NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ÉDOUARD LUCAS

Note sur les sommes des puissances semblables des n premiers nombres entiers

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 49-53

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__49_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1870, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

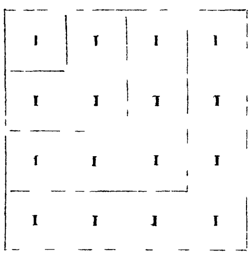
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

NOTE SUR LES SOMMES DES PUISSANCES SEMBLABLES DES n PREMIERS NOMBRES ENTIERS;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

1. Considérons le carré formé en plaçant les unes au-dessous des autres n rangées horizontales de n unités; on peut, comme on sait, grouper les n^2 unités de ce carré de manière à représenter la série des nombres impairs, et l'on voit facilement ainsi que *la somme des n premiers nombres impairs est égale à n^2.*



On peut, de la façon précédente, déterminer un certain nombre de sommes, et trouver, en particulier, quelques relations simples entre les sommes des puissances semblables des n premiers nombres entiers.

2. Considérons le carré formé en répétant n fois la rangée horizontale des n premiers nombres et décomposons ce carré de la même façon que nous l'avons fait ci-dessus.

La somme de tous les nombres renfermés dans le carré est égale à n fois la somme s_1 des n premiers nombres, c'est-à-dire à

$$ns_1 = \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

D'autre part, la somme des termes contenus dans le $p^{\text{ième}}$ groupe se compose de deux parties : la partie horizontale,

1	2	3	4
1	2	3	4
1	2	3	4
1	2	3	4

qui est égale à la somme des p premiers nombres, et la partie verticale, qui est égale à $(p-1)p$. Donc la somme des termes du $p^{\text{ième}}$ groupe est

$$p(p-1) + \frac{p(p+1)}{2} = \frac{3}{2}p^2 - \frac{1}{2}p,$$

et, en additionnant tous les groupes, on obtient, en désignant par s_2 la somme des carrés de n premiers nombres,

$$\frac{3}{2}s_2 - \frac{1}{2}s_1 = \frac{n^2(n+1)}{2},$$

d'où l'on tire

$$s_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. Considérons encore le carré formé par la table de Pythagore; la somme des termes renfermés dans cette

table est égale à la somme s_1 des n premiers nombres multipliée par $(1 + 2 + 3 + \ldots + n)$, c'est-à-dire égale à s_1^2.

1	2	3	4
2	4	6	8
3	6	9	12
4	8	12	16

D'autre part, la somme des termes du $p^{ième}$ groupe est égale à

$$2p(1 + 2 + \ldots + p) - p^2 = p^3.$$

Donc, en additionnant tous les groupes, on a

$$s_3 = s_1^2;$$

et on retrouve ainsi ce théorème connu, que *la somme des cubes des n premiers nombres est égale au carré de la somme de ces n premiers nombres.*

4. En opérant de même sur le carré formé en prenant les carrés des termes de la table de Pythagore, on voit que la somme de tous les termes est égale à s_2^2, et que la somme des termes du $p^{ième}$ groupe est égale à

$$2p^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + p^2) - p^4 = \frac{p^3}{3}(2p^2 + 1);$$

d'où l'on tire

$$2s_5 + s_3 = 3s_2^2.$$

5. En appliquant le même raisonnement au carré formé des cubes des termes de la table de Pythagore, on

trouverait encore

$$s_7 + s_5 = 2s_3^2.$$

6. Au lieu de la série des nombres entiers, on peut encore considérer celle des nombres triangulaires, pyramidaux, etc.; celle des sinus des multiples de l'arc x; celle des puissances successives d'un nombre donné, etc.

Prenons, par exemple, le carré formé de la manière suivante. On dispose sur une ligne horizontale les nombres

$$\frac{1}{1.2}, \quad \frac{1}{2.3}, \quad \frac{1}{3.4}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{n(n+1)},$$

dont la somme est, comme on sait, égale à $\frac{n}{n+1}$, et on multiplie successivement tous les termes de cette ligne par chacun des termes $\frac{1}{1.2}, \frac{1}{2.3}, \frac{1}{3.4}, \ldots$, pour former les 1^re^, 2^e^, 3^e^,... lignes d'un carré de n^2 termes, dont la somme totale est égale à $\left(\frac{n}{n+1}\right)^2$.

D'autre part, en décomposant ces groupes comme précédemment, on voit que la somme des termes du $p^{ième}$ groupe est égale à

$$2.\frac{1}{p(p+1)}\left[\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{p(p+1)}\right]-\frac{1}{p^2(p+1)^2},$$

ou égale à

$$\frac{2}{(p+1)^2}-\frac{1}{p^2(p+1)^2};$$

et, en faisant la somme de tous les groupes, on a

$$2\sum_{p=1}^{p=n}\frac{1}{(p+1)^2}-\sum_{p=1}^{p=n}\frac{1}{p^2(p+1)^2}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^2.$$

Si l'on fait, en particulier, $n = \infty$, on trouve

$$2\left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right) - \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{p^2(p+1)^2} = 1 \text{ (*)},$$

d'ou l'on déduit

$$\frac{1}{1^2.2^2} + \frac{1}{2^2.3^2} + \frac{1}{3^2.4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6} - 3.$$