NEUBERG

Triangles et coniques combinés

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 53-66

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__53_1>

TRIANGLES ET CONIQUES COMBINÉS;

PAR M. NEUBERG,
Professeur à l'Athénée royal de Bruges (Belgique)

M. Faure a énoncé dans les tomes XIX et XX des *Nouvelles Annales*, plusieurs propriétés très-intéressantes des coniques qui peuvent être considérées comme résolvant le problème de déterminer les axes de ces courbes, quand on en connaît le centre et un triangle inscrit, conjugué ou circonscrit. Je me propose ici le même problème en substituant au centre un foyer. Dans cette recherche je trouve quelques formules que je crois nouvelles, et j'arrive également aux deux théorèmes énoncés par M. Faure dans le tome XX des *Nouvelles Annales*, page 215.

En supposant des axes coordonnés rectangulaires passant par le foyer F, une conique peut être représentée par l'équation

$$(1) \qquad x^2 + y^2 = (mx + ny + pz)^2 \quad (\text{où } z = 1).$$

(*) Puisque l'on a

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}.$$

(SERRET, *Traité de Trigonométrie*, p. 224.

Les expressions des axes peuvent s'obtenir comme il suit. Pour avoir le paramètre $\frac{b^2}{a}$, qui est la longueur du rayon vecteur parallèle à la directrice, il suffit de faire dans l'équation (1), $mx + ny = 0$, ce qui donne $\frac{b^2}{a} = p$.

L'excentricité numérique $\frac{c}{a}$ ou $\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ est égale au rapport constant des distances d'un point de la courbe au foyer et à la directrice ou égale à $\sqrt{m^2 + n^2}$.

Des relations $\frac{b^2}{a} = p$, $1 - \frac{b^2}{a^2} = m^2 + n^2$, on tire, en posant $1 - m^2 - n^2 = q$,

$$(2) \qquad a = \frac{p}{q}, \quad b^2 = \frac{p^2}{q}, \quad a^2 b^2 = \frac{p^4}{q^3}.$$

Soient maintenant

$$\left(\frac{x_1}{z_1}\,\frac{y_1}{z_1}\right), \quad \left(\frac{x_2}{z_2}\,\frac{y_2}{z_2}\right), \quad \left(\frac{x_3}{z_3}\,\frac{y_3}{z_3}\right), \quad (z_1 = z_2 = z_3 = 1)$$

les cordonnées cartésiennes homogènes des sommets d'un triangle $A_1 A_2 A_3$ inscrit, conjugué ou circonscrit à la conique (1), S sa surface, R le rayon du cercle circonscrit et a_1, a_2, a_3 les longueurs des côtés. Désignons par $\mathbf{X}_r$, $\mathbf{Y}_r$, $\mathbf{Z}_r$ les dérivées suivant x_r, y_r, z_r du déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 2S,$$

et posons, pour abréger,

$$p_{rs} = x_r x_s + y_r y_s, \quad t_r = m x_r + n y_r + p z_r.$$

Les valeurs de p et q, et par suite les axes, peuvent se déduire des quantités t_1, t_2, t_3 qu'on peut déterminer facilement dans les différents cas. Car, en résolvant les équations

$$mx_r + ny_r + pz_r = t_r \quad (r = 1, 2, 3)$$

par rapport à m, n, p, on trouve (*)

$$(3) \qquad m = \frac{(t_1 \quad y_1 \quad z_1)}{2S},$$

$$(4) \qquad n = \frac{(x_1 \quad t_1 \quad z_1)}{2S},$$

$$(5) \qquad p = \frac{(x_1 \quad y_1 \quad t_1)}{2S}.$$

La formule (5) donne aussi

$$-4S^2p^2 = (x_1 \quad y_1 \quad t_1\sqrt{-1})^2$$

ou

$$(5') \qquad -4S^2p^2 = (\rho_{11} - t_1t_1 \quad \rho_{12} - t_1t_2 \quad \rho_{13} - t_1t_3).$$

Des équations (3) et (4) on conclut

$$4S^2q = (x_1 \; y_1 \; 1)^2 + (t_1\sqrt{-1} \; y_1 \; 1)^2 + (x_1 \; t_1\sqrt{-1} \; 1)^2.$$

Le second membre prend une forme très-simple en le considérant comme le résultat de la multiplication des deux systèmes d'éléments

$$\left|\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_1 & y_1 & t_1\sqrt{-1} \\ 0 & 1 & x_2 & y_2 & t_2\sqrt{-1} \\ 0 & 1 & x_3 & y_3 & t_3\sqrt{-1} \end{array}\right| \left|\begin{array}{ccccc} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x_1 & y_1 & t_1\sqrt{-1} \\ 1 & 0 & x_2 & y_2 & t_2\sqrt{-1} \\ 1 & 0 & x_3 & y_3 & t_3\sqrt{-1} \end{array}\right|;$$

(*) Pour représenter un déterminant, nous écrirons souvent la première ligne entre parenthèses, si les autres lignes s'en déduisent par des permutations circulaires des indices.

donc

$$(6)\quad 4S^2 q = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \rho_{11} - t_1^2 & \rho_{12} - t_1 t_2 & \rho_{13} - t_1 t_3 \\ 1 & \rho_{21} - t_1 t_2 & \rho_{22} - t_2^2 & \rho_{23} - t_2 t_3 \\ 1 & \rho_{31} - t_3 t_1 & \rho_{32} - t_3 t_2 & \rho_{33} - t_3^2 \end{vmatrix}.$$

Triangle inscrit. — En exprimant que les sommets sont situés sur la courbe, on trouve

$$\rho_{11} - t_1^2 = 0, \quad \rho_{22} - t_2^2 = 0, \quad \rho_{33} - t_3^2 = 0;$$

d'où

$$t_1 = R_1, \quad t_2 = R_2, \quad t_3 = R_3,$$

R_1, R_2, R_3 étant les longueurs des rayons vecteurs FA_1, FA_2, FA_3 affectées de signes convenables (*). Désignons par ω_1, ω_2, ω_3 les angles que font ces rayons avec l'axe des X; nous aurons

$$x_1 = R_1 \cos\omega_1, \quad x_2 = R_2 \cos\omega_2, \quad x_3 = \pm R_3 \cos\omega_3,$$
$$y_1 = R_1 \sin\omega_1, \quad y_2 = R_2 \sin\omega_2, \quad y_3 = \pm R_3 \sin\omega_3.$$

On tire de là

$$\begin{aligned} \rho_{12} - t_1 t_2 &= R_1 R_2 (\cos\omega_1 \cos\omega_2 + \sin\omega_1 \sin\omega_2 - 1) \\ &= -2R_1 R_2 \sin^2\tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2), \\ \rho_{23} - t_2 t_3 &= -2R_2 R_3 \sin^2\tfrac{1}{2}(\omega_2 - \omega_3) \\ \text{ou} \quad &= -2R_2 R_3 \cos^2\tfrac{1}{2}(\omega_2 - \omega_3), \\ \rho_{31} - t_3 t_1 &= -2R_3 R_1 \sin^2\tfrac{1}{2}(\omega_3 - \omega_1) \\ \text{ou} \quad &= -2R_3 R_1 \cos^2\tfrac{1}{2}(\omega_3 - \omega_1); \end{aligned}$$

(*) On sait qu'il existe quatre coniques qui passent par trois points donnés et ont un foyer en un point donné. L'une d'elles est une ellipse, une parabole ou une hyperbole dont une même branche passe par les trois points donnés; les trois autres sont des hyperboles dont une branche passe par deux des points et l'autre par le troisième point. Pour la première courbe, nous pouvons supposer R_1, R_2, R_3 positifs; pour les trois autres, nous admettons que A_1 et A_2 désignent les deux points situés sur la même branche, et nous considérons R_1 et R_2 comme positifs et R_3 comme négatif.

Voir la *Géométrie analytique* de MM. Briot et Bouquet, 4e édition, pages 219 et 220.

en substituant ces valeurs dans les formules (5), (5') et (6), il vient

$$p = \frac{R_1 Z_1 + R_2 Z_2 + R_3 Z_3}{2S},$$

$$-4S^2 p^2 = 2(\rho_{12} - t_1 t_2)(\rho_{23} - t_2 t_3)(\rho_{31} - t_3 t_1)$$

ou

$$p = \frac{2R_1 R_2 R_3}{S} \sin\frac{1}{2}(R_1 R_2) \sin\frac{1}{2}(R_2 R_3) \sin\frac{1}{2}(R_3 R_1),$$

$$p = \frac{2R_1 R_2 R_3}{S} \sin\frac{1}{2}(R_1 R_2) \cos\frac{1}{2}(R_2 R_3) \cos\frac{1}{2}(R_3 R_1);$$

$$4S^2 q = -\Sigma(\rho_{12} - t_1 t_2)^2 + 2\Sigma(\rho_{12} - t_1 t_2)(\rho_{23} - t_2 t_3)$$

ou

$$q = \frac{R_1^2 R_2^2 R_3^2}{S^2}\left[-\sum \frac{\sin^4 \frac{1}{2}(R_1 R_2)}{R_3^2} + 2\sum \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(R_1 R_2)}{R_3}\,\frac{\sin^2 \frac{1}{2}(R_2 R_3)}{R_1}\right],$$

$$\begin{aligned} q = \frac{R_1^2 R_2^2 R_3^2}{S^2}\Bigg[& -\frac{\sin^4 \frac{1}{2}(R_1 R_2)}{R_3^2} - \frac{\cos^4 \frac{1}{2}(R_2 R_3)}{R_1^2} \\ & - \frac{\cos^4 \frac{1}{2}(R_3 R_1)}{R_2^2} \\ & + 2\,\frac{\sin^2 \frac{1}{2}(R_1 R_2)\cos^2 \frac{1}{2}(R_2 R_3)}{R_3 R_1} \\ & + 2\,\frac{\sin^2 \frac{1}{2}(R_1 R_2)\cos^2 \frac{1}{2}(R_3 R_1)}{R_3 R_2} \\ & + 2\,\frac{\cos^2 \frac{1}{2}(R_2 R_3)\cos^2 \frac{1}{2}(R_3 R_1)}{R_1 R_2}\Bigg]. \end{aligned}$$

De là on conclut facilement les expressions de a, b^2 et $a^2 b^2$

Si la conique (1) est une parabole on a $q = 0$, ou, en décomposant la première valeur de q en facteurs,

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(R_1 R_2)}{\sqrt{R_3}} + \frac{\sin\frac{1}{2}(R_2 R_3)}{\sqrt{R_1}} + \frac{\sin\frac{1}{2}(R_3 R_1)}{\sqrt{R_2}} = 0.$$

Triangle conjugué. — On a les équations de condition

$$\rho_{12} - t_1 t_2 = 0, \quad \rho_{23} - t_2 t_3 = 0, \quad \rho_{31} - t_3 t_1 = 0;$$

on en déduit

$$t_1^2 = \frac{\rho_{12}\rho_{13}}{\rho_{23}}, \quad t_2^2 = \frac{\rho_{21}\rho_{23}}{\rho_{31}}, \quad t_3^2 = \frac{\rho_{31}\rho_{32}}{\rho_{12}},$$

d'où

$$\begin{aligned}
\rho_{11} - t_1^2 &= \frac{1}{\rho_{23}}(\rho_{11}\rho_{23} - \rho_{12}\rho_{13}) \\
&= \frac{1}{\rho_{23}}\begin{vmatrix} x_1 x_1 + y_1 y_1 & x_1 x_2 + y_1 y_2 \\ x_3 x_1 + y_3 y_1 & x_3 x_2 + y_3 y_2 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{\rho_{23}}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = -\frac{Z_2 Z_3}{\rho_{23}},
\end{aligned}$$

$$\rho_{22} - t_2^2 = -\frac{Z_3 Z_1}{\rho_{31}}, \quad \rho_{33} - t_3^2 = -\frac{Z_1 Z_2}{\rho_{12}};$$

par conséquent

$$-4S^2 p^2 = (\rho_{11} - t_1^2)(\rho_{22} - t_2^2)(\rho_{33} - t_3^2) = -\frac{Z_1^2 Z_2^2 Z_3^2}{\rho_{12}\rho_{23}\rho_{31}},$$

$$4S^2 q = \Sigma(\rho_{11} - t_1^2)(\rho_{22} - t_2^2) = \frac{Z_1 Z_2 Z_3}{\rho_{12}\rho_{23}\rho_{31}} \sum Z_1 \rho_{23}.$$

Pour reconnaître la signification géométrique de ces résultats, transportons les axes coordonnés parallèlement à eux-mêmes en un point quelconque du plan $A_1 A_2 A_3$. En appelant α, β les coordonnées du foyer, il faut remplacer x_r et y_r par $x_r - \alpha$ et par $y_r - \beta$. On aura ainsi :

$$\begin{aligned}
\rho_{rs} &= (x_r - \alpha)(x_s - \alpha) + (y_r - \beta)(y_s - \beta) \\
&= \alpha^2 + \beta^2 - \alpha(x_r + x_s) - \beta(y_r + y_s) + x_r x_s + y_r y_s.
\end{aligned}$$

En considérant α, β comme des coordonnées courantes, l'équation $\rho_{rs} = 0$ représente évidemment un cercle, et comme elle est satisfaite par $\alpha = x_r$ ou x_s et $\beta = y_r$ ou y_s

et que le centre a pour coordonnées $\frac{x_r + x_s}{2}$, $\frac{y_r + y_s}{2}$, elle représente le cercle décrit sur le coté $A_r A_s$ comme diamètre. Donc, si l'on désigne par γ_1^2, γ_2^2, γ_3^2 les puissances du foyer F par rapport aux circonférences décrites sur les cotés a_1, a_2, a_3 comme diamètres (ou les carrés des tangentes menées de F à ces circonférences), on aura

$$\rho_{12} = \gamma_3^2, \quad \rho_{23} = \gamma_1^2, \quad \rho_{31} = \gamma_2^2.$$

Les quantités Z_1, Z_2, Z_3 représentent (au signe près) les doubles des aires des triangles FA_2A_3, FA_3A_1, FA_1A_2; en appelant δ_1, δ_2, δ_3 les distances de F aux côtés a_1, a_2, a_3 du triangle, on aura

$$Z_1 = a_1\delta_1, \quad Z_2 = a_2\delta_2, \quad Z_3 = a_3\delta_3.$$

Remarquons aussi qu'en regardant α, β comme des coordonnées courantes, les équations $Z_1 = 0$, $Z_2 = 0$, $Z_3 = 0$ représentent les côtés du triangle.

Comme Z_1, Z_2, Z_3 sont les mineurs du déterminant $(x_1 - \alpha,\ \ y_1 - \beta,\ \ z_1)$ par rapport aux éléments z, on peut écrire $\Sigma Z_1\rho_{23} = (x_1 - \alpha.\ y_1 - \beta,\ \rho_{23})$. Remplaçons ρ_{rs} par $\alpha^2 + \beta^2 - \alpha(x_r + x_s) - \beta(y_r + y_s) + x_r x_s + y_r y_s$; en ajoutant les deux premières colonnes multipliées par $-\alpha$ et β à la troisième, on aura

$$\Sigma Z_1\rho_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_1 - \alpha & y_1 - \beta & 2(\alpha^2 + \beta^2) - \alpha\Sigma x_1 - \beta\Sigma y_1 + x_2 x_3 + y_2 y_3 \\ 1 & x_2 - \alpha & y_2 - \beta & 2(\alpha^2 + \beta^2) - \alpha\Sigma x_1 - \beta\Sigma y_1 + x_3 x_1 + y_3 y_1 \\ 1 & x_3 - \alpha & y_3 - \beta & 2(\alpha^2 + \beta^2) - \alpha\Sigma x_1 - \beta\Sigma y_1 + x_1 x_2 + y_1 y_2 \end{vmatrix},$$

et si nous ajoutons aux trois dernières colonnes la première, multipliée successivement par

$$\alpha, \quad \beta, \quad -2(\alpha^2 + \beta^2) + \alpha\Sigma x_1 + \beta\Sigma y_1,$$

il vient

$$\Sigma Z_1 \rho_{23} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta & -2(\alpha^2+\beta^2)+\alpha\Sigma x_1+\beta\Sigma y_1 \\ 1 & x_1 & y_1 & x_2 x_3 + y_2 y_3 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_3 x_1 + y_3 y_1 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_1 x_2 + y_1 y_2 \end{vmatrix}.$$

Sous cette forme, on reconnaît que $\Sigma Z_1 \rho_{23} = 0$ est l'équation d'un cercle, et comme le coefficient de $(\alpha^2+\beta^2)$ est $4S$, on peut poser $\Sigma Z_1 \rho_{23} = 4S\varepsilon^2$, ε^2 étant la puissance de F par rapport à ce cercle. On peut démontrer facilement que ce cercle est celui des neuf points du triangle. Car l'équation $\Sigma Z_1 \rho_{23} = 0$ est satisfaite en posant $Z_1 = 0$, $\rho_{12} = 0$, $\rho_{13} = 0$; les trois dernières représentent le côté a_1 et les circonférences décrites sur a_2 et a_3 comme diamètres, et ces trois lignes se coupent au pied d'une hauteur. Le déterminant

$$[x_1-\alpha,\ y_1-\beta,\ (x_2-\alpha)(x_3-\alpha)+(y_2-\beta)(y_3-\beta)] = \Sigma Z_1 \rho_{23}$$

s'annule encore, comme acquérant deux lignes identiques, en posant

$$x_r-\alpha = -(x_s-\alpha), \quad y_r-\beta = -(y_s-\beta),$$

c'est-à-dire

$$\alpha = \frac{x_r+x_s}{2}, \quad \beta = \frac{y_r+y_s}{2}$$

(coordonnées du milieu de $A_r A_s$).

Les formules cherchées sont donc $\left(\text{à cause de } \dfrac{a_1 a_2 a_3}{4S} = R\right)$

$$p = 2R\,\frac{\delta_1\delta_2\delta_3}{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}, \quad q = \frac{b^2}{a^2} = 4R\varepsilon^2\,\frac{\delta_1\delta_2\delta_3}{\gamma_1^2\gamma_2^2\gamma_3^2},$$

$$2a = \frac{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}{\varepsilon^2}, \quad b^2 = R\,\frac{\delta_1\delta_2\delta_3}{\varepsilon^2},$$

$$4a^2b^2 = R\,\frac{\delta_1\delta_2\delta_3\gamma_1^2\gamma_2^2\gamma_3^2}{\varepsilon^6}.$$

La dernière relation donne le second des théorèmes de M. Faure, énoncés t. XX, p. 215.

En considérant α, β comme des coordonnées courantes, ou ε^2, γ_1^2, γ_2^2, γ_3^2 comme des fonctions de circonférences, et δ_1, δ_2, δ_3 comme les fonctions des côtés du triangle, les équations ci-dessus donneront les lieux des foyers des coniques conjuguées au triangle $A_1 A_2 A_3$ et dans lesquelles le paramètre, le rapport des axes, l'un des axes ou le produit des axes sont constants.

Pour avoir les lieux des foyers des paraboles ou des hyperboles équilatères conjugués au triangle $A_1\ A_2\ A_3$, il suffit de faire $q = 0$ ou $q = -1$; on trouve, pour le premier lieu, $\varepsilon^2 = 0$ ou le cercle des neuf points, et pour le second $\gamma_1^2\,\gamma_2^2\,\gamma_3^2 + 4R\varepsilon^2\delta_1\,\delta_2\,\delta_3 = 0$ ou une courbe du sixième degré, admettant comme points doubles les sommets et les pieds des hauteurs et passant par les points circulaires à l'infini.

Il serait facile d'exprimer p et q en fonction des rayons focaux FA_1, FA_2, FA_3 et des angles que font ces rayons entre eux; il suffirait de remplacer x_r et y_r par $R_r \cos\omega_r$ et $R_r \sin\omega_r$. On trouve ainsi, par exemple,

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{\operatorname{tang}(R_1 R_2)\operatorname{tang}(R_2 R_3)\operatorname{tang}(R_3 R_1)}{8S^2}\,\Sigma R_1^2 R_2^2 \sin 2(R_1 R_2).$$

Triangle circonscrit. — On a les trois équations de condition (*)

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} &\begin{vmatrix} \rho_{11} - t_1^2 & \rho_{12} - t_1 t_2 \\ \rho_{21} - t_2 t_1 & \rho_{22} - t_2^2 \end{vmatrix} = 0, \\ &\begin{vmatrix} \rho_{22} - t_2^2 & \rho_{23} - t_2 t_3 \\ \rho_{32} - t_3 t_2 & \rho_{33} - t_3^2 \end{vmatrix} = 0, \\ &\begin{vmatrix} \rho_{33} - t_3^2 & \rho_{31} - t_3 t_1 \\ \rho_{13} - t_1 t_3 & \rho_{11} - t_1^2 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}\right.$$

(*) Pour trouver ces équations, on peut suivre la marche suivante, indiquee par M. Salmon dans son *Traité des sections coniques*. On conçoit

Pour trouver les valeurs de t_1, t_2, t_3. ou mieux celles de $\rho_{rs} - t_r\, t_s$, remarquons que les quantités ρ sont liées par l'équation identique

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

dont le premier membre est le carré de $(x_1 \quad y_1 \quad 0)$. Par conséquent, en désignant par ρ'_{rs} le mineur du déterminant (8) qui correspond à l'élément ρ_{rs}, les mineurs du réciproque

$$\begin{vmatrix} \rho'_{11} & \rho'_{12} & \rho'_{13} \\ \rho'_{21} & \rho'_{22} & \rho'_{23} \\ \rho'_{31} & \rho'_{32} & \rho'_{33} \end{vmatrix}$$

sont aussi identiquement nuls (*), et on a

$$(9) \quad \begin{vmatrix} \rho'_{11} & \rho'_{12} \\ \rho'_{21} & \rho'_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \rho'_{22} & \rho'_{23} \\ \rho'_{32} & \rho'_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \rho'_{33} & \rho'_{31} \\ \rho'_{13} & \rho'_{11} \end{vmatrix} = 0.$$

Comme les déterminants (7) et (9) sont symétriques et de forme semblable, on est naturellement conduit à examiner s'il n'existe pas des facteurs μ_1, μ_2, μ_3 et de valeurs de t_1, t_2, t_3, tels qu'on ait identiquement

$$\rho_{11} - t_1^2 = \mu_1 \rho'_{11}, \quad \rho_{22} - t_2^2 = \mu_2 \rho'_{22}, \quad \rho_{33} - t_3^2 = \mu_3 \rho'_{23};$$

$$\rho_{12} - t_1 t_2 = \pm \sqrt{\mu_1 \mu_2}\, \rho'_{12},$$

$$\rho_{23} - t_2 t_3 = \pm \sqrt{\mu_2 \mu_3}\, \rho'_{23},$$

$$\rho_{31} - t_3 t_1 = \pm \sqrt{\mu_3 \mu_1}\, \rho'_{31}.$$

---

les coordonnées des points d'intersection de la courbe (1) par une droite telle que $A_1 A_2$, mises sous la forme $\dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 z_1 + m_2 z_2}$, $\dfrac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 z_1 + m_2 z_2}$, et on exprime que l'équation

$$m_1^2(\rho_{11} - t_1^2) + 2 m_1 m_2(\rho_{12} - t_1 t_2) + m_2^2(\rho_{22} - t_2^2) = 0,$$

qu'on obtient en écrivant que ces points sont sur la courbe, donne deux valeurs égales et de même signe pour le rapport $m_1 : m_2$.

(*) *Voir* Baltzer-Houël, page 51.

On trouve que cette identification est possible en posant (*)

$$\mu_1 = \frac{\rho_{11}}{\rho_{22}\rho_{33}}, \quad \mu_2 = \frac{\rho_{22}}{\rho_{33}\rho_{11}}, \quad \mu_3 = \frac{\rho_{33}}{\rho_{11}\rho_{22}},$$

et comme on a $\rho'_{rr} = Z_r^2$, on obtient enfin

$$\rho_{11} - t_1^2 = \frac{\rho_{11} Z_1^2}{\rho_{22}\rho_{33}}, \quad \rho_{22} - t_2^2 = \frac{\rho_{22} Z_2^2}{\rho_{33}\rho_{11}}, \quad \rho_{33} - t_3^2 = \frac{\rho_{33} Z_3^2}{\rho_{11}\rho_{22}},$$

$$\rho_{12} - t_1 t_2 = \pm\sqrt{(\rho_{11} - t_1^2)(\rho_{22} - t_2^2)},$$

$$\rho_{23} - t_2 t_3 = \pm\sqrt{(\rho_{22} - t_2^2)(\rho_{33} - t_3^2)},$$

$$\rho_{31} - t_3 t_1 = \pm\sqrt{(\rho_{33} - t_3^2)(\rho_{11} - t_1^2)}.$$

Quant aux doubles signes placés devant les radicaux, il faut prendre les trois radicaux avec le signe —, ou un seul avec ce signe, suivant que les trois contacts du triangle avec la conique ont lieu sur les côtés mêmes ou qu'un seul contact est intérieur et les deux autres extérieurs (**).

Portons maintenant ces valeurs dans les équations (5) et (6). Pour pouvoir développer plus facilement les déterminants, nous diviserons les lignes et les colonnes respectivement par

$$\sqrt{\rho_{11} - t_1^2}, \quad \sqrt{\rho_{22} - t_2^2}, \quad \sqrt{\rho_{33} - t_3^2}.$$

(*) On écrit, par exemple,

$$\rho'_{11} = \rho_{22}\rho_{33} - \rho_{23}^2 = \frac{\rho_{22}\rho_{33}}{\rho_{11}}\left(\rho_{11} - \frac{\rho_{23}^2 \rho_{11}}{\rho_{22}\rho_{33}}\right),$$

d'où

$$t_1^2 = \frac{\rho_{23}^2 \rho_{11}}{\rho_{22}\rho_{33}} \quad \text{et} \quad \mu_1 = \frac{\rho_{11}}{\rho_{22}\rho_{33}}.$$

(**) Car, suivant que le point de contact est situé entre A_1 et A_2, ou se trouve sur le prolongement de $A_1 A_2$, le rapport $m_1 : m_2$ (*voir* l'une des notes précédentes) doit être positif ou négatif, et par suite le terme du milieu de l'équation $m_1^2(\rho_{11} - t_1^2) + \ldots = 0$ est négatif ou positif. Quand il n'y a qu'un seul contact intérieur du triangle, nous le supposerons sur le côté a_3.

Nous aurons

$$-4S^2p^2 = (\rho_{11} - t_1^2)(\rho_{22} - t_2^2)(\rho_{33} - t_3^2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & \mp 1 \\ -1 & 1 & \mp 1 \\ \mp 1 & \mp 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -4\,\frac{Z_1^2 Z_2^2 Z_3^2}{\rho_{11}\rho_{22}\rho_{33}},$$

ou

$$p = \frac{Z_1 Z_2 Z_3}{SR_1R_2R_3} = 4R\,\frac{\delta_1\delta_2\delta_3}{R_1R_2R_3},$$

et

$$4S^2q = -(\rho_{11} - t_1^2)(\rho_{22} - t_2^2)(\rho_{33} - t_3^2)$$

$$\times \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{\rho_{11} - t_1^2}} & \frac{1}{\sqrt{\rho_{22} - t_2^2}} & \frac{1}{\sqrt{\rho_{33} - t_3^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{\rho_{11} - t_1^2}} & 1 & -1 & \mp 1 \\ \frac{1}{\sqrt{\rho_{22} - t_2^2}} & -1 & 1 & \mp 1 \\ \frac{1}{\sqrt{\rho_{33} - t_3^2}} & \mp 1 & \mp 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 4\sqrt{(\rho_{11} - t_1^2)(\rho_{22} - t_2^2)(\rho_{33} - t_3^2)}\,\Sigma\sqrt{\rho_{11} - t_1^2},$$

ou

$$q = \frac{Z_1 Z_2 Z_3}{SR_1^2R_2^2R_3^2}\,\Sigma Z\rho_{11}.$$

Pour avoir la signification géométrique de la quantité $\Sigma Z_1\rho_{11}$, suposons encore l'origine des axes coordonnés en un point quelconque. Il vient

$$\Sigma Z_1\rho_{11} = (x_1 - \alpha \quad y_1 - \beta \quad x_1^2 + y_1^2 - 2\alpha x_1 - 2\beta y_1 + \alpha^2 + \beta^2),$$

ou, en ajoutant à la troisième colonne les deux premières multipliées par 2α et par 2β,

$$\Sigma Z_1\rho_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_1 - \alpha & y_1 - \beta & x_1^2 + y_1^2 - (\alpha^2 + \beta^2) \\ 1 & x_2 - \alpha & y_2 - \beta & x_2^2 + y_2^2 - (\alpha^2 + \beta^2) \\ 1 & x_3 - \alpha & y_3 - \beta & x_3^2 + y_3^2 - (\alpha^2 + \beta^2) \end{vmatrix}$$

et en ajoutant aux trois dernières colonnes la première multipliée par α, par β et par $(\alpha^2+\beta^2)$

$$\Sigma Z_1 \rho_{11} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta & \alpha^2+\beta^2 \\ 1 & x_1 & y_1 & x_1^2+y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2+y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2+y_3^2 \end{vmatrix}.$$

On voit immédiatement que l'équation $\Sigma Z_1 \rho_{11} = 0$ est l'équation d'un cercle et comme le déterminant devient nul par les hypothèses $\alpha = x_r$, $\beta = y_r$, ce cercle passe par les sommets du triangle. Donc, en désignant par η^2 la puissance du foyer F par rapport à la circonférence circonscrite au triangle $A_1A_2A_3$, et en remarquant que le coefficient de $(\alpha^2+\beta^2)$ est $-2S$, on aura

$$\Sigma Z_1 \rho_{11} = -2S\eta^2.$$

Les formules relatives aux axes sont donc

$$p = 4R\frac{\delta_1\delta_2\delta_3}{R_1R_2R_3}, \qquad q = -8R\eta^2\frac{\delta_1\delta_2\delta_3}{R_1^2R_2^2R_3^2},$$

$$2a = \frac{R_1R_2R_3}{\eta^2}, \qquad b^2 = -2R\frac{\delta_1\delta_2\delta_3}{\eta^2},$$

$$4a^2b^2 = -2R\frac{R_1^2R_2^2R_3^2\delta_1\delta_2\delta_3}{\eta^6}.$$

La dernière formule donne le premier des théorèmes énoncés, par M. Faure, dans les *Nouvelles Annales*, t. XX, p. 215.

Des relations que nous venons de trouver, on peut aussi conclure les lieux des foyers des coniques inscrites à un triangle fixe et dans lesquelles le paramètre, le rapport des axes, l'un des axes ou le produit des axes sont constants. En faisant $q=0$ ou $q=-1$, on aura les lieux des foyers des paraboles ou des hyperboles équilatères inscrites au triangle $A_1 A_2 A_3$; le premier lieu est la circonférence circonscrite, et le second une courbe du sixième ordre, passant par les points circulaires à l'infini et par les sommets du triangle.