

H. LEMONNIER

**Équation de Hesse pour la détermination
des points d'inflexion**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 9
(1870), p. 531-532

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9_531_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1870, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ÉQUATION DE HESSE

pour la détermination des points d'inflexion ;

PAR M. H. LEMONNIER,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Corneille.

Soit $u = 0$ l'équation d'une ligne quelconque, u étant une fonction homogène de x, y et $z = 1$, d'un degré égal à k .

Si un point d'inflexion y est donné par $y'' = 0$, u'_x, u'_y , et $u''_{x^2}, u''_{xy}, u''_{y^2}$ étant, en ce point, de valeurs finies, on aura

$$u = 0, \quad u'_x + y' u'_y = 0 \quad \text{et} \quad u''_{x^2} + 2u''_{xy} y' + u''_{y^2} y'^2 = 0,$$

ou

$$u = 0, \quad u'_x + m u'_y = 0, \quad u''_{x^2} + 2m u''_{xy} + m^2 u''_{y^2} = 0,$$

en posant $y' = m$.

En tenant compte des identités

$$\begin{aligned} (k-1)u'_x &= x u''_{x^2} + y u''_{xy} + z u''_{xz}, \dots, \\ k u &= x u'_x + y u'_y + z u'_z \\ &= x^2 u''_{x^2} + y^2 u''_{y^2} + z^2 u''_{z^2} + 2yz u''_{yz} + 2zx u''_{zx} + 2xy u''_{xy}, \end{aligned}$$

ces équations seront

$$\begin{aligned} x^2 u''_{x^2} + y^2 u''_{y^2} + z^2 u''_{z^2} + 2yz u''_{yz} + 2zx u''_{zx} + 2xy u''_{xy} &= 0, \\ x u''_{x^2} + y u''_{xy} + z u''_{xz} + m(x u''_{xy} + y u''_{y^2} + z u''_{yz}) &= 0, \\ u''_{x^2} + 2m u''_{xy} + m^2 u''_{y^2} &= 0. \end{aligned}$$

Or elles expriment que le point (xy) est à la fois sur la conique que représente l'équation

$$\begin{aligned} \varphi(X, Y, Z) &= X^2 u''_{x^2} + Y^2 u''_{y^2} + Z^2 u''_{z^2} \\ &+ 2YZ u''_{yz} + 2ZX u''_{zx} + 2XY u''_{xy} = 0, \end{aligned}$$

et sur une asymptote de cette conique donnée par

$$\begin{aligned} X u''_{x^2} + Y u''_{xy} + Z u''_{xz} + m(X u''_{xy} + Y u''_{y^2} + Z u''_{yz}) &= 0, \\ u''_{x^2} + 2u''_{xy} m + u''_{y^2} m^2 &= 0. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que la conique est le système de deux droites. Son centre lui appartenant alors, on a pour ce centre

$$\varphi'_X = 0, \quad \varphi'_Y = 0, \quad \varphi'_Z = 0,$$

d'où l'équation de Hesse :

$$\begin{vmatrix} u''_{x^2} & u''_{xy} & u''_{xz} \\ u''_{yx} & u''_{y^2} & u''_{yz} \\ u''_{zx} & u''_{zy} & u''_{z^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Si u est une fonction entière du degré n , cette équation est du degré $3(n-2)$. Le nombre des points d'inflexion est alors, en général, $3n(n-2)$.