

LE BESGUE

Sur l'équation du troisième degré

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 9
(1870), p. 529-531

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__529_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1870, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ;

PAR M. LE BESGUE.

La communication si bienveillante faite par M. Catalan à M. Gerono d'une vieille lettre que j'avais complètement oubliée, m'engage à démontrer directement la formule suivante.

THÉORÈME. — Si l'on pose

$$(a) \quad a^2(p^2 - 3q) + a(pq - 9r) + q^2 - 3pr = 0,$$

l'équation

$$(1) \quad x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

sera résolue par la formule

$$(A) \quad 3x + p = \sqrt[3]{(p^2 - 3q)(3a + p)} - \frac{p^2 - 3q}{\sqrt[3]{(p^2 - 3q)(3a + p)}}.$$

Démonstration. — L'équation (1) peut être mise sous la forme

$$\left(x + \frac{p}{3}\right)^3 + \left(q - \frac{p^2}{3}\right)x - \frac{p^3}{27} + r = 0,$$

et, quand on admet la condition

$$p^2 = 3q,$$

il vient

$$(3x + p)^3 = p^3 - 27r = u^3;$$

d'où

$$x = \frac{u - p}{3} \quad \text{et} \quad \frac{1}{x} = \frac{3}{u - p} = \frac{3(u^2 + up + p^2)}{u^3 - p^3},$$

ou

$$(B) \quad \frac{1}{x} = -\frac{u^2 + up + p^2}{9r}.$$

Si l'équation (1) est mise sous la forme

$$(2) \quad \left(\frac{1}{x}\right)^3 + \frac{q}{r} \left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{p}{r} \left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{r} = 0,$$

et que l'on admette la condition

$$(3) \quad \frac{q^2}{r^2} = 3 \frac{p}{r} \quad \text{ou} \quad q^2 = 3pr,$$

en changeant dans (B) x en $\frac{1}{x}$, p , q , r en $\frac{q}{r}$, $\frac{p}{r}$, $\frac{1}{r}$, la formule (B) devient, réduction faite,

$$(C) \quad 3x + p = \sqrt[3]{(3q - p^2)p} - \frac{3q - p^2}{\sqrt[3]{(3q - p^2)p}},$$

comme on le trouve en éliminant r au moyen de la condition (3).

Cela posé, si (1) ne donne pas la condition (3), on fera $x = y + a$, et l'équation (1) deviendra

$$(4) \quad y^3 + p'y^2 + q'y + r' = 0,$$

ou

$$p' = 3a + p, \quad q' = 3a^2 + 2ap + q, \quad r' = a^3 + pa^2 + qa + r;$$

d'où l'on tire

$$3q' - p'^2 = 3q - p^2,$$

$$q'^2 - 3p'r' = (p^2 - 3q)a^2 + (pq - 9r)a + q^2 - 3pr;$$

de sorte que l'équation (a) établit la condition

$$q'^2 = 3p'r'.$$

La formule (C) devient alors

$$3y + p' = \sqrt[3]{(3q' - p'^2)p'} - \frac{3y' - p'^2}{\sqrt[3]{(3q' - p'^2)}},$$

qui revient à

$$3x + p = \sqrt[3]{(3q - p^2)(3a + p)} - \frac{3q - p^2}{\sqrt[3]{(3q - p^2)(3a + p)}}.$$

(531)

La discussion de cette formule paraît moins facile que celle de la formule ordinaire.
