S. Réalis

Identités arithmétiques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 546-547

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__546_0>

IDENTITÉS ARITHMÉTIQUES;

PAR M. S. RÉALIS.

I. Ayant écrit suivant l'ordre descendant la suite des puissances k des $n+1$ premiers nombres impairs, ainsi qu'il suit,

$$(2n+1)^k,\quad (2n-1)^k,\quad (2n-3)^k,\ldots,\quad 3^k,\quad 1^k,$$

on multiplie chaque terme par le terme correspondant de la suite

$$1,\quad T_1,\quad T_2,\ldots,\quad T_{n-1},\quad T_n,$$

dans laquelle T_i est le coefficient de x^i dans le développement de $(1-x)^{2n+1}$, et l'on désigne par $f(k)$ l'expression

$$(2n+1)^k + T_1(2n-1)^k + T_2(2n-3)^k + \ldots + T_{n-1}\,3^k + T_n\,1^k.$$

Cela posé, si k est un impair positif qui ne dépasse pas $2n-1$, on a

$$f(k)=0;$$

pour $k=2n+1$, on a

$$\frac{f(2n+1)}{1.2.3.4\ldots(2n+1)} = 2^{2n}.$$

II. On désigne par $f(k)$ l'expression

$$n^k + T_1(n-1)^k + T_2(n-2)^k + \ldots + T_i(n-i)^k + \ldots \\ + T_{n-3}\,3^k + T_{n-2}\,2^k + T_{n-1}\,1^k,$$

dans laquelle n est un nombre entier plus grand que l'unité, et T_i est le coefficient de x^i dans le développement de $(1-x)^{2n}$.

Cela posé, si k est un nombre pair compris entre o et $2n$, on a

$$f(k) = 0;$$

si $k = 2n$, on a

$$\frac{f(2n)}{1.2.3.4\ldots(2n-1)2n} = \frac{1}{2}.$$