Solutions des questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 554-563
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__554_1>

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 841

(voir 2e série, t. VII, p. 44);

PAR M. H. BROCARD.

La forme d'équilibre d'un fil pesant dont la densité varie en raison inverse du carré de la longueur est une *chaînette ordinaire, inclinée de manière que sa tangente soit verticale à l'origine des densités.*

Si cette origine recule indéfiniment sur la courbe, le fil devient homogène et l'axe de la chaînette se replace verticalement. On retrouve ainsi le cas ordinaire.

(HATON DE LA GOUPILLIÈRE.)

Considérons un élément infiniment petit NN′ du fil; il est soumis à son poids et à deux actions dirigées suivant les tangentes aux points N et N′, et qui sont les tensions du fil en ces points.

Soit ds la longueur de cet élément; exprimons que les forces qui lui sont appliquées se feraient encore équilibre si on les transportait en un point quelconque de l'espace.

Soit T la tension au point N. Les projections de cette force sur les axes supposés rectangulaires seront

$$-\mathrm{T}\frac{dx}{ds}, \quad -\mathrm{T}\frac{dy}{ds};$$

les projections de la tension au point N′ infiniment voisin seront ces mêmes quantités prises en signe contraire, et augmentées de leurs différentielles, c'est-à-dire

$$\mathrm{T}\frac{dx}{ds} + d\left(\mathrm{T}\frac{dx}{ds}\right), \quad \mathrm{T}\frac{dy}{ds} + d\left(\mathrm{T}\frac{dy}{ds}\right).$$

Enfin la pesanteur exerce une action $-\frac{\alpha}{s^2}\,ds$, verticale et dont la projection horizontale est nulle.

En égalant à zéro la somme des projections horizontales et verticales, il vient

$$d\left(\mathrm{T}\frac{dx}{ds}\right) = 0,$$

$$d\left(\mathrm{T}\frac{dy}{ds}\right) = \frac{\alpha}{s^2}\,ds.$$

Ce sont les équations différentielles de la courbe en fonction des tensions inconnues. En intégrant, on a

$$\mathrm{T}\frac{dx}{ds}=c,$$

$$\mathrm{T}\frac{dy}{ds}=-\frac{\alpha}{s}+cb;$$

et, en éliminant T par division membre à membre, il vient

$$p=\frac{dy}{dx}=-\frac{\alpha}{cs}+b,$$

ou, en posant $\frac{\alpha}{c}=a$,

$$p=-\frac{a}{s}+b.$$

Telle est l'équation différentielle de la courbe. On voit que $p=\infty$ au point $s=0$, c'est-à-dire à l'origine des densités.

Il faut maintenant prouver que cette équation appartient à la chaînette ordinaire.

A cet effet, nous allons montrer que ces deux courbes jouissent des mêmes propriétés. On sait que, dans une chaînette (*Cours de Mécanique* de Sturm, t. II, p. 51), le rayon de courbure en un point M est égal à la normale MN et que la ligne projetante PI du pied de l'ordonnée MP sur la tangente MT est constante. Or, ici, on a pour la valeur du rayon de courbure l'expression

$$\mathrm{R}=\frac{s^2+(bs-a)^2}{a}.$$

Pour $s=0$, $\mathrm{R}=a$. Au sommet B de la courbe, le rayon de courbure est minimum. En ce point, on a donc

$$s'=\operatorname{arc}\mathrm{MB}=\frac{ab}{1+b^2};$$

alors

$$R = \frac{a}{1 + b^2},$$

et le coefficient angulaire de la tangente est

$$p = -\frac{a}{s'} + b = -\frac{1}{b}.$$

Ainsi l'inclinaison de l'axe est b.

L'équation de PI est

$$y = -s' = -\frac{ab}{1 + b^2},$$

celle de MP est

$$y = bx;$$

donc

$$PI = -\frac{a}{1 + b^2} = -OB,$$

propriété de la chaînette.

D'autre part, en faisant $s = 2s'$, on a

$$R = \frac{4a^2b^2 + a^2(b^4 - 2b^2 + 1)}{(1 + b^2)^2 a} = a,$$

même valeur qu'au point M.

La droite PO a pour équation

$$y + \frac{ab}{1 + b^2} = -\frac{1}{b}\left(x + \frac{a}{1 + b^2}\right),$$

ou

$$y = -\frac{1}{b}(x + a).$$

Elle coupe l'horizontale du point M au point symétrique du centre de courbure en M. La courbe est donc bien une chaînette ayant pour axe de symétrie la droite OB. Si on la rapporte aux axes OB, OP, cette chaînette aura pour équation

$$y = \frac{a}{2(1 + b^2)}\left[e^{\frac{x(1+b^2)}{a}} + e^{-\frac{x(1+b^2)}{a}}\right].$$

Si l'on pose

$$\frac{a}{1+b^2}=m,$$

on aura

$$p=\frac{s}{m},$$

$$\mathrm{PI}=y\,\frac{dx}{ds}=m,$$

$$s=\mathrm{MI}=\sqrt{y^2-m^2},$$

$$\mathrm{R}=\frac{y^2}{m},$$

$$\text{aire OBMP}=m\sqrt{y^2-m^2}=2\times\text{triangle PMI}.$$

Ces calculs de vérification sont en réalité un moyen détourné d'arriver à mettre l'équation différentielle de la courbe

$$p=-\frac{a}{s}+b$$

sous une forme commode pour l'intégration. Si l'on désigne, en effet, par p_1 et s_1 ce que deviennent les quantités p et s lorsque l'origine M est transportée en B et que les axes sont devenus BOP, on voit, en faisant la figure, que

$$s_1=s-\mathrm{BM}=s-mb$$

et que

$$b=\frac{1+pp_1}{-p+p_1},$$

qui donne

$$p=-\left(\frac{1-p_1 b}{b+p_1}\right).$$

L'équation

$$p=\frac{-a}{s}+b$$

devient donc

$$-\left(\frac{1-p_1 b}{b+p_1}\right)=\frac{-a}{s_1+mb}+b,$$

et l'on en tire

$$p_1 = \frac{b^2(s_1 + mb) - ab + s_1 + mb}{a + b(s_1 + mb) - b(s_1 + mb)} = (s_1 + mb)\frac{(1 + b^2)}{a} - b,$$

ou, en remplaçant m par $\frac{a}{1 + b^2}$, il reste simplement

$$p_1 \frac{s_1}{m},$$

propriété caractéristique de la chaînette. Ainsi la question se trouve résolue, grâce à la transformation de coordonnées. La seconde partie de l'énoncé est une conséquence immédiate de la première.

Question 873

(voir 2e série, t VII, p 237),

PAR M. PAUL ENDRÈS,

Elève au lycee de Douai.

Si, par un point O, *on mène trois lignes respectivement parallèles aux côtés d'un triangle donné, les six points de rencontre de ces lignes avec les côtés sont sur une conique. Trouver son équation.*

(S. ROBERTS, *The Educational Times.*)

Il résultera de la réciproque de l'*hexagramme de Pascal* que les six points D, E, F, G, H, K seront sur une conique, si les points de rencontre L, M, N des côtés opposés de l'hexagone qu'ils forment sont sur une droite.

Or on a, par suite du théorème des transversales,

$$\frac{MC}{MA}\frac{DA}{DB}\frac{KB}{KC} = 1,$$

$$\frac{NA}{NB}\frac{HB}{HC}\frac{GC}{GA} = 1,$$

$$\frac{LB}{LC}\frac{FC}{FA}\frac{EA}{EB} = 1;$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$\frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{MA}}\,\frac{\mathrm{NA}}{\mathrm{NB}}\,\frac{\mathrm{LB}}{\mathrm{LC}} = 1;$$

donc L, M, N sont sur une droite.

Cherchons l'équation de la conique.

Prenons ABC pour triangle de référence. Soient α, β, γ les distances du point O aux trois côtés, et h, h_1, h_2 les hauteurs du triangle; de plus, pour abréger l'écriture, posons

$$h - \alpha = m, \quad h_1 - \beta = p, \quad h_2 - \gamma = q.$$

Les coordonnées des six points en fonction des données sont

$$\begin{array}{llll}
\mathrm{D} & \mathrm{X} = x, & \mathrm{Y} = m\dfrac{h_1}{h}, & \mathrm{Z} = 0, \\[2ex]
\mathrm{E} & \mathrm{X} = \alpha, & \mathrm{Y} = 0, & \mathrm{Z} = m\dfrac{h_2}{h}, \\[2ex]
\mathrm{F} & \mathrm{X} = p\dfrac{h}{h_1}, & \mathrm{Y} = \beta, & \mathrm{Z} = 0, \\[2ex]
\mathrm{G} & \mathrm{X} = 0, & \mathrm{Y} = \beta, & \mathrm{Z} = p\dfrac{h_2}{h_1}, \\[2ex]
\mathrm{H} & \mathrm{X} = q\dfrac{h}{h_2}, & \mathrm{Y} = 0, & \mathrm{Z} = \gamma, \\[2ex]
\mathrm{K} & \mathrm{X} = 0, & \mathrm{Y} = q\dfrac{h_1}{h_2}, & \mathrm{Z} = \gamma.
\end{array}$$

Exprimons que ces points sont sur la conique

$$a\mathrm{X}^2 + a_1\mathrm{Y}^2 + a_2\mathrm{Z}^2 + 2b\mathrm{YZ} + 2b_1\mathrm{ZX} + 2b_2\mathrm{XY} = 0;$$

nous obtiendrons les six équations

$$\begin{aligned}
&a\alpha^2h^2 + a_1m^2h_1^2 + 2b_2m\alpha hh_1 = 0,\\
&a\alpha^2h^2 + a_2m^2h_2^2 + 2b_1m\alpha hh_2 = 0,\\
&a_1\beta^2h_1^2 + ap^2h^2 + 2b_2p\beta hh_1 = 0,\\
&a_1\beta^2h_1^2 + a_2p^2h_2^2 + 2bp\beta h_1h_2 = 0,\\
&a_2\gamma^2h_2^2 + aq^2h^2 + 2b_1q\gamma hh_2 = 0,\\
&a_2\gamma^2h_2^2 + a_1q^2h_1^2 + 2bq\gamma h_1h_2 = 0,
\end{aligned}$$

qui donnent les rapports des coefficients à l'un d'entre eux. On a ainsi

$$\frac{a}{a_2} = \frac{h_2^2 m\gamma}{h^2 q\alpha}, \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{h_2^2 p\gamma}{h_1^2 q\beta},$$

$$\frac{2b}{a_2} = -\frac{h_2}{h_1}\left(\frac{p}{\beta} + \frac{\gamma}{q}\right),$$

$$\frac{2b_1}{a_2} = -\frac{h_2}{h}\left(\frac{m}{\alpha} + \frac{\gamma}{q}\right),$$

$$\frac{2b_2}{a_2} = -\frac{h_2^2}{hh_1}\frac{\gamma}{q}\left(1 + \frac{mp}{\alpha\beta}\right).$$

Par suite, l'équation cherchée est

$$\begin{aligned} m\beta\gamma h_1^2 h_2^2 X^2 + p\gamma\alpha h_2^2 h^2 Y^2 + q\alpha\beta h^2 h_1^2 Z^2 & \\ - \alpha(\beta\gamma + pq) h^2 h_1 h_2 YZ & \\ - \beta(\gamma\alpha + qm) h_1^2 h_2 h ZX & \\ - \gamma(\alpha\beta + mp) h_2^2 h h_1 XY & = 0. \end{aligned}$$

Note. — La même question a été résolue par M. Fr. Conradt, étudiant en Mathématiques, à Berlin.

Question 489

(voir 1re série, t. XVIII, p. 358);

PAR M. LUCIEN BIGNON, à Lima (Pérou).

Si, généralement, on désigne par $a_{i,n}$ l'expression

$$a_{i,n} = (\alpha_i + \beta_i n)\cos n\varphi + (\gamma_i + \delta_i n)\sin n\varphi,$$

où n représente un entier quelconque positif ou négatif, et α_i, β_i, γ_i, δ_i des constantes arbitraires indépendantes de n, le déterminant

$$\Delta_{k,n} = \begin{vmatrix} a_{0,n} & a_{0,n+1} & \ldots & a_{0,n+k} \\ a_{1,n} & a_{1,n+1} & \ldots & a_{0,n+k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k,n} & a_{k,n+k} & \ldots & a_{k,n+k} \end{vmatrix}$$

s'évanouit toutes les fois que $k > 3$, et pour $k = 3$, il conserve la même valeur, quelle que soit celle de n.

(T. A. HIRST.)

Nous avons

$$a_{i,n} = \alpha_i \cos n\varphi + \gamma_i \sin n\varphi + \beta_i n \cos n\varphi + \delta_i n \sin n\varphi.$$

Le déterminant $\Delta_{k,n}$ prendra donc la forme

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 \cos n\varphi + \gamma_0 \sin n\varphi + \beta_0 n \cos n\varphi + \delta_0 n \sin n\varphi; & \alpha_0 \cos(n+1)\varphi + \gamma_0 \sin(n+1)\varphi + \beta_0 (n+1)\cos(n+1)\varphi + \delta_0 (n+1)\sin(n+1)\varphi \ldots \\ \alpha_1 \cos n\varphi + \gamma_1 \sin n\varphi + \beta_1 n \cos n\varphi + \delta_1 n \sin n\varphi; & \alpha_1 \cos(n+1)\varphi + \gamma_1 \sin(n+1)\varphi + \beta_1 (n+1)\cos(n+1)\varphi + \delta_1 (n+1)\sin(n+1)\varphi \ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_k \cos n\varphi + \gamma_k \sin n\varphi + \beta_k n \cos n\varphi + \delta_k n \sin n\varphi; & \alpha_k \cos(n+1)\varphi + \gamma_k \sin(n+1)\varphi + \beta_k (n+1)\cos(n+1)\varphi + \delta_k (n+1)\sin(n+1)\varphi \ldots \end{vmatrix}.$$

Sous cette forme, on voit qu'on pourra décomposer ce déterminant en déterminants partiels, chacun desquels se ramènera au produit de plusieurs des facteurs $\cos n\varphi$, $\sin n\varphi$, $n \cos n\varphi$, $n \sin n\varphi$, $\cos(n+1)\varphi$, etc., par un déterminant dont la première ligne horizontale sera une combinaison $k+1$ à $k+1$ des quatre quantités α_0, β_0, γ_0, δ_0. Si $k > 3$, cette combinaison contiendra forcément deux fois l'une de ces quatre quantités, et le déterminant correspondant, ayant deux lignes verticales identiques, s'annulera.

Si $k = 3$, on voit que le déterminant donné est égal au produit des deux déterminants :

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_0 & \gamma_0 & \beta_0 & \delta_0 \\ \alpha_1 & \gamma_1 & \beta_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 & \beta_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \gamma_3 & \beta_3 & \delta_3 \end{vmatrix}$$

et

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} \cos(n+3)\varphi & \sin(n+3)\varphi & (n+3)\cos(n+3)\varphi & (n+3)\sin(n+3)\varphi \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \cos n\varphi & \sin n\varphi & n\cos n\varphi & n\sin n\varphi \end{vmatrix}.$$

Le déterminant (1) étant indépendant de n, il suffit de faire voir qu'il en est de même du second. Dans ce but, multiplions le déterminant (2) par le suivant :

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} (n+3)\cos(n+3)\varphi & (n+3)\sin(n+3)\varphi & -\cos(n+3)\varphi & -\sin(n+3)\varphi \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ n\cos n\varphi & n\sin n & -\cos n\varphi & -\sin n\varphi \end{vmatrix},$$

qui lui est égal. Le terme qui se trouvera à l'intersection de la $(i+1)^{ième}$ ligne horizontale et de la $(j+1)^{ième}$ ligne verticale du produit sera

$$(n+j)\cos(n+i)\varphi\cos(n+j)\varphi+(n+j)\sin(n+i)\varphi\sin(n+j)\varphi-(n+i)\cos(n+i)\varphi\cos(n+j)\varphi-(n+i)\varphi\sin(n+j)\varphi,$$

qui revient à

$$(j-i)\cos(i-j)\varphi,$$

36. quantité indépendante de n.

Donc le produit considéré est indépendant de n. Il en sera, par conséquent, de même de sa racine carrée et de $\Delta_{8,n}$.