Nouvelles annales de mathématiques

J. Bourget

Note sur les séries de Taylor et de Maclaurin

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 537-540

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__537_1>

NOTE SUR LES SÉRIES DE TAYLOR ET DE MACLAURIN;

PAR M. J. BOURGET.

1. On peut donner une forme extrêmement générale au reste de la série de Maclaurin, en y introduisant une

fonction arbitraire. On retrouve ainsi les diverses formes particulières, et l'on peut en tirer une infinité d'autres. Voici comment j'ai été conduit à ce résultat, qui peut-être n'est pas nouveau, car il est un corollaire facile de théorèmes bien connus.

2. On démontre facilement (*voir* le *Cours d'Analyse* de M. Duhamel) que, si $F(x)$ et $f(x)$ sont des fonctions continues, finies et uniformes entre a et b, on a

$$\frac{F(a)-F(b)}{f(a)-f(b)}=\frac{F'[a+\theta(b-a)]}{f'[a+\theta(b-a)]},$$

θ étant un nombre positif compris entre o et 1; peu importe d'ailleurs que a soit plus grand ou plus petit que b.

Si nous supposons, en outre, que

$$F(b)=0,\quad f(b)=0,$$

la relation précédente deviendra

$$\frac{F(a)}{f(a)}=\frac{F'[a+\theta(b-a)]}{f'[a+\theta(b-a)]}.$$

C'est de là que nous allons tirer l'identité de Maclaurin.

3. Supposons que a soit une variable et b une constante; posons

$$F(a)=\varphi(b)-\varphi(a)-\frac{b-a}{1}\varphi'(a)-\frac{(b-a)^2}{1.2}\varphi''(a)-\ldots$$
$$-\frac{(b-a)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\varphi^{(n-1)}(a)$$

et

$$f(a)=\varpi(b-a).$$

Nous admettrons que toutes les fonctions dérivées de φ

sont finies, continues et uniformes dans l'intervalle de a à b, et que $\varpi(o) = o$. Nous aurons

$$F(b) = o, \quad f(b) = o,$$

et

$$F'(a) = -\frac{(b-a)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\varphi^n(a), \quad f'(a) = -\varpi'(b-a);$$

donc

$$\frac{\varphi(b) - \varphi(a) - \frac{b-a}{1}\varphi'(a) - \ldots - \frac{(b-a)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\varphi^{n-1}(a)}{\varpi(b-a)}$$
$$= \frac{(b-a)^{n-1}(1-\theta)^{n-1}\varphi^n[a+\theta(b-a)]}{1.2.3\ldots(n-1)\varpi'[(1-\theta)(b-a)]}.$$

De là nous tirons l'identité

$$\varphi(b) = \varphi(a) + \frac{b-a}{1}\varphi'(a) + \frac{(b-a)^2}{1.2}\varphi''(a) + \ldots$$
$$+ \frac{(b-a)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\varphi^{n-1}(a)$$
$$+ \frac{\varpi(b-a)}{\varpi'[(1-\theta)(b-a)]}\frac{(b-a)^{n-1}(1-\theta)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\varphi^n[a+\theta(b-a)].$$

4. Supposons maintenant dans cette identité $a = o$, et changeons b en x; nous aurons l'identité de Maclaurin

$$\varphi(x) = \varphi(o) + x\varphi'(o) + \frac{x^2}{1.2}\varphi''(o) + \ldots$$
$$+ \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\varphi^{n-1}(o) + \frac{\varpi(x)}{\varpi'[(1-\theta)x]}\frac{x^{n-1}(1-\theta)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\varphi^n(\theta x),$$

et ϖ est une fonction arbitraire assujettie à la seule condition de s'annuler pour $x = o$.

5. Si maintenant nous considérons, dans $\varphi(x+h)$,

h comme la variable, la série de Maclaurin nous donnera celle de Taylor :

$$\begin{aligned}\varphi(x+h) = \varphi(x) + h\varphi'(x) + \frac{h^2}{1.2}\varphi''(x) + \ldots \\ + \frac{h^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\varphi^{n-1}(x) \\ + \frac{\varpi(h)}{\varpi'[(1-\theta)h]}\frac{h^{n-1}(1-\theta)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\varphi^n(x+\theta h),\end{aligned}$$

et ϖ est une fonction arbitraire assujettie seulement à la condition de s'annuler pour $h = 0$.

6. Dans l'identité de Maclaurin, faisons

$$\varpi(x) = x^p.$$

p étant un nombre positif quelconque, nous aurons

$$\varpi'(x) = px^{p-1};$$

par conséquent

$$\varpi'[(1-\theta)x] = p(1-\theta)^{p-1}x^{p-1}.$$

Nous aurons donc pour le reste

$$R = \frac{x^n(1-\theta)^{n-p}}{1.2.3\ldots(n-1)p}\varphi^n(\theta x).$$

Si l'on fait dans cette formule :

1° $p = n$, on obtient la forme la plus généralement employée

$$R_1 = \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}\varphi^n(\theta x);$$

2° $p = 1$, on obtient la seconde forme

$$R_2 = \frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\varphi^n(\theta x).$$