Nouvelles annales de mathématiques

Georges Dostor

Propriété des bissectrices d'un angle du triangle, avec application aux tangentes et normales de l'ellipse et de l'hyperbole

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 547-550

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__547_1>

PROPRIÉTÉ DES BISSECTRICES D'UN ANGLE DU TRIANGLE,

avec application aux tangentes et normales de l'ellipse et de l'hyperbole;

PAR M. GEORGES DOSTOR.

---

1. Circonscrivons un cercle au triangle ABC (*), et menons le diamètre D′E′ perpendiculaire au côté $BC = a$. Joignons les extrémités D′, E′ de ce diamètre au sommet opposé A par les droites D′A, E′A, qui coupent le même côté CB en D et E. La droite ADD′ sera la bissectrice de l'angle intérieur CAB, et la droite E′AE sera celle de l'angle extérieur adjacent.

Cela construit, les deux droites AD, AD′ seront les *deux bissectrices intérieures de l'angle* A, et les droites AE, AE′ les *deux bissectrices extérieures du même angle* A.

2. Voici l'énoncé du théorème que nous voulons établir :

Dans tout triangle, le produit de deux côtés est égal au produit des deux bissectrices intérieures de l'angle compris, ainsi qu'au produit des deux bissectrices extérieures du même angle.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Pour le prouver, joignons le sommet C aux extrémités du diamètre D′E′; nous formons deux systèmes de triangles semblables

$$\mathrm{ACD'} \text{ et } \mathrm{ABD}, \quad \mathrm{ACE'} \text{ et } \mathrm{ABE},$$

qui donnent

$$\frac{\mathrm{AD'}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AD}}, \quad \frac{\mathrm{AE'}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AE}};$$

on en tire

$$\mathrm{AD}.\mathrm{AD'} = \mathrm{AE}.\mathrm{AE'} = \mathrm{AB}.\mathrm{AC},$$

ce qu'il fallait prouver.

3. Les valeurs de ces bissectrices sont

$$\alpha = \frac{\sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)}}{b+c}, \quad \alpha' = \frac{(b+c)\sqrt{bc}}{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)}};$$

$$\beta = \frac{\sqrt{bc(a+c-b)(a+b-c)}}{b-c}, \quad \beta' = \frac{(b-c)\sqrt{bc}}{\sqrt{(a+c-b)(a+b-c)}};$$

en désignant par a, b, c les trois côtés du triangle, par α, α' les deux bissectrices intérieures, par β, β' les deux bissectrices extérieures, et en supposant $b > c$.

4. En représentant par S la surface de ce triangle, on voit que

$$4\mathrm{S} = (b^2 - c^2)\frac{\alpha\beta}{bc} = (b^2 - c^2)\frac{bc}{\alpha'\beta'};$$

d'où

$$\sin \mathrm{A} = \frac{b^2 - c^2}{2\alpha'\beta'}.$$

5. *Application à l'ellipse et à l'hyperbole.* — Soient B et C les deux foyers de ces courbes qui passent au sommet A; AB et AC seront les rayons vecteurs r et r' qui aboutissent en ce point.

Dans l'ellipse, les droites AE, AE′ seront les deux tangentes t, t' en A, et les droites AD, AD′ seront les normales n, n' au même point. L'inverse a lieu pour l'hyperbole. Nous avons donc, en vertu de notre théorème,

$$tt' = nn' = rr',$$

c'est-à-dire que, *dans l'ellipse et dans l'hyperbole, le produit des deux tangentes est égal au produit des deux rayons vecteurs menés au point de contact; et le produit des deux normales a la même valeur.*

6. L'égalité $tt' = nn'$ est générale; elle a lieu pour toute courbe, pourvu que l'angle des axes de coordonnées soit droit. Il est facile de s'en assurer par la comparaison des deux triangles rectangles semblables ADE, AD′E′; donc

Lorsqu'une courbe est rapportée à des axes rectangulaires, le produit des deux tangentes est égal au produit des deux normales.

7. En général, soit θ l'angle E′OE des axes de coordonnées; nous avons $\theta = \mathrm{D} + \mathrm{D}'$; d'où

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\operatorname{tang}\mathrm{D} + \operatorname{tang}\mathrm{D}'}{1 - \operatorname{tang}\mathrm{D}\operatorname{tang}\mathrm{D}'};$$

et, comme les deux triangles rectangles ADE, AD′E′ donnent

$$\operatorname{tang}\mathrm{D} = \frac{t}{n}, \quad \operatorname{tang}\mathrm{D}' = \frac{t'}{n'},$$

il vient

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{tn' + nt'}{nn' - tt'}.$$

8. Dans les expressions des bissectrices α, α', β, β' au n° 3, remplaçons b par r, c par r', a par $2c$, et posons

$r + r' = 2a$, $\quad a^2 - c^2 = b^2$ dans le cas de l'ellipse;

$r - r' = 2a$, $\quad c^2 - a^2 = b^2$ dans celui de l'hyperbole;

nous trouvons, pour l'ellipse,

$$t=\frac{2\sqrt{rr'-b^2}}{r-r'}\sqrt{rr'},\quad t'=\frac{r-r'}{2\sqrt{rr'-b^2}}\sqrt{rr'};$$

pour l'hyperbole,

$$t=\frac{2\sqrt{rr'-b^2}}{r+r'}\sqrt{rr'},\quad t'=\frac{r+r'}{2\sqrt{rr'-b^2}}\sqrt{rr'};$$

et, pour les deux courbes à la fois,

$$n=\frac{b}{a}\sqrt{rr'},\quad n'=\frac{a}{b}\sqrt{rr'}.$$

Ces valeurs donnent, pour l'ellipse,

$$t'+t=\frac{a^2}{t'}+\frac{b^2}{t};$$

pour l'hyperbole,

$$t'-t=\frac{a^2}{t'}+\frac{b^2}{t};$$

et, pour les deux coniques,

$$\frac{n}{n'}=\frac{b^2}{a^2}.$$