Laguerre

Sur une formule relative aux courbes tracées sur les surfaces du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 5-12

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__5_0>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

SUR UNE FORMULE RELATIVE AUX COURBES TRACÉES SUR LES SURFACES DU SECOND ORDRE;

PAR M. LAGUERRE.

1. J'ai énoncé, comme exercice, dans les *Nouvelles Annales*, la proposition suivante : *Étant donnés deux points quelconques* A *et* B *d'une surface du second ordre, si en ces points on mène les normales à la surface, et si l'on désigne par* a *et* b *les points où ces normales coupent un plan de symétrie quelconque de la surface, le plan mené par le milieu de la corde* AB *et perpendiculairement à cette corde passe par le milieu du segment* ab.

La même propriété peut s'énoncer ainsi : *Les projections des normales* Aa *et* Bb *sur la corde* AB *sont égales et de signes contraires.*

D'où la proposition suivante :

Soient deux points A *et* A′ *situés sur une surface du second ordre; désignons par* N *et* N′ *les longueurs des normales en ces deux points, c'est-à-dire les longueurs des segments compris sur chaque normale entre la sur-*

face et un de ses plans de symétrie, par V *et* V′ *les angles que font respectivement les directions de ces normales avec la direction de la corde* AA′; *on a, quelle que soit la position de ces deux points sur la surface, la relation*

$$\text{(1)}\qquad \frac{N'}{N} = -\frac{\cos V}{\cos V'}.$$

2. Imaginons maintenant une courbe quelconque C tracée sur une surface du second ordre, et soient M et M′ deux points infiniment voisins de cette courbe; la relation précédente aura lieu pour ces deux points. N désignant la normale au point M, $N + dN$ sera la normale au point M′. Il s'agit maintenant d'évaluer le rapport des deux cosinus $\cos V$ et $\cos V'$.

A cet effet, je me servirai des désignations et des formules employées par M. Serret dans sa Note *sur les lignes de courbure des surfaces* insérée dans le *Traité de calcul différentiel* de Lacroix (p. 298).

Désignons par α, β, γ les angles que forme, avec trois axes rectangulaires, la tangente à la courbe au point M, dont les coordonnées sont x, y, z; par ξ, υ, ζ et λ, μ, ν les angles formés avec les mêmes axes par la normale principale et par l'axe du plan osculateur. Soient aussi $d\varepsilon$ et $d\eta$ les angles de contingence et de torsion.

Désignons par α', β', γ' les angles formés avec les axes par la normale à la surface du second ordre au point (x, y, z). On peut toujours assigner une ligne à double courbure C′ qui corresponde point par point à la courbe C, de telle sorte que la tangente en un point de cette courbe soit parallèle à la normale menée à la surface du second ordre par le point correspondant de la courbe C. Soient ξ', υ', ζ' et λ', μ', ν' les angles que font avec les axes la normale principale et l'axe du plan osculateur de cette courbe; soient, de plus, $d\varepsilon'$ et $d\eta'$ les angles de contingence et de torsion.

Cela posé, on peut écrire les trois groupes suivants de formules, par lesquelles les angles ω et ϖ se trouvent complétement définis :

$$
(\mathrm{A})\left\{
\begin{array}{l}
\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0,\\
\cos\alpha\cos\xi' + \cos\beta\cos\eta' + \cos\gamma\cos\zeta' = \sin\omega,\\
\cos\alpha\cos\lambda' + \cos\beta\cos\mu' + \cos\gamma\cos\nu' = \cos\omega,\\
\cos\xi\cos\alpha' + \cos\upsilon\cos\beta' + \cos\zeta\cos\gamma' = -\sin\varpi,\\
\cos\xi\cos\xi' + \cos\upsilon\cos\upsilon' + \cos\zeta\cos\zeta' = -\cos\varpi\cos\omega,\\
\cos\xi\cos\lambda' + \cos\upsilon\cos\mu' + \cos\zeta\cos\nu' = \cos\varpi\sin\omega,\\
\cos\lambda\cos\alpha' + \cos\mu\cos\beta' + \cos\nu\cos\gamma' = \cos\varpi,\\
\cos\lambda\cos\xi' + \cos\mu\cos\upsilon' + \cos\nu\cos\zeta' = -\sin\varpi\cos\omega,\\
\cos\lambda\cos\lambda' + \cos\mu\cos\mu' + \cos\nu\cos\nu' = \sin\varpi\sin\omega.
\end{array}
\right.
$$

La différentiation de ces équations conduit aux trois suivantes :

$$\sin\omega\, d\varepsilon' = \sin\varpi\, d\varepsilon, \tag{2}$$

$$d\eta' + d\omega = -\cos\varpi\, d\varepsilon, \tag{3}$$

$$d\varpi = d\eta + \cos\omega\, d\varepsilon'. \tag{4}$$

3. Pour évaluer $\cos V$ et $\cos V'$, je remarque que, les cosinus des angles que fait la normale au point M avec les axes étant respectivement $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$, le cosinus de l'angle que fait la normale au point M' avec l'axe des x est

$$\cos\alpha' + d\cos\alpha' + \tfrac{1}{2}\, d^2\cos\alpha',$$

expression qui, en prenant l'arc de la courbe pour variable indépendante et en employant les formules données par M. Serret (Lacroix, p. 284 et suivantes), devient

$$\cos\alpha' + \cos\xi' d\varepsilon' + \tfrac{1}{2}\left(\cos\xi' d^2\varepsilon' - \cos\alpha' d\varepsilon'^2 - \cos\lambda' d\varepsilon' d\eta'\right).$$

Les cosinus des angles que fait cette normale avec les deux autres axes auraient une forme semblable: il est inutile de les écrire.

Cherchons maintenant les cosinus des angles que fait avec les axes la corde MM'; il suffit évidemment de trouver des quantités proportionnelles à ces cosinus. On pourra donc, au lieu de ces cosinus, employer les projections de la corde MM' sur les trois axes, ou bien δx, δy et δz : $x + \delta x, y + \delta y$ et $z + \delta z$ désignant les coordonnées du point M'.

La formule de Taylor donne, en se bornant aux premiers termes,

$$\delta x = \left(\frac{dx}{ds}\right) ds + \tfrac{1}{2}\, d\left(\frac{dx}{ds}\right) ds + \tfrac{1}{6}\, d^2\left(\frac{dx}{ds}\right) ds;$$

or $\dfrac{dx}{ds} = \cos\alpha$: on pourra donc prendre, pour le cosinus de l'angle que fait avec l'axe des x la corde MM', l'expression

$$\cos\alpha + \tfrac{1}{2}\, d\cos\alpha + \tfrac{1}{6}\, d^2(\cos\alpha),$$

expression qui, au moyen des formules de M. Serret, devient

$$\cos\alpha + \tfrac{1}{2}\cos\xi\, d\varepsilon + \tfrac{1}{6}\left(\cos\xi\, d^2\varepsilon - \cos\alpha\, d\varepsilon^2 - \cos\lambda\, d\varepsilon\, d\eta\right).$$

Les deux autres cosinus auraient une forme semblable; il est inutile d'en donner la valeur.

Ceci posé, la formule connue qui donne le cosinus de l'angle de deux droites fournit immédiatement, en employant les relations (A), les deux expressions suivantes :

$$(5)\qquad \cos V = -\tfrac{1}{2}\sin\varpi\, d\varepsilon - \tfrac{1}{6}\sin\varpi\, d^2\varepsilon - \tfrac{1}{6}\cos\varpi\, d\varepsilon\, d\eta,$$

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos V' = &-\tfrac{1}{2}\sin\varpi\, d\varepsilon - \tfrac{1}{6}\sin\varpi\, d^2\varepsilon - \tfrac{1}{6}\cos\varpi\, d\varepsilon\, d\eta + \sin\omega\, d\varepsilon' \\ &- \tfrac{1}{2}\cos\varpi\cos\omega\, d\varepsilon\, d\varepsilon' + \tfrac{1}{2}\sin\omega\, d^2\varepsilon' - \tfrac{1}{2}\cos\omega\, d\varepsilon'\, d\eta'. \end{aligned}\right.$$

Cette dernière expression peut se simplifier; on a, en effet, d'après l'équation (2),

$$\sin\omega\, d\varepsilon' = \sin\varpi\, d\varepsilon;$$

en outre, en différentiant cette dernière relation, on obtient

$$\sin\omega\, d^2\varepsilon' = d(\sin\varpi\, d\varepsilon) - \cos\omega\, d\varepsilon' d\omega,$$

ou bien, comme d'après l'équation (3)

$$d\omega = -d\eta' - \cos\varpi\, d\varepsilon,$$

$$\sin\omega\, d^2\varepsilon' = d(\sin\varpi\, d\varepsilon) + \cos\omega\, d\varepsilon' d\eta' + \cos\omega \cos\varpi\, d\varepsilon\, d\varepsilon';$$

en portant ces valeurs de $\sin\omega\, d\varepsilon'$ et de $\sin\omega\, d^2\varepsilon'$ dans l'équation (6), il viendra, toutes réductions faites,

$$(7)\quad \cos V' = \tfrac{1}{2}\sin\varpi\, d\varepsilon - \tfrac{1}{6}\sin\varpi\, d^2\varepsilon - \tfrac{1}{6}\cos\varpi\, d\varepsilon\, d\eta + \tfrac{1}{2}d(\sin\varpi\, d\varepsilon).$$

L'équation (1) devient donc, en multipliant les deux termes du second membre par 2,

$$1 + \frac{dN}{N} = -\frac{-\sin\varpi\, d\varepsilon - \frac{1}{3}\sin\varpi\, d^2\varepsilon - \frac{1}{3}\cos\varpi\, d\varepsilon\, d\eta}{\sin\varpi\, d\varepsilon - \frac{1}{3}\sin\varpi\, d^2\varepsilon - \frac{1}{3}\cos\varpi\, d\varepsilon\, d\eta + d(\sin\varpi\, d\varepsilon)};$$

d'où, en réduisant,

$$\frac{dN}{N} = \frac{\frac{2}{3}\sin\varpi\, d^2\varepsilon + \frac{2}{3}\cos\varpi\, d\varepsilon\, d\eta - d(\sin\varpi\, d\varepsilon)}{\sin\varpi\, d\varepsilon};$$

ou bien encore

$$\frac{dN}{N} = \frac{2}{3}\frac{d^2\varepsilon}{d\varepsilon} - \frac{d(\sin\varpi\, d\varepsilon)}{\sin\varpi\, d\varepsilon} + \frac{2}{3}\frac{d\eta}{\operatorname{tang}\varpi}.$$

Remarquons maintenant que $d\varepsilon = \dfrac{ds}{\rho}$, ρ étant le rayon de courbure de la courbe C, et que l'arc est la variable indépendante; par conséquent, on a $d^2\varepsilon = ds\, d\left(\dfrac{1}{\rho}\right)$.

La relation précédente devient donc

$$\frac{dN}{N} = \frac{2}{3}\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\left(\frac{1}{\rho}\right)} - \frac{d\left(\frac{\sin\varpi}{\rho}\right)}{\frac{\sin\varpi}{\rho}} + \frac{2}{3}\frac{d\eta}{\tang\varpi};$$

d'où, en intégrant,

$$\log N = \tfrac{2}{3}\log\frac{1}{\rho} - \log\frac{\sin\varpi}{\rho} + \tfrac{2}{3}\int\frac{d\eta}{\tang\varpi};$$

et, en passant des logarithmes aux nombres, après avoir chassé le dénominateur 3,

$$\frac{N^3}{\rho}\sin\varpi^3 = e^{2\int\frac{d\eta}{\tang\varpi}} \times \text{const.}$$

D'où l'on déduit la proposition suivante, en remarquant que ϖ désigne le complément de l'angle que fait avec la normale à la surface la normale principale de la courbe C :

Théorème. — *Étant donnée une courbe quelconque tracée sur une surface du second ordre, désignons, en un point quelconque de cette courbe, l'angle de torsion par $d\eta$ et par ϖ le complément de l'angle que fait en ce point, avec la normale à la surface, la normale principale; cela posé, si l'on considère un arc de la courbe compris entre les points A_0 et A_1, et si l'on désigne respectivement par N_0 et N_1, ρ_0 et ρ_1, ϖ_0 et ϖ_1 les valeurs de la normale, du rayon de courbure de la courbe et de l'angle ϖ aux points extrêmes de l'arc, on a la relation suivante :*

$$\text{(8)} \qquad \frac{N_1^3}{\rho_1^3}\sin\varpi_1^3 : \frac{N_0^3\sin\varpi_0^3}{\rho_0} = e^{2\int\frac{d\eta}{\tang\varpi}},$$

l'intégrale contenue dans le second membre s'étendant le long de la courbe du point A_0 au point A_1.

4. La formule précédente fournit aisément les relations connues pour les lignes géodésiques et les lignes de courbure des surfaces du second ordre.

Considérons d'abord une ligne géodésique ; d'après la définition de cette ligne, on a pour tous ses points $\sin\varpi = 1$ et $\operatorname{tang}\varpi = \infty$; l'intégrale contenue dans le second membre de l'équation (8) est donc nulle, et il vient simplement

$$\frac{N_1^3}{\rho_1} : \frac{N_0^3}{\rho_0} = 1;$$

d'où cette proposition :

Le long d'une même ligne géodésique tracée sur une surface du second ordre, le rayon de courbure de la courbe est proportionnel au cube de la normale.

C'est le théorème de Joachimsthal.

5. Supposons maintenant que C soit une des lignes de courbure de la surface ; alors, d'après le théorème de Lancret, on a

$$d\eta = d\varpi;$$

l'intégrale contenue dans le second membre de l'équation (8) devient alors

$$\int \frac{d\varpi}{\operatorname{tang}\varpi} = \log\sin\varpi_1 - \log\sin\varpi_0,$$

le second membre de cette équation devient

$$e^{2(\log\sin\varpi_1 - \log\sin\varpi_0)} = \frac{\sin\varpi_1^2}{\sin\varpi_0^2},$$

et la formule (8) donne alors

$$\frac{N_1^3\sin\varpi_1}{\rho_1} : \frac{N_0^3\sin\varpi_3}{\rho_0} = 1;$$

d'où l'on conclut que le long de la courbe $\frac{N^3 \sin \varpi}{\rho}$ conserve une valeur constante. Remarquons maintenant que, d'après le théorème de Meusnier, $\frac{\sin \varpi}{\rho}$ est égal à $\frac{1}{r}$, r désignant le rayon de courbure de la section normale tangente à C; le long d'une même ligne de courbure $\frac{N^3}{r}$ conserve donc la même valeur.

D'où cette proposition, due à M. Dupin :

Le long d'une même ligne de courbure, le rayon de courbure de la section normale tangente à la courbe varie proportionnellement au cube de la normale.

6.. Si j'avais voulu me restreindre au cas des lignes géodésiques et des lignes de courbure, il eût été très-facile de remplacer les considérations analytiques qui précèdent par des considérations géométriques très-simples et très-élémentaires qui eussent conduit immédiatement aux théorèmes de Joachimsthal et de M. Dupin. Je laisse ce soin au lecteur; mon seul but, dans cette Note, était d'établir la formule générale (8), sur laquelle j'aurai plus tard l'occasion de revenir, tant pour en montrer l'application à la géométrie des surfaces du second ordre que pour montrer comment elle s'étend aux surfaces de degré supérieur.