NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. LEMONNIER

Équation de Hesse pour la détermination des points d'inflexion

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 531-532

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__531_1>

ÉQUATION DE HESSE

pour la détermination des points d'inflexion ;

PAR M. H. LEMONNIER,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Corneille.

Soit $u = 0$ l'équation d'une ligne quelconque, u étant une fonction homogène de x, y et $z = 1$, d'un degré égal à k.

Si un point d'inflexion y est donné par $y'' = 0$, u'_x, u'_y, et u''_{x^2}, u''_{xy}, u''_{y^2} étant, en ce point, de valeurs finies, on aura

$$u = 0, \quad u'_x + y'u'_y = 0 \quad \text{et} \quad u''_{x^2} + 2u''_{xy}y' + u''_{y^2}y'^2 = 0,$$

ou

$$u = 0, \quad u'_x + mu'_y = 0, \quad u''_{x^2} + 2mu''_{xy} + m^2u''_{yz} = 0,$$

en posant $y' = m$.

En tenant compte des identités

$$(k-1)u'_x = xu''_{x^2} + yu''_{xy} + zu''_{xz}, \ldots,$$

$$\begin{aligned} ku &= xu'_x + yu'_y + zu'_z \\ &= x^2u''_{x^2} + y^2u''_{y^2} + z^2u''_{z^2} + 2yzu''_{yz} + 2zxu''_{zx} + 2xyu''_{xy}, \end{aligned}$$

ces équations seront

$$x^2u''_{x^2} + y^2u''_{y^2} + z^2u''_{z^2} + 2yzu''_{yz} + 2zxu''_{zx} + 2xyu''_{xy} = 0,$$

$$xu''_{x^2} + yu''_{xy} + zu''_{xz} + m(xu''_{xy} + yu''_{y^2} + zu''_{yz}) = 0,$$

$$u''_{x^2} + 2mu''_{xy} + m^2u''_{y^2} = 0.$$

Or elles expriment que le point (xy) est à la fois sur la conique que représente l'équation

$$\varphi(X, Y, Z) = X^2 u''_{x^2} + Y^2 u''_{y^2} + Z^2 u''_{z^2} + 2YZ u''_{yz} + 2ZX u''_{zx} + 2XY u''_{xy} = 0,$$

et sur une asymptote de cette conique donnée par

$$X u''_{x^2} + Y u''_{xy} + Z u''_{xz} + m(X u''_{xy} + Y u''_{y^2} + Z u''_{yz}) = 0,$$
$$u''_{x^2} + 2u''_{xy} m + u''_{y^2} m^2 = 0.$$

Il s'ensuit que la conique est le système de deux droites. Son centre lui appartenant alors, on a pour ce centre

$$\varphi'_X = 0, \quad \varphi'_Y = 0, \quad \varphi'_Z = 0,$$

d'où l'équation de Hesse :

$$\begin{vmatrix} u''_{x^2} & u''_{xy} & u''_{xz} \\ u''_{yx} & u''_{y^2} & u''_{yz} \\ u''_{zx} & u''_{zy} & u''_{z^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Si u est une fonction entière du degré n, cette équation est du degré $3(n-2)$. Le nombre des points d'inflexion est alors, en général, $3n(n-2)$.