Nouvelles annales de mathématiques

Paul Serret

Sur un théorème de M. Ferrers

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 73-84

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__73_1>

SUR UN THÉORÈME DE M. FERRERS;

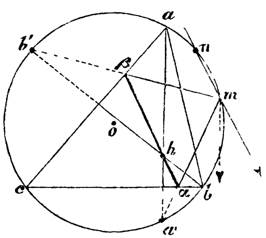
PAR M. PAUL SERRET.

I.

1. L'enveloppe de la droite qui réunit les projections, sur les trois côtés d'un triangle, d'un point quelconque du cercle circonscrit, a été étudiée déjà par plusieurs géomètres. M. Ferrers, le premier, en a reconnu la nature, en établissant que cette enveloppe n'est autre qu'une *hypocycloïde de module* $\frac{1}{3}$: résultat remarquable qui paraît avoir échappé à la curiosité de Steiner, et que l'on peut établir géométriquement comme il suit.

Soient (*fig.* 1) a, b, c et h les trois sommets et le point de rencontre des hauteurs d'un triangle quelconque; a', b', c' les symétriques du point h par rapport aux trois côtés du triangle; on sait que les points a', b', c' appartiennent au cercle circonscrit. Or il résulte presque immédiatement de là que, si l'on imagine un rayon de lumière issu du point h, et se propageant de part et d'autre de ce point de manière à se réfléchir simultanément sur deux des côtés du triangle : 1° les rayons réfléchis se couperont toujours en quelque point m du cercle circonscrit au triangle ; 2° la parallèle au rayon incident menée par ce point m sera parallèle à la droite qui contient les projections de ce même point sur les trois côtés du triangle, et les distances de ces droites au point fixe h seront entre elles dans le rapport de 2 à 1. Les enveloppes de ces droites sont donc homothétiques, et le problème se réduit à trouver l'enveloppe de la seule droite mn. Or, le rayon $h\alpha$ et le rayon réfléchi αm (lequel, prolongé, passe par le point fixe a') étant également inclinés sur la hauteur aa', considérée comme verticale, la parallèle mn au rayon incident et la corde $a'm$ seront dirigées symétriquement par rapport à la verticale du point m.

Fig. 1.



Par le point a' du cercle donné $aba'c$, on mènera donc une corde quelconque $a'm$; menant ensuite, par l'extrémité mobile m de cette corde, une droite indéfinie mn symétrique de la précédente ma' par rapport à la verticale du point m, il restera à étudier l'enveloppe de la droite mn qui résulte de cette construction.

2. Cette première transformation du problème met d'ailleurs en évidence l'une des propriétés les plus remarquables de l'enveloppe dont il s'agit, laquelle, étant formée à l'aide d'un triangle scalène quelconque, est cependant régulière et composée de trois branches identiques distribuées symétriquement, autour du centre, dans des espaces angulaires de 120 degrés.

Effectivement, la série des droites mn est *une* pour tous les triangles inscrits abc, ab_1c_1,... qui auraient l'un de leurs sommets au point a et l'une de leurs hauteurs dans la droite indéfinie aha'. Et comme l'un de ces triangles est isoscèle, on voit d'abord que l'enveloppe relative à un triangle scalène quelconque abc est identique à l'enveloppe relative à un certain triangle isoscèle ab_1c_1 ($ac_1 = b_1c_1$). On peut donc supposer isoscèle le triangle initial abc et poser (en changeant la notation) $ab = ac$. Mais alors l'un des triangles inscrits, de même sommet a et de même hauteur aha' que le précédent, sera équilatéral. Et l'enveloppe relative au triangle scalène que nous considérions d'abord, se trouvant identique a l'enveloppe relative à ce triangle équilatéral, sera *regulière* comme l'est évidemment celle-ci.

3. Mais on peut négliger cette observation et passer directement à l'étude de l'enveloppe des droites mn, en observant que l'angle de deux quelconques de ces droites mn, $m'n'$, étant égal à celui des cordes symétriques correspondantes $a'm$, $a'm'$, cet angle sera mesuré, comme celui-ci, par la moitié de l'arc mm'. On a donc, en désignant par n, n' les deux dernières traces de ces droites sur le cercle donné $aba'c$,

$$\pm \frac{1}{2}\,\widehat{nn'} \pm \frac{1}{2}\,\widehat{mm'} = \frac{1}{2}\,\widehat{mm'},$$

ou seulement, et parce que toutes les autres combinaisons de signes s'excluent d'elles-mêmes,

$$\frac{1}{2}\,\widehat{nn'} - \frac{1}{2}\,\widehat{mm'} = \frac{1}{2}\,\widehat{mm'},$$

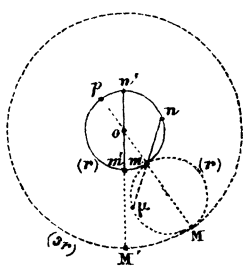
c'est-à-dire

$$(1) \qquad \widehat{mm'} = \frac{1}{2}\,\widehat{nn'}.$$

Deux quelconques des droites considérées se coupent donc toujours à l'extérieur du cercle initial abc, et les arcs qu'elles interceptent sur ce cercle sont toujours dans le rapport de 1 à 2.

4. Soit donc μ le point de concours de deux de ces

Fig. 2.



droites. Les triangles semblables $\mu m m'$, $\mu n' n$ fournissant la proportion

$$(2) \qquad \frac{\mu m}{\mu n'} = \frac{\text{corde } mm'}{\text{corde } nn'},$$

on a, en supposant les deux droites infiniment voisines l'une de l'autre, et passant à la limite (*fig.* 2),

$$(1, 2) \qquad \frac{\mu m}{\mu n} = \frac{\text{arc } mm'}{\text{arc } nn'} = \frac{1}{2},$$

ou

$$\overline{nm} = \overline{m\mu}.$$

Le point μ, suivant lequel la droite mobile mn touche son enveloppe, coïncide donc avec la deuxième trace de cette droite sur un cercle $m\mu$M qui toucherait en m le cercle initial et serait décrit avec le même rayon. Et il ne reste plus qu'à trouver le lieu de tous les points analogues μ.

Or si l'on désigne par $m'n'$ celle des droites mobiles qui passe par le centre o du cercle initial, et que l'on prolonge les rayons om, om' respectivement en M, M' jusqu'au cercle décrit, du point o comme centre, avec un rayon triple; la figure résultante fournit immédiatement ces égalités :

$$\widehat{M\mu} = \widehat{np} = \widehat{nn'} + \widehat{n'p} = \widehat{nn'} + \widehat{mm'};$$

de là, en utilisant la relation antérieure $\widehat{nn'} = 2\widehat{mm'}$,

$$\widehat{M\mu} = 2\widehat{mm'} + \widehat{mm'} = 3\widehat{mm'},$$

ou enfin

$$\widehat{M\mu} = \widehat{MM'}.$$

Or le point M' est fixe, et l'enveloppe considérée n'est autre que *l'hypocycloïde engendrée par le point* μ *du cercle* Mμm *qui roulerait intérieurement sur le cercle* (o, MM') *de rayon triple* (Ferrers).

II.

5. L'enveloppe précédente, ou du moins la courbe homothétique que nous considérions d'abord, n'est autre au fond, comme l'on sait, que l'enveloppe de la *tangente au sommet* des paraboles inscrites au triangle initial *abc*,

ou $A.B.C = o$. Soit donc $X = o$ l'une de ces tangentes, et $Y = o$ l'un des diamètres de la parabole correspondante. L'équation symbolique $c = o$ désignant la *droite à l'infini*, on aura, dans le groupe

$$A^2,\ B^2,\ C^2;\quad X^2,\ cY,\ c^2$$

six couples de droites conjuguées à cette parabole, et l'on conclura de l'identité résultante (*Géométrie de direction*, p. 160).

$$\dot{A}^2 + \dot{B}^2 + \dot{C}^2 + \dot{X}^2 + cY + c^2 \equiv o,$$

que les deux courbes

$$\dot{A}^2 + \dot{B}^2 + \dot{C}^2 = o,\quad X^2 + cY + c^2 = o$$

se confondent en une seule : une parabole conjuguée au triangle initial et dont l'*axe* $X = o$ coïncide avec la *tangente au sommet* de la parabole précédente. *L'enveloppe précédente est donc identique à l'enveloppe de l'axe des paraboles conjuguées au triangle initial* ou *inscrites au triangle parallèle que l'on peut circonscrire à celui-là.*

6. Soient $X = o$ l'*axe* de l'une de ces dernières paraboles, et $Y.Y' = o$ deux perpendiculaires quelconques à l'axe X. La courbe que l'on considère étant conjuguée aux six couples de droites

$$A.B,\ B.C,\ A.C;\quad X.Y,\ X.Y'\ \text{ et }\ c^2,$$

l'identité résultante

$$AB + BC + AC + XY + XY' + c^2 \equiv o,$$

et l'orthogonalité des directions X et Y, X et Y' montrent encore que les deux courbes

$$AB + BC + AC = o,\quad \text{et}\quad X(Y + Y') + c^2 = o$$

se confondent suivant une *hyperbole équilatère* circonscrite au triangle initial ABC, et dont l'*une des asymptotes* $X = o$ se confond avec l'*axe* de la parabole antérieure. *L'enveloppe précédente représente donc aussi la courbe enveloppée par chacune des asymptotes des hyperboles équilatères circonscrites au triangle initial.*

L'étude directe de cette dernière courbe serait d'ailleurs bien aisée. Car si l'on prend pour centre de l'une des hyperboles de la série un point quelconque m du cercle des neuf points du triangle abc, et que, joignant ce point m au point milieu a'' du côté bc, on rabatte la corde $a''m$ sur ce côté de part et d'autre de a'', en $a''\mu$ et $a''\nu$, les droites $m\mu$, $m\nu$ seraient les deux asymptotes de l'hyperbole considérée. Les *asymptotes* et aussi, dès lors, les *axes principaux* de toutes ces hyperboles se déterminent donc, en réalité, par une construction identique à celle qui nous avait fourni les droites mn du paragraphe précédent.

7. Enfin, si l'on désigne par $X = o$ l'*axe* de l'une des *paraboles inscrites au triangle* ABC, par $Y . Y' = o$ deux perpendiculaires quelconques à cet axe, le dédoublement de l'identité

$$\dot{A}^2 + \dot{B}^2 + \dot{C}^2 + XY + XY' + c^2 = o,$$

suivant les équations équivalentes

$$\dot{A}^2 + \dot{B}^2 + \dot{C}^2 = o, \quad X(Y + Y') + c^2 = o,$$

entraîne encore la conclusion que l'*axe des paraboles inscrites et l'une des asymptotes des hyperboles équilatères conjuguées à un même triangle* ont la même enveloppe : une hypocycloïde, etc.

8. En résumé, la tangente au sommet et l'axe des paraboles inscrites, chacun des axes principaux et chacune

des asymptotes des hyperboles équilatères conjuguées ou circonscrites à un triangle, roulent sur autant d'hypocycloïdes de module $\frac{1}{3}$.

III.

9. L'étude analytique du problème I, qui a donné lieu déjà à de très-savantes recherches, peut aussi fournir un nouvel exemple des avantages que comporte en Géométrie, comme j'ai essayé ailleurs de le montrer, la considération des formes linéaires dérivées de certaines formes quadratiques.

Soient, en désignant par a_1, b_1; a_2, b_2; ... les cosinus et sinus habituels,

$$(a_1 x + b_1 y - p_1)(a_2 x + b_2 y - p_2)(a_3 x + b_3 y - p_3) = 0$$

le trois côtés d'un triangle, et

$$(0) \qquad ax + by - p = 0$$

la droite qui réunit les projections, sur ces côtés, d'un point quelconque du cercle circonscrit, ou la *tangente au sommet de l'une des paraboles inscrites*.

Si l'on exprime que la forme homogène

$$\lambda(ax+by-p)^2+\lambda_1(a_1x+b_1y-p_1)^2+\ldots+\lambda_3(a_3x+b_3y+p_3)^2$$

s'abaisse au premier degré, en posant

$$(1) \qquad \lambda a^2 + \lambda_1 a_1^2 + \lambda_2 a_2^2 + \lambda_3 a_3^2 = 0,$$

$$(2) \qquad \lambda b^2 + \lambda_1 b_1^2 + \lambda_2 b_2^2 + \lambda_3 b_3^2 = 0,$$

$$(3) \qquad \lambda ab + \lambda_1 a_1 b_1 + \lambda_2 a_2 b_2 + \lambda_3 a_3 b_3 = 0:$$

on sait que l'équation résultante

$$(0') \quad \left\{ \begin{aligned} &(\lambda ap + \lambda_1 a_1 p_1 + \ldots)x + (\lambda bp + \lambda_1 b_1 p_1 + \ldots)y \\ &\qquad - \tfrac{1}{2}(\lambda p^2 + \lambda_1 p_1^2 + \ldots) = 0 \end{aligned} \right.$$

représente la médiane du quadrilatère $PP_1P_2P_3$, ou l'un des diamètres de la parabole inscrite. Et, comme ce diamètre et la tangente au sommet (o) doivent se couper à angle droit, l'on a aussi

$$(\lambda ap + \lambda_1 a_1 p_1 + \ldots)a + (\lambda bp + \lambda_1 b_1 p_1 + \ldots)b = 0;$$

ou

$$(4) \quad \lambda p + \lambda_1 p_1(aa_1 + bb_1) + \lambda_2 p_2(aa_2 + bb_2) + \lambda_3 p_3(aa_3 + bb_3) = 0.$$

De là, par l'élimination des paramètres entre les équations (1), (2), (3), (4),

$$\begin{vmatrix} p & p_1(aa_1+bb_1) & p_2(aa_2+bb_2) & p_3(aa_3+bb_3) \\ a^2 & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ b^2 & b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 \\ ab & a_1b_1 & a_2b_2 & a_3b_3 \end{vmatrix} = 0$$

ou encore, en mettant, au lieu de a, b; a_1, b_1; ..., les cosinus correspondants et remplaçant la seconde ligne et la troisième par la somme et la différence de ces lignes,

$$(1) \quad \begin{vmatrix} p & p_1\cos(\alpha-\alpha_1) & p_2\cos(\alpha-\alpha_2) & p_3\cos(\alpha-\alpha_3) \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cos 2\alpha & \cos 2\alpha_1 & \cos 2\alpha_2 & \cos 2\alpha_3 \\ \sin 2\alpha & \sin 2\alpha_1 & \sin 2\alpha_2 & \sin 2\alpha_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Telle est l'équation qui définit l'enveloppe de la droite mobile

$$(o) \qquad x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0.$$

Or, si l'on ordonne l'équation (1) par rapport aux éléments de la première ligne, de cette manière :

$$(1') \qquad k.p + k_1.p_1 + k_2.p_2 + k_3\, p_3 = 0,$$

l'on a

$$k = -[\sin 2(\alpha_1 - \alpha_2) + \sin 2(\alpha_2 - \alpha_3) + \sin 2(\alpha_3 - \alpha_1)],$$

$$k_1 = \cos(\alpha - \alpha_1)[\sin 2(\alpha_2 - \alpha_3) + \sin 2(\alpha_3 - \alpha) + \sin 2(\alpha - \alpha_2)],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

et si, laissant de côté le premier coefficient, qui est numérique, on développe le second, on trouve successivement

$$\begin{aligned} k_1 &= \cos(\alpha - \alpha_1)[2\sin(\alpha_2 - \alpha_3)\cos(\alpha_2 - \alpha_3) \\ &\qquad + 2\sin(\alpha_3 - \alpha_2)\cos(2\alpha - \alpha_2 - \alpha_3)] \\ &= \sin(\alpha_2 - \alpha_3)[2\cos(\alpha - \alpha_1)\cos(\alpha_2 - \alpha_3) \\ &\qquad - 2\cos(\alpha - \alpha_1)\cos(2\alpha - \alpha_2 - \alpha_3)] \\ &= \sin(\alpha_2 - \alpha_3)[\cos(\alpha - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) + \cos(\alpha - \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3) \\ &\qquad - \cos(\alpha + \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) - \cos(3\alpha - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)], \end{aligned}$$

expression que l'on peut écrire

$$k_1 = l_1 \cos\alpha + m_1 \sin\alpha - n_1 \cos(3\alpha - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3).$$

Les trois coefficients k_1, k_2, k_3 sont d'ailleurs de la même forme, et, leurs valeurs actuelles étant portées dans l'équation (1'), elle dévient

$$(1'') \qquad p = l\cos\alpha + m\sin\alpha - n\cos(3\alpha - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3).$$

La distance $p' = l\cos\alpha + m\sin\alpha - p$ de la droite mobile au point *déterminé* $(x = l,\ y = m)$ peut donc s'exprimer par la relation équivalente

$$(1''') \qquad p' = n\cos(3\alpha - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) = n\cos 3\alpha'.$$

Or cette formule revient identiquement à celle de M. Ferrers, et la nature de l'enveloppe y est en évidence.

IV.

10. La surface enveloppe du *plan tangent au sommet des paraboloïdes inscrits à l'hexaèdre*

$$P_1 \ldots P_6 \equiv (a_1 x + b_1 y + c_1 z - p_1) \ldots (a_6 x + b_6 y + c_6 z - p_6) = 0$$

est aussi de la troisième classe; et son équation, dont l'interprétation géométrique présente d'ailleurs de plus grandes difficultés, peut s'obtenir par une méthode toute semblable.

Soit, en effet,

$$(\mathrm{o}) \qquad \mathrm{P} \equiv ax + by + cz - p = \mathrm{o}$$

le plan mobile considéré dans l'une quelconque de ses positions. Si l'on exprime que la forme homogène

$$\lambda(ax + by + cz - p)^2 + \lambda_1(a_1x + b_1y + c_1z - p_1)^2 + \ldots$$
$$+ \lambda_6(a_6x + b_6y + c_6z - p_6)^2$$

s'abaisse au premier degré en posant

$$(1) \qquad \lambda a^2 + \lambda_1 a_1^2 + \ldots + \lambda_6 a_6^2 = \mathrm{o},$$

$$(2) \qquad \lambda b^2 + \lambda_1 b_1^2 + \ldots + \lambda_6 b_6^2 = \mathrm{o},$$

$$(3) \qquad \lambda c^2 + \lambda_1 c_1^2 + \ldots + \lambda_6 c_6^2 = \mathrm{o};$$

$$(4) \qquad \lambda ab + \lambda_1 a_1 b_1 + \ldots + \lambda_6 a_6 b_6 = \mathrm{o},$$

$$(5) \qquad \lambda bc + \lambda_1 b_1 c_1 + \ldots + \lambda_6 b_6 c_6 = \mathrm{o},$$

$$(6) \qquad \lambda ac + \lambda_1 a_1 c_1 + \ldots + \lambda_6 a_6 c_6 = \mathrm{o},$$

on sait que l'équation résultante (*Géométrie de Direction*, p. 86)

$$(\mathrm{o}') \left\{ \begin{array}{l} (\lambda ap + \lambda_1 a_1 p_1 + \ldots)x + (\lambda bp + \lambda_1 b_1 p_1 + \ldots)y \\ \quad + (\lambda cp + \lambda_1 c_1 p_1 + \ldots)z - \frac{1}{2}(\lambda p^2 + \lambda_1 p_1^2 + \ldots) = \mathrm{o} \end{array} \right.$$

représente le *plan du centre* des surfaces du second ordre inscrites à l'heptaèdre $\mathrm{PP}_1 \ldots \mathrm{P}_6$, ou l'ensemble des directions diamétrales de tous les paraboloïdes inscrits. Le plan des centres (o′) et le plan mobile (o) se coupent donc orthogonalement; l'on a encore

$$(7) \quad \lambda p + \lambda_1 p_1(aa_1 + bb_1 + cc_1) + \ldots + \lambda_6 p_6(aa_6 + bb_6 + cc_6) = \mathrm{o},$$

et l'enveloppe cherchée se trouve définie par l'équation

$$\begin{vmatrix} p & p_1(aa_1+bb_1+cc_1) & \dots & p_6(aa_6+bb_6+cc_6) \\ a^2 & a_1^2 & \dots & a_6^2 \\ b^2 & b_1^2 & \dots & b_6^2 \\ c^2 & c_1^2 & \dots & c_6^2 \\ ab & a_1b_1 & \dots & a_6b_6 \\ bc & b_1c_1 & \dots & b_6c_6 \\ ac & a_1c_1 & \dots & a_6c_6 \end{vmatrix} = 0,$$

ou par la suivante :

$$p \sin(1,2,\dots,6) - p_1 \cos(p_1,p) \sin(2,3,\dots,6,0) + \dots \\ + p_6 \cos(p_6,p) \sin(0,1,2,\dots,5) = 0,$$

dans laquelle $\sin(1,2,\dots,6)$ désigne un certain facteur goniométrique dépendant de l'angle solide hexaèdre qui résulte des normales menées d'une même origine à six des plans considérés. Il resterait à reconnaître ce facteur et à définir géométriquement la surface enveloppe, qui se réduit à un cylindre dans un cas particulier; et dont la forme, dans le cas général, est peut-être indépendante de celle de l'hexaèdre donné.