NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Questions

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 430-432

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__430_1>

QUESTIONS.

999. S_m désignant la somme des puissances $m^{\text{ièmes}}$ des racines de l'équation

$$A_1 x^n + A_2 x^{n-1} + \ldots + A_m x^{n-m+1} + \ldots + A_n x + A_{n+1} = 0,$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$A_m = \frac{a^m - b^m}{a - b},$$

on a, depuis $m = 1$ jusqu'à $m = n$ inclusivement,

$$S_m = -(a^m + b^m).$$

On déduit de là que, a et b étant réels, l'équation considérée ne peut avoir deux racines réelles.

(S. Realis.)

1000. S_m désignant la somme des puissances $m^{\text{ièmes}}$ des racines de l'équation

$$x^n + a x^{n-1} + \frac{a(a+1)}{2} x^{n-2} + \frac{a(a+1)(a+2)}{2.3} x^{n-3} + \ldots + \frac{a(a+1)(a+2)(a+3)\ldots(a+n-1)}{2.3.4\ldots n} = 0,$$

on a

$$S_n = S_{n-1} = S_{n-2} = \ldots = S_2 = S_1 = -a,$$

$$S_{n+1} = \frac{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}{2.3.4\ldots n} - a,$$

On déduit de là que, a étant positif, l'équation considérée ne peut avoir deux racines réelles; ce qui s'accorde avec l'énoncé de la question 776 (2ᵉ série, t. V, p. 432).

Note. — Pour l'équation

$$x^n + \frac{x^{n-1}}{1} + \frac{x^{n-2}}{1.2} + \frac{x^{n-3}}{1.2.3} + \ldots + \frac{x}{1.2.3\ldots(n-1)} + \frac{1}{1.2.3\ldots n} = 0,$$

on a évidemment

$$S_2 = S_3 = S_4 = \ldots = S_{n-1} = S_n = 0,$$

et l'on reconnaît de même que l'équation ne peut avoir deux racines réelles; ce qui s'accorde avec la question 775.

(S. Realis.)

1001. Quelque valeur entière et positive que l'on donne à a et à m, l'expression

$$\frac{(a^2 + a)[(a+1)^{m-1} - a^{m-1}]}{m-1}$$

n'est pas la $m^{ième}$ puissance d'un nombre entier, et le nombre

$$\frac{m(a^2 + a)[(a+1)^{m-1} - a^{m-1}]}{(m-1)[(a+1)^m - a^m]}$$

n'est pas entier. (S. Realis.)

1002. En un point d'une ellipse, on prend sur la normale en dehors de la courbe une longueur égale au rayon de courbure en ce point : le cercle décrit sur cette longueur comme diamètre coupe orthogonalement le cercle lieu des angles droits circonscrits à l'ellipse.

(Steiner.)

1003. Les équations tangentielles d'un cône droit touchant trois plans donnés (u_1, v_1, w_1), (u_2, v_2, w_2), (u_3, v_3, w_3) sont, dans le cas des axes rectangulaires :

$$\begin{vmatrix} u & v & w & 1 \\ u_1 & v_1 & w_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} u & v & w & \sqrt{u^2+v^2+w^2} \\ u_1 & v_1 & w_1 & \sqrt{u_1^2+v_1^2+w_1^2} \\ u_2 & v_2 & w_2 & \sqrt{u_2^2+v_2^2+w_2^2} \\ u_3 & v_3 & w_3 & \sqrt{u_3^2+v_3^2+w_3^2} \end{vmatrix} = 0;$$

les signes des radicaux sont indépendants; il y a quatre solutions. (L. PAINVIN.)

1004. Par deux points fixes, on mène un cercle variable; soient *a* et *b* deux des points où ce cercle coupe une conique fixe; le cercle variant, la droite *ab* enveloppe une courbe : construire géométriquement le point de contact de *ab* avec son enveloppe.

(LAGUERRE.)

1005. On donne une surface du second degré et une sphère; si l'on désigne par α, β, γ les angles sous lesquels trois plans diamétraux de la surface (ou trois diamètres conjugués) rencontrent la sphère, et par A, B, C les aires des sections déterminées par ces plans (ou les longueurs des diamètres), on a la relation

$$A^2 \sin^2\alpha + B^2 \sin^2\beta + C^2 \sin^2\gamma = \text{const.}$$

(H. FAURE.)

1006. L'aire de la courbe lieu du centre d'une ellipse qui roule sans glisser sur une droite fixe est la moyenne arithmétique entre les aires des cercles décrits sur les axes comme diamètres. (H. BROCARD.)