NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ÉMILE FRANÇOISE

Application du calcul des équipollences à la résolution d'un problème de géométrie élémentaire

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 66-73

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__66_1>

APPLICATION DU CALCUL DES ÉQUIPOLLENCES A LA RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE;

PAR ÉMILE FRANÇOISE,

Professeur au lycée de Toulon.

I.

Construire un polygone, connaissant les sommets des triangles semblables à un triangle donné construits sur ses côtés.

Soient A', B', C',..., H' les points donnés; A, B, C,..., H les sommets du polygone que l'on se propose de construire. Connaissant la forme du triangle $AA'B$, $BB'C$,..., on connaît les rapports égaux

$$(1) \qquad \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'A}} = \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'B}} = \ldots = \frac{\overline{H'A}}{\overline{H'H}} = ni^{\alpha}.$$

La considération des triangles $A'BB'$, $B'CC'$,..., $H'AA'$ nous donne la série des équipollences

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{lllll} ni^{\alpha}\overline{A'A} - \overline{B'B} & & & = \overline{A'B'}, \\ & ni^{\alpha}\overline{B'B} - \overline{C'C} & & = \overline{B'C'}, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ -\overline{A'A} & & + ni^{\alpha}\overline{H'H} & = \overline{H'A'}. \end{array} \right.$$

En résolvant ce système d'équipollences comme un système d'équations du premier degré, on obtient

$$\begin{vmatrix} ni^{\alpha} & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & ni^{\alpha} & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & ni^{\alpha} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & 0 & 0 & \ldots & ni^{\alpha} \end{vmatrix} \overline{A'A} = \begin{vmatrix} \overline{A'B'} & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ \overline{B'C'} & ni^{\alpha} & -1 & \ldots & 0 \\ \overline{C'D'} & 0 & ni^{\alpha} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \overline{H'A} & 0 & 0 & \ldots & ni^{\alpha} \end{vmatrix}$$

ou bien, k désignant le nombre des côtés du polygone cherché,

$$(3) \quad \overline{A'A} = \frac{n^{k-1} i^{(k-1)\alpha}\, \overline{A'B'} + n^{k-2} i^{(k-2)\alpha}\, \overline{B'C'} + \ldots + \overline{H'A'}}{n^k i^{k\alpha} - 1},$$

construction géométrique. Soient (*)

$$\overline{OM} = 1 \quad \text{et} \quad \overline{ON} = ni^{\alpha}.$$

Le triangle NOM est semblable au triangle BA'A. Sur la direction de OM je prends

$$\text{gr.}\,OM' = \text{gr.}\,ON,$$

et par le point M' je mène M'N' parallèle à MN. Je construis une droite faisant avec OM un angle double de $\widehat{NOM}$, et je décris du point O comme centre, avec gr.ON' comme rayon, un arc de cercle qui coupe en N_1 le côté de cet angle

$$\overline{ON_1} = n^2 i^{2\alpha};$$

je construis de la même manière la droite

$$\overline{ON_2} = n^3 i^{3\alpha},$$

$$\ldots\ldots\ldots,$$

$$\overline{ON_{k-2}} = n^{k-1} i^{(k-1)\alpha},$$

$$\overline{ON_{k-1}} = n^k i^{k\alpha},$$

D'ailleurs

$$\overline{MN_{k-1}} = n^k i^{k\alpha} - 1.$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Cela posé, sur $A'B'$, considéré comme côté homologue de $\overline{OM}$, je construis un triangle semblable au triangle OMN_{k-2}, sur $\overline{B'C'}$ un triangle $B'C'B_1$ semblable à $OMN_{k-3}, \ldots$.

La somme

$$\overline{PQ} = \overline{A'A_1} + \overline{B'B_1} + \ldots + \overline{H'A'}$$

représente le numérateur de l'expression de $A'A$.

L'équipollence

$$\frac{\overline{A'A}}{1} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{MN_{k-1}}}$$

montre que $\overline{A'A}$ est une quatrième proportionnelle aux trois lignes $\overline{OM}$ ou 1, et $\overline{MN}_{k-1}$.

Le point A une fois déterminé, on achève sans difficulté la construction du polygone.

II.

Discussion. — *Lorsque n est différent de l'unité, c'est-à-dire lorsque les triangles* $AA'B$, $BB'C, \ldots$ *ne sont pas des triangles isoscèles ayant pour bases les côtés du polygone* $ABCD\ldots H$, *le dénominateur de l'expression* (3) *est différent de zéro. Quel que soit le polygone* $A'B'C'\ldots H$, *le problème est possible et n'admet qu'une solution.*

Je suppose maintenant $n = 1$.

Dans cette hypothèse, le dénominateur du second membre de l'équipollence (3) devient

$$(i^{k\alpha} - 1) = (i^{\alpha} - 1)\left(i^{\alpha} - e^{\frac{2\pi i}{k}}\right)\left(i^{\alpha} - e^{\frac{4\pi i}{k}}\right)\cdots\left(i^{\alpha} - e^{\frac{2(k-1)\pi i}{k}}\right),$$

ou

$$(i^{k\alpha} - 1) = \left(e^{\frac{\pi\alpha i}{2}} - 1\right)\left(e^{\frac{\pi\alpha i}{2}} - e^{\frac{2\pi i}{k}}\right)\cdots\left(e^{\frac{\pi\alpha i}{2}} - e^{\frac{2(k-1)\pi i}{k}}\right).$$

Le numérateur

$$i^{(k-1)\alpha}\overline{A'B'} + i^{(k-2)\alpha}\overline{B'C'} + \ldots + \overline{H'A'}$$

peut, à cause de la relation

$$\overline{A'B'} + \overline{B'C'} + \ldots + \overline{H'A'} = 0,$$

être mis sous la forme

$$\overline{A'B'}\,(i^{(k-1)\alpha} - 1) + B'C'\,(i^{(k-2)\alpha n} - 1) + \ldots = 0.$$

Il est divisible par $i^\alpha - 1$.

Pour $\alpha = 0$, *c'est-à-dire quand l'angle au sommet des triangles semblables* A A'B, B B'C, . . . , *ou, ce qui revient au même, l'angle* NOM *est nul, le problème est déterminé.*

L'équipollence

$$A'A = A'B$$

montre *que le polygone* ABCD...H *se réduit à un point.*

Lorsque α prend l'une des valeurs

$$(4)\qquad \frac{4}{k},\quad \frac{8}{k},\quad \frac{12}{k},\ldots,\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{4}{k}\,\dfrac{k-1}{2} \text{ si } k \text{ est impair,} \\ \text{ou} \\ \dfrac{4}{k}\,\dfrac{k}{2} \text{ si } k \text{ est pair,} \end{array}\right.$$

c'est-à-dire *lorsque l'angle au sommet des triangles isoscèles est un multiple de l'angle au centre, l'expression de* A'B' *est nulle. Le problème est en général impossible.*

Toutefois, si l'équipollence

$$(5)\qquad i^{(k-1)\alpha}\overline{A'B'} + i^{(k-2)\alpha}\overline{B'C'} + \ldots + H'A' = 0$$

est satisfaite par l'une des valeurs de α *comprise dans la suite* (4), *le problème est indéterminé pour cette valeur de* α.

Lorsque k est un nombre pair, la dernière des valeurs (4) de α est égale à $\frac{4}{k}\,\frac{k}{2} = 2$. La valeur correspondante de l'angle $AA'B$ est de deux droits. En d'autres termes, le point A' est le milieu du côté AB. Il résulte de là que les sommets d'un polygone $A'B'C'\ldots H'$ d'un nombre pair de côtés ne sont pas en général les milieux des côtés d'un autre polygone $ABC\ldots H$ d'un même nombre de côtés.

Pour que ce second polygone existe, il faut que les côtés du premier satisfassent à l'équipollence

$$(6)\qquad \overline{A'B'} - \overline{B'C'} + \overline{C'D'} - \ldots - \overline{H'A'} = 0.$$

Le polygone $ABC\ldots$ est alors indéterminé.

En combinant l'équipollence (6) avec la suivante

$$(7)\qquad \overline{A'B'} + \overline{B'C'} + \overline{C'D'} + \ldots + \overline{H'A'} = 0,$$

on obtient

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{A'B'} + \overline{C'D'} + \ldots = 0, \\ \overline{B'C'} + \overline{D'E'} + \ldots = 0. \end{array}\right.$$

Ces deux dernières équipollences expriment *que les côtés de rang impair du polygone* $A'B'C'\ldots H'$ *sont équipollents aux côtés d'un polygone formé de* $\frac{k}{2}$ *côtés, et qu'il en est de même des côtés de rang pair.*

Si les points A', B', C', D' sont au nombre de quatre seulement, les équipollences (8) se réduisent aux deux suivantes :

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{l} \overline{A'B'} + \overline{C'D'} = 0, \\ \overline{B'C'} + \overline{D'A'} = 0. \end{array}\right.$$

Ces deux équipollences expriment que le quadrilatère $A'B'C'D'$ est un parallélogramme : ce qui est connu.

III.

Du triangle. — L'angle au centre du triangle est égal à 120 degrés.

D'après l'analyse précédente, si l'on construit sur les côtés d'un triangle quelconque ABC des triangles isoscèles semblables, $AA'B$, $BB'C$, $CC'A$ ayant leur angle au sommet égal à 120 degrés, il existe entre les positions des points A', B', C' une relation que je vais déterminer.

Dans ce cas particulier, l'équipollence (5) se réduit à

$$i^{\frac{8}{3}}\,\overline{A'B'} + i^{\frac{4}{3}}\,\overline{B'C'} + \overline{C'A'} = 0$$

Or,

$$i^{\frac{4}{3}} = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$i^{\frac{8}{3}} = \cos 240^\circ + i \sin 240^\circ = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

En substituant dans l'équipollence précédente, on obtient

$$(10)\qquad -\left(\overline{A'B'} + \overline{B'C'}\right) + \frac{i\sqrt{3}}{2}\left(\overline{A'B'} - \overline{B'C'}\right) + \overline{C'A'} = 0,$$

ou bien, en tenant compte de l'équipollence

$$\overline{A'B'} + \overline{B'C'} + \overline{C'A'} = 0,$$

$$-\frac{3}{2}\,C'A' + \frac{i\sqrt{3}}{2}\,(A'B' - B'C') = 0,$$

ou enfin

$$(11)\qquad \frac{B'C' - A'B'}{C'A'} = i\sqrt{3}.$$

Pour interpréter cette dernière équipollence, je prolonge la droite $\overline{A'B'}$ d'une longueur B'D' égale à elle-même. Je joins $\overline{DC'}$:

$$\overline{DC'} \simeq \overline{B'C'} + \overline{DB'} \simeq \overline{B'C'} - \overline{A'B'}.$$

L'équipollence (11) exprime que les deux droites $\overline{A'C'}$ et $\overline{DC'}$ sont perpendiculaires entre elles, et, en outre, que

$$\frac{\text{gr.}\,C'D}{\text{gr.}\,A'B'} = \sqrt{3}.$$

L'angle A' du triangle rectangle A'C'D est égal à 60 degrés ; et comme le point B' est le milieu de l'hypoténuse, le triangle A'B'C' est équilatéral. Donc :

Si sur les trois côtés d'un triangle quelconque ABC *on construit trois triangles isoscèles semblables* AA'B, BB'C, CC'A *tous les trois extérieurs ou tous les trois intérieurs au triangle* ABC, *et ayant leurs angles au sommet égaux à* 120 *degrés, le triangle* A'B'C' *est équilatéral.*

Réciproquement, *soient un triangle équilatéral* A'B'C' *et un point quelconque* A. *On joint* AA', *et sur cette ligne comme côté on construit un triangle isoscèle* AA'B *dont l'angle en* A' *est de* 120 *degrés. Sur* BB' *on construit un triangle semblable* BB'C. *On joint* AC ; *le triangle* CC'A *est un triangle isoscèle dont l'angle en* C' *est égal à* 120 *degrés.*

Du quadrilatère. — L'angle au centre du carré est égal à 90 degrés.

Il y a impossibilité ou indétermination lorsque les points A', B', C', D' sont les sommets de triangles isoscèles rectangles, ou bien les milieux des côtés du quadrilatère ABCD.

Dans ce dernier cas, si le quadrilatère A'B'C'D' est un parallélogramme, le quadrilatère ABCD est indéterminé.

Lorsque les points A', B', C', D' sont les sommets de triangles isoscèles, les quatre côtés du quadralatère $A'B'C'D'$ doivent, pour que le quadrilatère ABCD existe, satisfaire à l'équipollence (5), qui se réduit à

$$-i\,\overline{A'B'} - \overline{B'C'} + i\,\overline{C'D'} + \overline{D'A'} \mathrel{\underline{\frown}} 0,$$

ou

$$(12) \qquad \overline{A'B'} - \overline{C'D'} \mathrel{\underline{\frown}} i\left(\overline{B'C'} - \overline{D'A'}\right).$$

Cette dernière équipollence exprime que *la différence entre deux côtés opposés du quadrilatère* $A'B'C'D'$ *est égale en valeur absolue et perpendiculaire à la différence des deux autres.*