Nouvelles annales de mathématiques

J. Bourget

Note sur la théorie des racines

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 505-513

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__505_1>

NOTE SUR LA THÉORIE DES RACINES;

PAR M. J. BOURGET.

On peut partager la racine d'un nombre en deux parties de diverses manières, en dizaines et unités, en centaines et unités, etc.

Le théorème général qui donne la puissance de la somme de deux nombres permet d'appliquer à la recherche de chacune de ces parties des procédés uniformes, quel que soit le mode de partage. De plus, les méthodes abrégées ne sont qu'une application de ces procédés généraux. C'est ce que nous nous proposons de montrer dans cette Note (*).

(*) Il est bien probable que la plupart de nos idées ne sont pas nouvelles; mais nous croyons faire une chose utile aux élèves en publiant dans les *Annales* un ensemble coordonné de toutes celles qui se rattachent à la racine carrée et à la racine cubique.

I. — *Racine carrée.*

Désignons par N le nombre entier dont nous extrayons la racine, et supposons que nous partagions la racine en mille et unités; désignons par a et b ces deux parties, la racine sera $1000a + b$ par défaut.

Théorème I. — *On obtient exactement les mille de la racine, en extrayant la racine du plus grand carré contenu dans les millions du nombre proposé.*

Démonstration. — Appelons A le nombre des millions de N et B le nombre des unités, de telle façon que l'on ait

$$N = 1000^2 A + B.$$

Si a désigne la racine du plus grand carré contenu dans A, on a

$$a^2 \leqq A < (a+1)^2,$$

par suite,

$$1000^2 a^2 \leqq 1000^2 A < 1000^2 (a+1)^2;$$

Mais les deux derniers nombres diffèrent au moins d'un million; donc on a encore

$$1000^2 a^2 \leqq 1000^2 A + B < 1000^2 (a+1)^2,$$

ou bien, ce qui est la même chose,

$$(1000a)^2 \leqq N < [1000(a+1)]^2.$$

La racine contient donc a mille et n'en contient pas $a+1$.

C. Q. F. D.

Théorème II. — *Désignons par* R *le reste obtenu en retranchant du nombre* N *le carré des mille de la racine, on obtient une limite supérieure du nombre des unités en divisant les mille du reste par le double des mille de la racine et prenant le quotient par défaut.*

Démonstration. — Par hypothèse, nous avons

$$(1000a + b)^2 \leqq N;$$

en développant nous en déduisons

$$2000ab + b^2 \leqq N - 1000^2 a^2;$$

donc

$$2000ab < R;$$

donc aussi

$$b < \frac{R}{2000a}.$$

D'où l'on voit que b est au plus égal à la partie entière de ce quotient pris par défaut.

C. Q. F. D.

Remarque I. — Pour faire la division de R par $2000a$, nous appliquerons le principe général de la division par un produit de facteur, par conséquent nous serons amenés à diviser les mille du reste par $2a$.

Remarque II. — Notre raisonnement suppose que b ne soit pas nul. S'il l'était, le reste serait tout au plus égal à $2000a$, d'après le théorème sur la différence des carrés de deux nombres consécutifs. Donc on sera averti que b est nul par l'opération même, quand le quotient $\frac{R}{2000a}$ sera l'unité exactement, ou sera moindre que l'unité.

Théorème III. — *On obtient une limite inférieure du nombre des unités en divisant les mille du reste* R *par le double des mille obtenus plus un, et prenant le quotient par défaut.*

Démonstration. — 1° Le quotient obtenu par cette règle est inférieur à 1000.

En effet, on a, par hypothèse,

$$N < (1000a + b + 1)^2,$$

ou bien

$$N < 1000^2 a^2 + 2000a(b+1) + (b+1)^2;$$

donc

$$R < (b+1)(2000a + b + 1).$$

Mais b vaut au plus 999; donc on aura certainement

$$R < 1000(2000a + 1000);$$

de là on conclut

$$\frac{R}{1000(2a+1)} < 1000.$$

Donc la partie entière du quotient vaudra au plus 999.

C. Q. F. D.

2° Ce quotient réduit à sa partie entière par défaut est une limite inférieure du nombre des unités.

Désignons par q ce quotient pris par défaut, il viendra

$$\frac{R}{1000(2a+1)} \geqq q;$$

donc

$$N - 1000^2 a^2 \geqq 2000aq + 1000q;$$

mais 1000 étant supérieur à q, on aura certainement

$$N > 1000a^2 + 2000aq + q^2,$$

ou bien

$$N > (1000a + q)^2.$$

C. Q. F. D.

Remarque. — Notre raisonnement suppose q différent de zéro. Dans ce dernier cas, la racine est toute trouvée et le théorème devient inutile.

Théorème IV. — *Si le nombre des mille surpasse* 500, *les deux limites ne diffèrent pas d'une unité.*

Démonstration. — En effet, en désignant par δ cette différence, on a

$$\delta = \frac{R}{2000a} - \frac{R}{2000a + 1000} = \frac{1000R}{2000a \cdot 1000(2a+1)},$$

ou enfin

$$\delta = \frac{\left[\frac{R}{1000(2a+1)}\right]}{2a}.$$

Or le numérateur de δ est moindre que 1000; donc, si $a \geqq 500$, δ sera moindre qu'une unité. C. Q. F. D.

THÉORÈME V. — *Si l'on a déjà obtenu plus de la moitié des chiffres d'une racine carrée, ou simplement la moitié, lorsque le premier chiffre vaut* 5 *ou plus de* 5, *on obtiendra à moins d'une unité la portion restante de la racine, si l'on divise par le double du nombre obtenu déjà les unités de même nature du reste, en prenant le quotient par défaut.*

Démonstration. — En effet, dans ce cas δ est inférieur à l'unité; donc la première des divisions

$$\frac{R}{2000a}$$

donnera, si l'on prend le quotient q par défaut, soit le nombre b des unités, soit le nombre $b+1$, trop fort d'une quantité moindre qu'une unité. C. Q. F. D.

C'est la *méthode abrégée* de la racine carrée.

Corollaire I. — Désignons par q le quotient entier pris par défaut de la division

$$\frac{R}{2000a}$$

et par ρ le reste, le quotient q sera égal à b si $\rho \geqq q^2$, il sera égal à $b+1$ si $\rho < q^2$.

En effet, nous avons par hypothèse

$$\frac{R}{2000a} = q + \frac{\rho}{2000a};$$

donc

$$N - 1000^2 a^2 = 2000aq + \rho;$$

par suite,

$$N = (1000a + q)^2 + \rho - q^2.$$

Cette égalité démontre le corollaire énoncé.

Corollaire II. — Dans le cas où q est égal à b, on voit que le reste final de l'opération est égal à la différence $\rho - q^2$.

II. — *Racine cubique.*

Conservons les mêmes notations que ci-dessus. Supposons encore que la racine cubique du nombre N soit décomposée en mille et unités; nous pourrons établir les théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — *On obtient exactement les mille de la racine cubique, en extrayant la racine du plus grand cube contenu dans les billions du nombre proposé.*

Démonstration semblable à celle qui a été donnée pour le cas de la racine carrée.

THÉORÈME II. — *Désignons par* R *le reste obtenu en retranchant du nombre* N *le cube des mille de la racine. On obtient une limite supérieure du nombre des unités en divisant les millions du reste par le triple carré des mille obtenus et prenant le quotient par défaut.*

Démonstration semblable à celle qui a été donnée pour le cas de la racine carrée.

THÉORÈME III. — *On obtient une limite inférieure du nombre des unités en divisant les millions du reste par* $3a^2 + 3a + 1$ (*a représente le nombre des mille de la racine*) *et prenant le quotient par défaut.*

Démonstration. — 1° Le quotient ainsi obtenu est inférieur à 1000. Nous avons en effet, par hypothèse,

$$N < (1000a + b + 1)^3,$$

ou bien

$$N < 1000^3 a^3 + 3 . 1000^2 (b+1) a^2 + 3 . 1000 (b+1) a + (b+1)^3;$$

donc

$$R < (b+1)[3 . 1000^2 a^2 + 3 . 1000 (b+1) a + (b+1)^2].$$

Mais b vaut au plus 999 ; donc on aura, en remplaçant b par cette valeur maximum,

$$R < 1000^3 (3a^2 + 3a + 1).$$

Par conséquent,

$$\frac{R}{1000^2(3a^2 + 3a + 1)} < 1000.$$

Donc la partie entière de ce dernier quotient pris par défaut vaut au plus 999. C. Q. F. P.

2° Ce quotient pris par défaut est une limite inférieure du nombre des unités.

En effet, en le désignant par q, nous avons

$$\frac{R \text{ ou } (N - 1000^3 a^3)}{1000^2(3a^2 + 3a + 1)} \geqq q;$$

donc

$$N \geqq 1000^3 a^3 + 3 . 1000^2 a^2 q + 3 . 1000^2 aq + 1000^2 q.$$

Mais, puisque 1000 est supérieur à q, on peut écrire

$$N > 1000^3 a^3 + 3 . 1000^2 a^2 q + 3 . 1000 aq^2 + q^3,$$

ou bien

$$N > (1000a + q)^3;$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

Théorème IV. — *Si le nombre des mille a quatre chiffres ou plus, les deux limites ont une différence moindre qu'une unité.*

En effet,

$$\delta = \frac{R}{1000^2 . 3a^2} - \frac{R}{1000^2(3a^2 + 3a + 1)};$$

donc, en réduisant,

$$\delta = \frac{R}{1000^2(3a^2 + 3a + 1)} \cdot \frac{3a + 1}{3a^2}.$$

Nous avons vu que la première fraction est inférieure à 1000, donc δ sera inférieur à l'unité si

$$\frac{3a^3}{3a+1} \geqq 1000,$$

ou si l'on a

$$3a^2 - 3000a - 1000 \geqq 0,$$

ou

$$a^2 - 1000a - \frac{1000}{3} \geqq 0.$$

Cette inégalité sera satisfaite, si l'on a

$$(a - 500)^2 - 501^2 \geqq 0,$$

ou bien

$$(a - 1001)(a + 1) \geqq 0.$$

Donc il suffit que a soit plus grand que 1000 pour que la condition soit satisfaite, comme nous l'avions énoncé.

Donc la différence entre les deux limites est inférieure à l'unité, quand le nombre des chiffres obtenus surpasse d'une unité au moins le nombre des chiffres à obtenir.

Théorème V. — *Quand on a obtenu plus de la moitié des chiffres d'une racine cubique, on obtient à moins d'une unité la partie restante, en divisant le reste par le triple carré de la partie obtenue et prenant le quotient par défaut.*

En effet, dans ce cas, le δ est inférieur à l'unité, par suite, le quotient, limite supérieure,

$$\frac{R}{1000^2 . 3a^2}$$

réduit à sa partie entière, prise par défaut donnera b ou $b+1$.

C'est la méthode abrégée d'extraction de la racine cubique.

Avec trois chiffres d'une racine, on passera à cinq, de là à neuf, de là à dix-sept, etc.

Corollaire. — Si nous désignons par q le quotient précédent et par ρ le reste, le quotient q représente b si $\rho \geqq q^2(3000a+q)$ et $b+1$ si $\rho < q^2(3000a+q)$.

En effet, par hypothèse,

$$N - 1000^3 a^3 = 1000^2 . 3a^2 . q + \rho ;$$

donc

$$\begin{aligned} N = {} & 1000^3 a^3 + 3 . 1000^2 . a^2 q + 3 . 1000 a q^2 + q^3 \\ & - 3 . 1000 a q^2 - q^2 + \rho ; \end{aligned}$$

par suite,

$$N = (1000a + q)^3 + \rho - q^2(3000a + q).$$

Cette égalité démontre le corollaire. Nous voyons en même temps que si q représente b, le reste final de l'opération est

$$\rho - q^2(3000a + q).$$

Remarque. — On étendrait évidemment ces considérations aux racines de degrés supérieurs ; mais cette généralisation n'aurait aucune utilité.