Nouvelles annales de mathématiques

PAINVIN

# Note sur la transformation homographique

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 9 (1870), p. 97-107
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__97_0>

# NOTE SUR LA TRANSFORMATION HOMOGRAPHIQUE;

PAR M. PAINVIN,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycee de Lyon.

1. Deux figures homographiques peuvent-elles être en général amenées par un déplacement convenable à être homologiques? telle est la question que je me propose d'étudier.

On sait que les formules générales de la *transformation homographique* sont :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{ax'+by'+cz'+d}{mx'+ny'+pz'+q},\\ y &= \frac{a_1x'+b_1y'+c_1z'+d_1}{mx'+ny'+pz'+q},\\ z &= \frac{a_2x'+b_2y'+c_2z'+d_2}{mx'+ny'+pz'+q}. \end{aligned}\right.$$

Je désignerai par premier système (ou système F) l'ensemble des points auquel appartient le point $(x, y, z)$, et par deuxième système (ou système F') l'ensemble des points auquel appartient le point $(x', y', z')$.

Je rapporte d'abord les *deux figures* à un nouveau système d'axes (OX, OY, OZ) parallèles aux anciens ($Cx$, $Cy$, $Cz$), c'est-à-dire que je pose à la fois

$$(1^\circ)\quad \left\{\begin{aligned} x &= X + x_0, & x' &= X' + x_0,\\ y &= Y + y_0, & y' &= Y' + y_0,\\ z &= Z + z_0; & z' &= Z' + z_0, \end{aligned}\right.$$

$x_0, y_0, z_0$ sont les coordonnées par rapport à l'ancien système de la nouvelle origine O.

Maintenant je fais tourner la première figure F, *sans* *changer la position de la figure* F′, autour de la nouvelle origine O ; les axes OX, OY, OZ, entraînés dans le mouvement de la première figure, seront venus se placer respectivement en $OX_1$, $OY_1$, $OZ_1$, par exemple ; je représenterai par $\lambda$, $\mu$, $\nu$ les angles de $OX_1$ avec les axes fixes OX, OY, OZ ; par $\lambda_1$, $\mu_1$, $\nu_1$, ceux de $OY_1$ ; par $\lambda_2$, $\mu_2$, $\nu_2$, ceux de $OZ_1$.

D'après cela, si, après la rotation, $\xi$, $\eta$, $\zeta$ sont les coordonnées (par rapport aux axes OX, OY, OZ) d'un point M de la première figure, point dont les coordonnées étaient X, Y, Z avant la rotation, on aura

$$(2^\circ)\quad \begin{cases} X = \lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta, \\ Y = \lambda_1\xi + \mu_1\eta + \nu_1\zeta, \\ Z = \lambda_2\xi + \mu_2\eta + \nu_2\zeta. \end{cases}$$

Si l'on substitue les valeurs (1°) et (2°) dans les formules (1), on trouve

$$(2)\quad \begin{cases} \lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta \\ \qquad = \dfrac{(a - mx_0)X' + (b - nx_0)Y' + (c - px_0)Z' + U_0}{mX' + nY' + pZ' + R_0}, \\ \lambda_1\xi + \mu_1\eta + \nu_1\zeta \\ \qquad = \dfrac{(a_1 - my_0)X' + (b_1 - ny_0)Y' + (c_1 - py_0)Z' + V_0}{mX' + nY' + pZ' + R_0}, \\ \lambda_2\xi + \mu_2\eta + \nu_2\zeta \\ \qquad = \dfrac{(a_2 - mz_0)X' + (b_2 - nz_0)Y' + (c_2 - pz_0)Z' + W_0}{mX' + nY' + pZ' + R_0}, \end{cases}$$

après avoir posé

$$(2\ bis)\quad \begin{cases} U_0 = ax_0 + by_0 + cz_0 + d - x_0R_0, \\ V_0 = a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 + d_1 - y_0R_0, \\ W_0 = a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0 + d_2 - z_0R_0, \\ R_0 = mx_0 + ny_0 + pz_0 + q. \end{cases}$$

Les formules (2) établissent la correspondance entre les points homologues des deux figures F et F′, après que la première figure (F) a tourné autour du point O, la deuxième figure (F′) n'ayant pas changé de place. Ces deux figures sont toutes deux rapportées aux axes OX, OY, OZ.

On a ainsi introduit les *douze inconnues*

$$x_0,\ y_0,\ z_0;\quad \lambda,\ \mu,\ \nu;\quad \lambda_1,\ \mu_1,\ \nu_1;\quad \lambda_2,\ \mu_2,\ \nu_2.$$

Les neuf dernières sont d'ailleurs liées entre elles par les *six relations*

$$(3)\qquad \begin{cases} \lambda^2+\mu^2+\nu^2=1, & \lambda_1\lambda_2+\mu_1\mu_2+\nu_1\nu_2=0,\\ \lambda_1^2+\mu_1^2+\nu_1^2=1, & \lambda_2\lambda+\mu_2\mu+\nu_2\nu=0,\\ \lambda_2^2+\mu_2^2+\nu_2^2=1; & \lambda\lambda_1+\mu\mu_1+\nu\nu_1=0, \end{cases}$$

ou par les relations inverses

$$(3\ bis)\qquad \begin{cases} \lambda^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2=1, & \mu\nu+\mu_1\nu_1+\mu_2\nu_2=0,\\ \mu^2+\mu_1^2+\mu_2^2=1, & \nu\lambda+\nu_1\lambda_1+\nu_2\lambda_2=0,\\ \nu^2+\nu_1^2+\nu_2^2=1; & \lambda\mu+\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2=0. \end{cases}$$

En faisant usage des relations (3 *bis*), nous résoudrons les équations (2) par rapport à $\xi$, $\eta$, $\zeta$; ceci fait, nous égalerons à zéro les coefficients de Y′ et de Z′ dans le numérateur de la valeur de $\xi$; puis ceux de X′ et Z′ dans la valeur de $\eta$; puis ceux de X′ et Y′ dans la valeur de $\zeta$; et enfin nous égalerons entre eux les coefficients des variables restantes. Les valeurs de $\xi$, $\eta$, $\zeta$ se présenteront alors sous la forme suivante :

$$(4)\qquad \begin{cases} \xi=\dfrac{kX'+U_1}{mX'+nY'+pZ'+R_0},\\ \eta=\dfrac{kY'+V_1}{mX'+nY'+pZ'+R_0},\\ \zeta=\dfrac{kZ'+W_1}{mX'+nY'+pZ'+R_0}: \end{cases}$$

7.

ce sont précisément les formules de la *transformation homologique ;* car on pourra faire disparaître les constantes $U_1$, $V_1$, $W_1$, en déplaçant la *seconde figure* parallèlement à elle-même, sans modifier la nouvelle position de la *première figure*, il est inutile d'insister sur ce dernier déplacement.

En opérant comme je viens de l'indiquer, on est conduit aux neuf relations

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}
&\lambda a + \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = m X_0 + k,\\
&\lambda b + \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 = n X_0,\\
&\lambda c + \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 = p X_0;\\
&\mu a + \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 = m Y_0,\\
&\mu b + \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 = n Y_0 + k,\\
&\mu c + \mu_1 c_1 + \mu_2 c_2 = p Y_0;\\
&\nu a + \nu_1 a_1 + \nu_2 a_2 = m Z_0,\\
&\nu b + \nu_1 b_1 + \nu_2 b_2 = n Z_0,\\
&\nu c + \nu_1 c_1 + \nu_2 c_2 = p Z_0 + k;
\end{aligned}\right.$$

dans ces dernières égalités, on a posé

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
X_0 &= \lambda x_0 + \lambda_1 y_0 + \lambda_2 z_0,\\
Y_0 &= \mu x_0 + \mu_1 y_0 + \mu_2 z_0,\\
Z_0 &= \nu x_0 + \nu_1 y_0 + \nu_2 z_0.
\end{aligned}\right.$$

On a donc en définitive *quinze relations* (3) et (5) entre les *treize indéterminées*

$$\lambda,\ \mu,\ \nu;\quad \lambda_1,\ \mu_1,\ \nu_1;\quad \lambda_2,\ \mu_2,\ \nu_2;\quad X_0,\ Y_0,\ Z_0;\quad k;$$

car il est visible que, lorsqu'on connaîtra $X_0$, $Y_0$, $Z_0$, $\lambda$, $\mu$, $\nu$,..., les coordonnées $x_0$, $y_0$, $z_0$ de la nouvelle origine O seront immédiatement fournies par les équations (6).

**2.** Il s'agit maintenant de résoudre le système des équations (3) et (5).

Dans ce but, nous poserons

$$(7)\quad \Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}; \quad \text{puis} \quad \frac{\partial \Delta}{\partial a} = \mathrm{A}, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial b} = \mathrm{B}, \ldots, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial a_1} = \mathrm{A}_1, \ldots;$$

nous ferons en outre

$$(8)\quad \begin{cases} \mathrm{M} = m\mathrm{A} + n\mathrm{B} + p\mathrm{C}, \\ \mathrm{N} = m\mathrm{A}_1 + n\mathrm{B}_1 + p\mathrm{C}_1, \\ \mathrm{P} = m\mathrm{A}_2 + n\mathrm{B}_2 + p\mathrm{C}_2. \end{cases}$$

Des *neuf* équations (5), nous concluons immédiatement, eu égard aux relations (7) et aux notations (8), les valeurs suivantes des neuf inconnues $\lambda_i$, $\mu_i$, $\nu_i$ en fonction des quatre restantes $\mathrm{X}_0$, $\mathrm{Y}_0$, $\mathrm{Z}_0$, $k$ :

$$(9)\quad \begin{cases} \lambda\,\Delta = \mathrm{MX}_0 + k\mathrm{A}, & \mu\Delta = \mathrm{MY}_0 + k\mathrm{B}, & \nu\Delta = \mathrm{MZ}_0 + k\mathrm{C}, \\ \lambda_1\Delta = \mathrm{NX}_0 + k\mathrm{A}_1, & \mu_1\Delta = \mathrm{NY}_0 + k\mathrm{B}_1, & \nu_1\Delta = \mathrm{NZ}_0 + k\mathrm{C}_1, \\ \lambda_2\Delta = \mathrm{PX}_0 + k\mathrm{A}_2; & \mu_2\Delta = \mathrm{PY}_0 + k\mathrm{B}_2; & \nu_2\Delta = \mathrm{PZ}_0 + k\mathrm{C}_2. \end{cases}$$

Il ne nous reste plus maintenant qu'à écrire que les *six* relations (3) sont vérifiées par les valeurs (9) des $\lambda_i$, $\mu_i$, $\nu_i$.

Auparavant je substituerai aux inconnues $\mathrm{X}_0$, $\mathrm{Y}_0$, $\mathrm{Z}_0$, les inconnnes $t$, $t_1$, $t_2$, définies par les égalités suivantes :

$$(10)\quad \begin{cases} t = \mathrm{A}\,\mathrm{X}_0 + \mathrm{B}\,\mathrm{Y}_0 + \mathrm{C}\,\mathrm{Z}_0, \\ t_1 = \mathrm{A}_1\mathrm{X}_0 + \mathrm{B}_1\mathrm{Y}_0 + \mathrm{C}_1\mathrm{Z}_0, \\ t_2 = \mathrm{A}_2\mathrm{X}_0 + \mathrm{B}_2\mathrm{Y}_0 + \mathrm{C}_2\mathrm{Z}_0, \end{cases}$$

d'où résulte

$$(10\ bis)\quad \begin{cases} \Delta\mathrm{X}_0 = at + a_1t_1 + a_2t_2, \\ \Delta\mathrm{Y}_0 = bt + b_1t_1 + b_2t_2, \\ \Delta\mathrm{Z}_0 = ct + c_1t_1 + c_2t_2, \end{cases}$$

et je poserai encore

$$(11) \qquad r^2 = X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2.$$

En remplaçant $X_0$, $Y_0$, $Z_0$, par leurs valeurs (10 *bis*) dans cette dernière égalité, on a d'abord

$$(12) \quad \Delta^2 r^2 = (at + a_1 t_1 + a_2 t_2)^2 + (bt + b_1 t_1 + b_2 t_2)^2 + (ct + c_1 t_1 + c_2 t_2)^2;$$

en écrivant ensuite que les *six* équations (3) sont vérifiées, il vient, eu égard aux notations (10) et (11),

$$(13) \quad \begin{cases} \Delta^2 = k^2(A^2 + B^2 + C^2) + M^2 r^2 + 2kMt, \\ \Delta^2 = k^2(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2) + N^2 r^2 + 2kNt_1, \\ \Delta^2 = k^2(A_2^2 + B_2^2 + C_2^2) + P^2 r^2 + 2kPt_2; \end{cases}$$

$$(14) \quad \begin{cases} k^2(A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2) + NPr^2 + k(Pt_1 + Nt_2) = 0, \\ k^2(A_2A + B_2B + C_2C) + PMr^2 + k(Mt_2 + Pt) = 0, \\ k^2(A\,A_1 + B\,B_1 + C\,C_1) + MNr^2 + k(Nt + Mt_1) = 0. \end{cases}$$

On a donc, entre les *cinq inconnues* $t$, $t_1$, $t_2$, $k$, $r$, les *sept équations* (12), (13), (14).

Des équations (13) je tire $t$, $t_1$, $t_2$, en fonction de $r^2$ et $k^2$, et je substitue ces valeurs dans les équations (14) et (12). La substitution, effectuée d'abord dans les équations (14), conduit aux trois équations suivantes :

$$(15) \quad \begin{cases} k^2[N^2(A_2^2 + B_2^2 + C_2^2) + P^2(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2) \\ \qquad - 2NP(A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2)] = \Delta^2(N^2 + P^2), \\ k^2[P^2(A^2 + B^2 + C^2) + M^2(A_2^2 + B_2^2 + C_2^2) \\ \qquad - 2PM(A_2A + B_2B + C_2C)] = \Delta^2(P^2 + M^2), \\ k^2[M^2(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2) + N^2(A^2 + B^2 + C^2) \\ \qquad - 2MN(AA_1 + BB_1 + CC_1)] = \Delta^2(M^2 + N^2). \end{cases}$$

Or ces trois dernières équations ne renferment plus que la seule inconnue $k^2$; on conclut de là les *deux équations* *de condition* suivantes :

$$
(16) \quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{(NA_2 - PA_1)^2 + (NB_2 - PB_1)^2 + (NC_2 - PC_1)^2}{N^2 + P^2} \\
&= \frac{(PA - MA_2)^2 + (PB - MB_2)^2 + (PC - MC_2)^2}{P^2 + M^2} \\
&= \frac{(MA_1 - NA)^2 + (MB_1 - NB)^2 + (MC_1 - NC)^2}{M^2 + N^2}.
\end{aligned}
\right.
$$

Ainsi, pour que deux figures homographiques dans l'espace puissent être amenées à être homologiques, il y a à vérifier deux équations de condition, savoir les relations (16). Ces deux conditions sont *nécessaires* et *suffisantes ;* il vient d'être démontré qu'elles sont nécessaires, car il est visible que les égalités (16) ne se réduisent pas à des identités, vu l'indépendance des constantes arbitraires M, N, P, A, B, C, .... J'ajoute qu'elles sont suffisantes : si l'on suppose, en effet, que les relations (16) soient vérifiées, les équations (15) donneront d'abord pour l'inconnue $k$ une valeur unique et déterminée. La substitution, dans l'équation (12), des valeurs $t$, $t_1$, $t_2$, déduites des égalités (13), conduit à une équation bicarrée par rapport à $r$; à chaque valeur de $r^2$ correspond, d'après les équations (13), une seule et unique valeur pour chacune des inconnues $t$, $t_1$, $t_2$, et par conséquent, d'après les équations (10 *bis*), une seule et unique valeur pour chacune des inconnues $X_0$, $Y_0$, $Z_0$. Les équations (9) nous fourniront ensuite une valeur unique pour chacune des neuf inconnues restantes, $\lambda_i$, $\mu_i$, $\nu_i$, car on peut toujours assujettir la constante $k$ a être positive, sans restreindre la généralité de la question. On trouve donc ainsi *deux solutions*, et deux seulement.

3. Il me reste enfin à donner la signification géométrique des équations de condition (16).

Dans la seconde figure (F′), le cercle imaginaire de l'infini a pour équations

$$(17) \qquad t' = 0, \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0.$$

Résolvons les équations (1) par rapport à $x'$, $y'$, $z'$; pour cela, multiplions-les respectivement par A, $A_1$, $A_2$, puis par B, $B_1$, $B_2$, et enfin, par C, $C_1$, $C_2$; on trouve ainsi

$$(1^\circ) \quad \begin{cases} \Delta x' - (mx' + ny' + pz')\,X + e - qX = 0, \\ \Delta y' - (mx' + ny' + pz')\,Y + f - qY = 0, \\ \Delta z' - (mx' + ny' + pz')\,Z + g - qZ = 0, \end{cases}$$

après avoir posé

$$(18) \quad \begin{cases} X = Ax + A_1y + A_2z, \\ Y = Bx + B_1y + B_2z, \\ Z = Cx + C_1y + C_2z, \end{cases} \qquad \begin{cases} e = Ad + A_1d_1 + A_2d_2, \\ f = Bd + B_1d_1 + B_2d_2, \\ g = Cd + C_1d_1 + C_2d_2. \end{cases}$$

Si maintenant on multiplie les équations (1°) par $m$, $n$, $p$, respectivement, et qu'on ajoute, on en conclut la valeur de l'expression $(mx' + ny' + pz')$; de là résulte immédiatement les valeurs cherchées pour $x'$, $y'$, $z'$.

Après avoir posé

$$(19) \quad \begin{cases} Q = Mx + Ny + Pz, \\ S = Md + Nd_1 + Pd_2, \end{cases}$$

on obtient définitivement

$$(20) \quad \begin{cases} x' = \dfrac{(q\Delta - \delta)X + e(Q - \Delta)}{\Delta(\Delta - Q)}, \\ y' = \dfrac{(q\Delta - \delta)Y + f(Q - \Delta)}{\Delta(\Delta - Q)}, \\ z' = \dfrac{(q\Delta - \delta)Z + g(Q - \Delta)}{\Delta(\Delta - Q)}. \end{cases}$$

De ces formules résultent les conséquences suivantes.

Au plan de l'infini, considéré comme appartenant à la deuxième figure (F′), correspond, dans la première figure (F), le plan à distance finie

$$Q - \Delta = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad Mx + Ny + Pz - \Delta = 0.$$

Au cercle imaginaire de l'infini (17), considéré comme appartenant à la deuxième figure (F′), correspond, dans la première figure (F), la courbe

$$\left\{\begin{array}{c} [(q\Delta - \delta)X + e(Q - \Delta)]^2 \\ + [(q\Delta - \delta)Y + f(Q - \Delta)]^2 \\ + [(q\Delta - \delta)Z + g(Q - \Delta)]^2 = 0, \\ Q - \Delta = 0 ; \end{array}\right.$$

en ayant égard à la seconde équation, l'ensemble de ces deux équations peut se remplacer par l'ensemble des deux équations suivantes :

$$(21) \qquad X^2 + Y^2 + Z^2 = 0, \quad Mx + Ny + Pz - \Delta = 0.$$

Je vais chercher maintenant les conditions pour que les équations (21) représentent un cercle.

Pour cela, je prendrai l'équation générale des surfaces du second ordre passant par la courbe (21), savoir :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + (Mx + Ny + Pz - \Delta)(\alpha x + \beta y + \gamma z + \varepsilon) = 0,$$

et j'écrirai que cette équation représente une sphère.

Eu égard aux notations (18), on trouve

$$(22) \quad \left\{\begin{array}{l} A^2 + B^2 + C^2 + \alpha M \\ = A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 + \beta N = A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 + \gamma P = \rho, \\ 2(A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2) + \beta P + \gamma N = 0, \\ 2(A_2A + B_2B + C_2C) + \gamma M + \alpha P = 0, \\ 2(AA_1 + BB_1 + CC_1) + \alpha N + \beta M = 0. \end{array}\right.$$

Des premières équations (22), on tire $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, en fonction de $\rho$, et en substituant ces valeurs dans les trois équations suivantes, il vient

$$(23)\quad \begin{cases} (NA_2 - PA_1)^2 + (NB_2 - PB_1)^2 + (NC_2 - PC_1)^2 = \rho(N^2 + P^2), \\ (PA - MA_2)^2 + (PB - MB_2)^2 + (PC - MC_2)^2 = \rho(P^2 + M^2), \\ (MA_1 - NA)^2 + (MB_1 - NB)^2 + (MC_1 - NC)^2 = \rho(M^2 + N^2). \end{cases}$$

L'élimination de $\rho$ entre ces dernières équations conduira aux équations de condition nécessaires et suffisantes pour que la courbe de la première figure, correspondant au cercle imaginaire de l'infini dans la deuxième figure, soit également un cercle. Or nous retrouvons ainsi les équations de condition (16) déjà obtenues au n° 2.

J'ajouterai, sans en donner la démonstration, la remarque suivante : « Si, au cercle imaginaire de l'infini, » considéré comme appartenant à la figure (F′), corres- » pond un cercle dans la figure (F), il arrivera néces- » sairement que, au cercle imaginaire de l'infini, consi- » déré comme appartenant à la figure (F), correspon- » dra aussi un cercle dans la figure (F′). »

4. De cette analyse je conclus les théorèmes suivants :

1° *Deux figures* DE L'ESPACE *homographiques ne peuvent pas, en général, être amenées à être homologiques.*

2° *Pour que deux figures homographiques de l'espace puissent être placées homologiquement, il faut et il suffit que la courbe, qui, dans l'une d'elles, correspond au cercle imaginaire de l'infini appartenant à l'autre, soit également un cercle. Et alors il y a deux manières, et deux seulement, d'amener les deux figures à être homologiques.*

3° *Pour amener deux figures homographiques à être homologiques, dans le cas où la chose est possible, on pourra opérer comme il suit :*

*Soient* I *le plan de la figure* (F) *correspondant au* *plan de l'infini dans la figure* (F′), *et* J′ *le plan de la figure* (F′) *correspondant au plan de l'infini dans la figure* (F); *on fera tourner la figure* (F) *de façon à rendre le plan* I *parallèle au plan* J′; *on imaginera ensuite le cône passant par le cercle imaginaire à l'infini dans la figure* (F′), *et le cercle* (*maintenant parallèle*) *qui lui correspond dans la figure* (F) : *soit* O *le sommet de ce cône. Si maintenant* O′ *est le point qui, dans la figure* (F′), *correspond au point* O, *considéré comme appartenant à la figure* (F), *on fera glisser la figure* (F′) *parallèlement à elle-même jusqu'à ce que le point* O′ *vienne coïncider avec* O, *puis on le fera tourner d'un angle convenable autour d'une perpendiculaire au plan* J′ *et passant par le point* O; *après ce double déplacement, les deux figures seront placées homologiquement; le point* O *sera le centre d'homologie, et le plan d'homologie sera parallèle au plan* J′.

La démonstration de cette dernière proposition peut se faire très-simplement.