu des projections du foyer sur les tangentes;

2° Que la tangente fait des angles égaux avec le rayon vecteur et une parallèle à l'axe menée par le point de contact.

133. Nous pouvons enfin déduire le théorème de Pascal et le théorème de Brianchon l'un de l'autre de la manière suivante :

Un hexagone étant inscrit à un *cercle*, les points de concours des côtés opposés sont en ligne droite.

Un hexagone étant circonscrit à une *conique*, les lignes qui joignent ses sommets opposés passent par un même point.

Un hexagone étant circonscrit à un *cercle*, les diagonales qui joignent ses sommets opposés passent par un même point.

Un hexagone étant inscrit à une *conique*, les points de concours des côtés opposés sont en ligne droite.

Le théorème de Brianchon, dans le cas du cercle, se déduit du reste de celui de Pascal par polaires réciproques, en supposant que les deux cercles coïncident.

EXERCICES POUR LA LICENCE

(suite, voir même tome, p. 474);

PAR M. W.-H. BESANT,
du collége de Saint-Jean à Cambridge.

31. Une courbe, entraînant un point, roule sur une ligne droite, et, symétriquement, sur une courbe égale; prouver que, la rotation ayant lieu pour le même arc dans chaque cas, les rayons de courbure des roulettes et la distance du point au point de contact forment une progression harmonique.

32. Dans le même cas, si une ligne droite est entraînée, les rayons de courbure des roulettes et la distance de la ligne au point de contact forment une progression arithmétique.

33. Une ellipse roule sur une droite; la longueur de l'enveloppe de son axe entre deux sommets consécutifs est

$$a\left(1 + \frac{1 - e^2}{2e}\log\frac{1+e}{1-e}\right).$$

34. Un cercle roule sur une droite; prouver que l'enveloppe d'une droite entraînée est une développante de cycloïde, et tracer les figures correspondant aux cas dans lesquels la distance de la ligne entraînée au centre est supérieure, égale ou inférieure au diamètre du cercle.

35. Une ellipse roule sur une droite; trouver l'équation de l'enveloppe de la directrice, et prouver qu'elle a deux sommets si l'excentricité est plus grande que $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,

et que, si $e < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, la longueur de l'arc de la roulette, correspondant à un tour complet de l'ellipse, est $\frac{4\pi a}{e}$.

36. Une ligne droite roule sur une courbe $s = f'(\varphi)$, entraînant une droite inclinée sur elle d'un angle α. La roulette enveloppe est $s = f(\varphi) + \cos\alpha f'(\varphi)$.

Si la courbe est une épicycloïde ou une hypocycloïde, l'enveloppe est de la même classe.

37. Une ligne droite glisse sur une courbe, ayant toujours son même point en contact; le mouvement est identique au roulement d'une perpendiculaire à cette droite sur la développée.

38. Prouver que l'enveloppe des lignes menées par chaque point d'une épicycloïde et faisant un angle constant avec la tangente est aussi une épicycloïde.

39. Si une parabole, de paramètre $4a$, glisse entre deux droites rectangulaires, les glissettes qu'elle produit sont les mêmes que les roulettes produites par la parabole de paramètre a, roulant sur la courbe

$$a^2(x^2 + y^2)^3 = x^4 y^4.$$

40. Une ellipse glisse sur une droite, la touchant toujours au même point. Le lieu de son centre est la courbe

$$x^2 y^2 = (a^2 - y^2)(y^2 - b^2).$$

41. Une ligne droite APB, entraînant un point P, glisse, par ses extrémités A et B, sur l'arc d'une courbe fermée; si PA $= a$, et PB $= b$, la différence entre l'aire de la courbe et celle du lieu de P est égale à πab.

42. Une développante de cercle glisse sur une ligne droite qu'elle touche toujours au même point. Les glis-

settes d'un point et d'une droite sont respectivement une trochoïde et une développante de cycloïde.

43. Une parabole glisse sur une droite qu'elle touche toujours au même point. Si la normale en P coupe l'axe en G, et que l'on mène GR parallèle à SP et égal à un quart du paramètre, la normale au lieu du foyer est parallèle à PR.

Prouver que le lieu du foyer est une hyperbole.

44. L'angle BAC glisse sur deux cercles fixes; prouver que les glissettes des points sont les mêmes que les roulettes d'une ellipse sur un cercle.

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1044

(voir 2e série, t. X, p. 480);

PAR UN ABONNÉ.

1044. *Une droite et un segment fixe* AB *sont situés dans un plan quelconque; si l'on joint un point quelconque* P *du plan aux extrémités* A *et* B *du segment, les lignes* PA *et* PB *déterminent sur la droite la perspective* A'B' *du segment. Quelle courbe doit décrire le point* P *pour que cette perspective conserve toujours la même longueur?* (HARKEMA.)

Prenons pour axe des x la droite fixe et pour axe des y la droite qui contient le segment AB. Soient a et b les ordonnées des points A et B dont les abscisses sont nulles, l la longueur constante de A'B', α et β les coordonnées du point P.

Les droites PA et PB ont pour équation

$$\frac{y-\beta}{\beta-a}=\frac{x-\alpha}{\alpha}, \quad \frac{y-\beta}{\beta-b}=\frac{x-\alpha}{\alpha};$$

et les abscisses des points A′ et B′ où elles coupent l'axe des x ont pour valeurs

$$-\frac{a\alpha}{\beta-a} \quad \text{et} \quad -\frac{b\alpha}{\beta-b}.$$

On a donc, pour l'équation du lieu,

$$\frac{a\alpha}{\beta-a}-\frac{b\alpha}{\beta-b}=l,$$

ou, en réduisant,

$$(a-b)\alpha\beta=l(a-\beta)(b-\beta).$$

Le lieu est donc une hyperbole ayant l'axe des x pour asymptote, coupant l'axe des y aux points A et B, et dont la seconde direction asymptotique est la droite BC, obtenue en menant par le point A une droite AC égale et parallèle à A′B′.

Note. — La même question a été résolue par MM. Lecornu, élève au lycée de Caen; J. Murent, de Clermont-Ferrand; Kaher-Bey, au Caire.

QUESTIONS.

1045. La différence des contours de deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés supérieur à cinq, l'un inscrit et l'autre circonscrit à un même cercle, est moindre que le côté du polygone inscrit.

(Lionnet.)

1046. Tout nombre premier $p = 8q + 1$ prend, d'une seule manière, les deux formes

$$p = x^2 + 16y^2, \quad p = t^2 + 8u^2.$$

Pour q impair, ou $p = 16r + 9$, des deux nombres y, u, l'un est pair, l'autre impair.

Pour q pair, ou $p = 16r + 1$, les nombres y et u sont tous deux pairs, ou tous deux impairs.

(Lebesgue.) (*)

1047. A, B, C étant les angles d'un triangle rectiligne, on a

$$\frac{\cos A}{\sin B . \sin C} + \frac{\cos B}{\sin A . \sin C} + \frac{\cos C}{\sin A . \sin B} = 2.$$

(J.-Ch. Dupain.)

1048. A, B, C étant les angles d'un triangle rectiligne, on propose de rendre minimum

$$\frac{\sin A}{\sin B . \sin C} + \frac{\sin B}{\sin A . \sin C} + \frac{\sin C}{\sin A . \sin B}.$$

(J.-Ch. Dupain.)

1049. C'est une propriété des coniques, que les sommets des angles droits circonscrits à ces courbes appartiennent à une circonférence : trouver les courbes qui ont la même propriété. (L. Kiepers.)

1050. Une corde glisse sur une courbe quelconque de façon à détacher un segment d'aire constante. Le centre de gravité du segment décrit une courbe dont le

---

(*) M. Lebesgue fera connaître, plus tard, diverses conséquences de ce théorème.

rayon de courbure est proportionnel au cube de la longueur de la corde. (PETERSEN.)

1051. Si l'on désigne par $2p$ le périmètre d'un triangle; par r le rayon du cercle inscrit et par R le rayon du cercle circonscrit :

1° L'équation du troisième degré

$$x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0$$

a ses trois racines réelles et positives;

2° Entre R, r et p, on a

$$(4R + r)^2 \geqq 3p^2 \geqq 9r(4R + r).$$

(P.-A.-G. COLOMBIER.)

1052. Trouver la trajectoire orthogonale d'un système de paraboles égales, tangentes en leur sommet à une droite fixe. (H. BROCARD.)

1053. Trouver une surface (M) telle, qu'abaissant d'un point M de (M) une perpendiculaire MP sur un plan (P), et menant par P une parallèle PN à la normale en M à (M), les droites ainsi obtenues soient normales à une surface. (RIBAUCOUR.)

1054. Par un point P, on mène à un cercle C une sécante PMN : trouver le lieu géométrique de l'intersection de deux circonférences passant, l'une par les points P et N, l'autre par les points P, M, et toutes deux tangentes à la circonférence C. (CALLANDREAU.)

CORRESPONDANCE.

M. B. N... nous écrit qu'en faisant le produit des développements de $\sin x$ et de $\cos x$, il est arrivé à la formule

$$(1)\qquad 2^k = 1 + \frac{(k+1)k}{1.2} + \frac{(k+1)k(k-1)(k-2)}{1.2.3.4} + \ldots,$$

dans laquelle k représente un nombre entier. M. B. N... demande une démonstration directe de cette égalité; en voici une :

La formule du binôme donne

$$(2)\qquad \begin{cases} (1+1)^{k+1} = 1 + \dfrac{k+1}{1} + \dfrac{(k+1)k}{1.2} + \dfrac{(k+1)k(k-1)}{1.2.3} \\ \qquad + \dfrac{(k+1)k(k-1)(k-2)}{1.2.3.4} + \ldots. \end{cases}$$

Et, comme dans le développement d'une puissance entière d'un binôme, la somme des coefficients des termes de rang pair est égale à celle des coefficients des termes de rang impair, en prenant les moitiés des deux membres de l'égalité (2), on obtient la formule (1). G.

Les solutions de plusieurs questions proposées nous sont parvenues trop tard pour qu'il ait été possible d'en faire mention dans les numéros où d'autres solutions des mêmes questions ont été insérées. Afin de réparer, en partie, cette omission, nous dirons que :

Les questions 1002, 1020, 1026, 1036, 1037 ont été résolues par M. *Moret-Blanc;*

La question 1002, par un abonné anonyme;

La question 998, par MM. *Kruschwitz* et *Callandreau;*

La question 981, par MM. *Callandreau* et *Cahen;*

Les questions 982 et 983, par M. *Brocard;*

La question 1027, par M. *Bertillon,* élève en mathématiques élémentaires au lycée du Havre, et M. *Helderman,* professeur;

La question de géométrie analytique proposée au Concours d'agrégation (*voir* p. 370), par M. *Chadu,* maître répétiteur au lycée de Bordeaux; M. *Pellet,* élève à l'École Normale; et M. *V. Hioux*, professeur au lycée de Saint-Étienne;

La question 982, par M. *Kocséry* (*Louis*), élève à l'École Polytechnique, à Bude.

M. Kocséry remarque qu'il faut, dans la seconde équation de l'énoncé, remplacer les *sinus* par des *cosinus;* cette rectification a déjà été indiquée (numéro de mai 1870, p. 240);

Enfin, une réparation du même genre est due, depuis longtemps j'en conviens, à M. *Terrats,* professeur au collége d'Arras, qui, dans une lettre en date du 24 juin 1870, a signalé le premier l'erreur qui s'est glissée dans l'énoncé de la question 994, proposée par M. *Laurent,* répétiteur à l'École Polytechnique. Cet énoncé a été, depuis, rectifié par M. *Laurent*, dans la solution qu'il a donnée (numéro de septembre 1870, p. 425).

« On nous fait savoir que l'énoncé de la question de géométrie descriptive posée au Concours d'admission à l'École Centrale a été indiqué d'une manière incomplète dans le numéro d'octobre, p. 478, en ce que les conditions suivantes n'ont pas été mentionnées :

« Le cercle qui a pour rayon 8 centimètres est tangent à la ligne de terre; les génératrices rectilignes de l'hyperboloïde font avec le plan horizontal un angle de 45 degrés; le grand axe du méridien de l'ellipsoïde est dirigé suivant l'axe de révolution de la surface. »

Extrait d'une lettre de M. *Painvin* à M. *Bourget :*

« ... A la fin de la question 1042, p. 479, il faut ajouter ceci :

» Dans le premier cas, on a un système de rayons ou, d'après une locution connue, une *congruence* dont il faut étudier les propriétés. »

D'après de récentes dispositions, M. *Bourget,* étant chargé de la direction des *Annales de l'École Normale supérieure,* n'a plus le temps nécessaire pour s'occuper, d'une manière assidue, de la rédaction des *Nouvelles Annales de Mathématiques;* mais les services qu'il a si libéralement rendus à ce journal, pendant quatre années, sont garants de l'intérêt qu'il continuera à lui porter.

A partir du 1er janvier prochain, M. *Bourget* aura pour successeur, dans la rédaction des *Nouvelles Annales*, M. *Charles Brisse,* ancien élève de l'École Polytechnique, agrégé de l'Université. Le nom de mon nouveau collaborateur est assez connu pour que je puisse me dispenser de parler du prix que j'attache à sa collaboration. G.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME X, 2e SÉRIE.)

Arithmétique et Algèbre.

Trigonométrie.

Géométrie à deux dimensions.

Pages.

Géométrie à trois dimensions.

Calcul infinitésimal.

Mécanique.

Bulletin bibliographique.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Mélanges.

Questions proposées.

Questions résolues.

(*) *Voir* page 239 pour une rectification.

(**) *Voir* page 288 pour une rectification : la question 942 n'est pas résolue.

(***) Les questions 981 et 1017 sont les mêmes.

TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

(TOME X, 2e SÉRIE.)

ERRATA.

Page 95, ligne 10, question 942 (*voir* p. 288 pour une rectification).
Page 144, ligne 8 en remontant, *au lieu de* 1017, *lisez* 981 et 1017.
Page 184, ligne 1, *au lieu de* question 910, *lisez* question.
Page 184, ligne 7, *au lieu de* AA′, BB′, *lisez* AB, A′B′.
Page 222, ligne 1 en remontant, ajoutez l'unité au second membre de l'équation.
Page 335, ligne 7 en remontant, *au lieu de* 1031, *lisez* 1031 (*bis*).

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Rue de Seine Saint-Germain, 10, près l'Institut.