NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. LEMONNIER

Problèmes

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 550-554

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__550_1>

PROBLÈMES ;

PAR M. H. LEMONNIER.

---

1. *Étant donnée une surface du second degré, on mène par un point* (x, y, z) *un plan variable, on en prend le pôle* Q(x_2, y_2, z_2), *et l'on considère le cône circonscrit à la surface dont* Q *est le sommet : lieu des traces des axes du cône sur* le *plan.*

Si l'équation de la surface est $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, en coordonnées rectangulaires, les axes étant les normales aux surfaces homofocales qui passent par le point Q, les équations du problème sont :

$$\frac{xx_2}{a^2}+\frac{yy_2}{b^2}+\frac{zz_2}{c^2}=1,\qquad \frac{x_2^2}{a^2+u}+\frac{y_2^2}{b^2+u}+\frac{z_2^2}{c^2+u}=1,$$

$$\frac{x_1x_2}{a^2}+\frac{y_1y_2}{b^2}+\frac{z_1z_2}{c^2}=1,\qquad \frac{x-x_2}{\frac{x_2}{a^2+u}}=\frac{y-y_2}{\frac{y_2}{b^2+u}}=\frac{z-z_2}{\frac{z_2}{c^2+u}}.$$

De là

$$\frac{x-x_2}{\frac{x_2}{a^2+u}}=\frac{y-y_2}{\frac{y_2}{b^2+u}}=\frac{z-z_2}{\frac{z_2}{c^2+u}}=\frac{\frac{xx_2}{a^2}+\frac{yy_2}{b^2}+\frac{zz_2}{c^2}-\frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}-\frac{z_2^2}{c^2}}{\frac{x_2^2}{a^2(a^2+u)}+\frac{y_2^2}{b^2(b^2+u)}+\frac{z_2^2}{c^2(c^2+u)}}$$

$$=\frac{1-\frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}-\frac{z_2^2}{c^2}}{\frac{x_2^2}{a^2(a^2+u)}+\frac{y_2^2}{b^2(b^2+u)}+\frac{z_2^2}{c^2(c^2+u)}}.$$

Or

$$1-\frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}-\frac{z_2^2}{c^2}-\left(1-\frac{x_2^2}{a^2+u}-\frac{y_2^2}{b^2+u}-\frac{z_2^2}{c^2+u}\right)$$
$$=-u\left[\frac{x_2^2}{a^2(a^2+u)}+\frac{y_2^2}{b^2(b^2+u)}+\frac{z_2^2}{c^2(c^2+u)}\right].$$

D'où

$$x-x_2=-u\frac{x_2}{a^2+u},\quad y-y_2=-u\frac{y_2}{b^2+u},\quad z-z_2=-u\frac{z_2}{c^2+u},$$

ou

$$\frac{x}{a^2}=\frac{x_2}{a^2+u},\quad \frac{y}{b^2}=\frac{y_2}{b^2+u},\quad \frac{z}{c^2}=\frac{z_2}{c^2+u},$$

comme intersection commune des plans polaires de μ.

Par conséquent,

$$\frac{x - x_2}{\frac{x}{a^2}} = \frac{y - y_2}{\frac{y}{b^2}} = \frac{z - z_2}{\frac{z}{c^2}} = \frac{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1}{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}$$

$$= \frac{\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} - 1}{\frac{xx_1}{a^4} + \frac{yy_1}{b^4} + \frac{zz_1}{c^4}}.$$

L'équation du lieu est donc

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)\left(\frac{xx_1}{a^4} + \frac{yy_1}{b^4} + \frac{zz_1}{c^4}\right)$$
$$= \left(\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} - 1\right)\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right).$$

Remarque. — Les équations

$$\frac{x - x_2}{\frac{x}{a^2}} = \frac{y - y_2}{\frac{y}{b_2}} = \frac{z - z_2}{\frac{z}{c^2}}$$

indiquent que l'axe QM est normal au plan polaire du point M par rapport à la surface. Il l'est en effet au plan polaire du point M par rapport au cône; et ce plan polaire est le même que par rapport à la surface, puisque M est sur le plan de contact. Cette considération peut donner immédiatement les équations; d'où le reste.

2. *Du point* (x, y, z) *on mène à la surface une sécante quelconque* $P\mu\mu'$. *En ses points de rencontre* μ, μ' *avec la surface, on mène les plans tangents qui se coupent suivant la droite* D. *On mène par* D *les plans bissecteurs des angles dièdres des plans tangents : lieu de leurs traces* MM' *sur la sécante* $P\mu\mu'$.

La droite D est la droite conjuguée de la sécante;

d'où

$$\mathrm{D}\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}+\frac{zz_1}{c^2}-1=0,\\&\frac{x\mathrm{X}}{a^2}+\frac{y\mathrm{Y}}{b^2}+\frac{z\mathrm{Z}}{c^2}-1=0.\end{aligned}\right.$$

Or, les plans bissecteurs sont perpendiculaires l'un à l'autre et forment un faisceau harmonique avec les deux plans tangents, de sorte que μ, μ', M et M′ sont disposés harmoniquement. Le plan polaire de M, par rapport à la surface, passe donc en M′ et aussi suivant D; c'est donc le plan bissecteur qui passe en M′. Donc le plan bissecteur passant en M est suivant D un plan perpendiculaire au plan polaire de M.

Or le plan donné par

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}+\frac{zz_1}{c^2}-1+\lambda\left(\frac{x\mathrm{X}}{a^2}+\frac{y\mathrm{Y}}{b^2}+\frac{z\mathrm{Z}}{c^2}-1\right)=0,$$

est perpendiculaire au plan donné par

$$\frac{x\mathrm{X}}{a^2}+\frac{y\mathrm{Y}}{b^2}+\frac{z\mathrm{Z}}{c^2}-1=0,$$

si l'on a

$$\frac{x_1\mathrm{X}}{a^4}+\frac{y_1\mathrm{Y}}{b^4}+\frac{z_1\mathrm{Z}}{c^4}+\lambda\left(\frac{\mathrm{X}^2}{a^4}+\frac{\mathrm{Y}^2}{b^4}+\frac{\mathrm{Z}^2}{c^4}\right)=0;$$

il passe en M, si l'on a

$$\frac{\mathrm{X}x_1}{a^2}+\frac{\mathrm{Y}y_1}{b^2}+\frac{\mathrm{Z}z_1}{c^2}-1+\lambda\left(\frac{\mathrm{X}^2}{a^2}+\frac{\mathrm{Y}^2}{b^2}+\frac{\mathrm{Z}^2}{c^2}-1\right)=0;$$

d'où

$$\left(\frac{\mathrm{X}x_1}{a^4}+\frac{\mathrm{Y}y_1}{b^4}+\frac{\mathrm{Z}z_1}{c^4}\right)\left(\frac{\mathrm{X}^2}{a^2}+\frac{\mathrm{Y}^2}{b^2}+\frac{\mathrm{Z}^2}{c^2}-1\right)$$
$$=\left(\frac{\mathrm{X}^2}{a^4}+\frac{\mathrm{Y}^2}{b^4}+\frac{\mathrm{Z}^2}{c^4}\right)\left(\frac{\mathrm{X}x_1}{a^2}+\frac{\mathrm{Y}y_1}{b^2}+\frac{\mathrm{Z}z_1}{c^2}-1\right).$$

Le lieu est donc le même que le précédent.

Ce fait s'explique aisément.

Soit M la trace d'un axe du cône sur le plan sécant mené en P. Le plan polaire de ce point, par rapport au cône et à la surface, est perpendiculaire sur QM; de sorte que, si M' en est le point de rencontre avec PM, la droite QM' est perpendiculaire sur QM; les points M et M' forment une division harmonique avec les points μ et μ' où la droite MM' coupe la surface. Puisque QM et QM' sont à angle droit, ce sont les bissectrices des angles que font $Q\mu$ et $Q\mu'$. Or les plans tangents au cône le long de $Q\mu$ et $Q\mu'$ se coupent suivant une droite D, qui est également inclinée sur ces droites $Q\mu$, $Q\mu'$ en sens contraires; car si l'on considère un plan perpendiculaire à QM, et les points où il coupe $Q\mu$, $Q\mu'$, on voit que les tangentes à la section en ces points étant parallèles, l'intersection dont il s'agit leur est parallèle, par suite, est comme elles également inclinée en sens contraires sur $Q\mu$ et $Q\mu'$. Il s'ensuit que les plans menés par cette intersection et les bissectrices QM, QM' sont les plans bissecteurs des angles dièdres que font les plans tangents en μ et μ'.

C. Q. F. D.