Solutions des questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 417-428
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__417_1>

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 853

(voir 2e série, t. VII, p. 138);

PAR M. E. PELLET.

Trouver la somme des séries suivantes :

(1) 1°
$$\sum \frac{\varphi(n)}{1.2.3\ldots n},$$

dans laquelle $\varphi(n)$ *est un polynôme du degré* p;

(2) 2°
$$\sum \frac{\varphi(n)}{f(n)},$$

où l'on a

$$f(n) = (n+a)(n+a+1)\ldots(n+a+p)$$

et où $\varphi(n)$ *est un polynôme au plus du degré* $(p-1)$.

(DARBOUX.)

Les deux séries (1) et (2) sont convergentes.

En effet, dans la première, le rapport d'un terme au précédent, $\frac{\varphi(n+1)}{(n+1)\varphi(n)}$, est nul pour $n=\infty$. Dans la seconde, ce rapport est $\frac{f(n)\varphi(n+1)}{f(n+1)\varphi(n)}$.

Soit

$$\varphi(n)=\mathrm{A}_0 n^{\mu}+\mathrm{A}_1 n^{\mu-1}+\ldots.$$

Le rapport précédent devient

$$\frac{\mathrm{A}_0 n^{p+\mu+1}+\left[\mathrm{A}_0(p+1)\left(a+\frac{p}{2}\right)+\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_0\mu\right]n^{p+\mu}+\ldots}{\mathrm{A}_0 n^{p+\mu+1}+\left[\mathrm{A}_0(p+1)\left(a+1+\frac{p}{2}\right)+\mathrm{A}_1\right]n^{p+\mu}+\ldots}.$$

La quantité

$$(p+1)\left(a+\frac{p}{2}\right)+\frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{A}_0}+\mu-(p+1)\left(a+1+\frac{p}{2}\right)-\frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{A}_0}+1,$$

ou

$$\mu-p,$$

étant négative, puisque μ est au plus égal à $p-1$, la série (2) est convergente. On voit, en outre, que la convergence de ces séries est indépendante du signe des termes, qu'on peut grouper dès lors d'une manière quelconque.

Limite de la première série. On a

$$\varphi(n)=\varphi(0)+\frac{n}{1}\frac{\Delta\varphi(0)}{1}+\frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2\varphi(0)+\ldots$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(p-1)]}{1.2.3\ldots p}\Delta^p\varphi(0),$$

$\Delta^{\mu}\varphi(0)$ étant la différence du $\mu^{ième}$ ordre de la première des quantités

$$\varphi(0),\quad \varphi(1),\quad \varphi(2),\ldots,\quad \varphi(p).$$

Par conséquent,

$$\sum \frac{\varphi(n)}{1.2.3\,..n} = e\left[\varphi(0) + \frac{\Delta\varphi(0)}{1} + \frac{\Delta^2\varphi(0)}{1.2} + \frac{\Delta^3\varphi(0)}{1.2.3} + \ldots + \frac{\Delta^p\varphi(0)}{1.2.3..\,p}\right],$$

e étant la base des logarithmes népériens. Cette formule suppose que $\frac{1}{1.2.3\ldots n}$ est égal à 1 pour $n = 0$.

Limite de la deuxième série. On a

$$\begin{aligned}\varphi(n) = \varphi(-a) &+ \frac{n+a}{1}\,\frac{\Delta\varphi(-a)}{-1}\\ &+ \frac{(n+a)(n+a+1)}{1.2}\,\frac{\Delta^2\varphi(-a)+\ldots}{(-1)^2}\\ &+ \frac{(n+a)(n+a+1)\ldots(n+a+p-2)}{1.2.3\ldots(p-1)}\,\frac{\Delta^{p-1}\varphi(-a)}{(-1)^{p-1}},\end{aligned}$$

$\Delta^\mu\varphi(-a)$ étant la différence du $\mu^{ième}$ ordre de la première des quantités

$$\varphi(-a),\quad \varphi(-a-1),\ldots,\quad \varphi(-a-p+1).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\sum\frac{\varphi(n)}{f(n)} = &\frac{\varphi(-a)}{1}\,\frac{1}{p}\,\frac{1}{a(a+1)\ldots(a+p-1)}\\ &-\frac{\Delta\varphi(-a)}{1}\,\frac{1}{p-1}\,\frac{1}{(a+1)(a+2)\ldots(a+p-1)}\\ &+\frac{\Delta^2\varphi(-a)}{1.2}\,\frac{1}{p-2}\,\frac{1}{(a+2)\ldots(a+p-1)}\\ &-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &(-1)^{p-1}\,\frac{\Delta^{p-1}\varphi(-a)}{1.2.3\ldots(p-1)}\,\frac{1}{p-p+1}\,\frac{1}{a+p-1}.\end{aligned}$$

Question 869

(voir 2^e série, t. VII, p. 237);

PAR M. E. PELLET,

Si l'on pose

$$f_m(x) = 1 + \left(\frac{m}{1}\right)^2 x + \left[\frac{m(m-1)}{1.2}\right]^2 x^2 + \ldots$$
$$+ \left[\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}\right]^2 x^n + \ldots + x^m,$$

1° *Les équations*

$$f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = 0, \ldots, \quad f_m(x) = 0$$

auront toutes leurs racines réelles et inégales;

2° *Les racines de l'équation* $f_m(x) = 0$ *sépareront les racines de l'équation* $f_{m+1}(x) = 0$.

(H. LAURENT.)

En rendant homogène le polynôme $f_m(x)$, on a

$$f_m(x, t) = \sum \left(\frac{P_m}{P_m P_{m-n}}\right)^2 x^n t^{m-n}.$$

En posant

$$P_m = 1.2.3\ldots m,$$

on en déduit

$$x\frac{df_m}{dx} = \sum n \left(\frac{P_m}{P_n P_{m-n}}\right)^2 x^n t^{m-n},$$

$$x^2\frac{d^2 f_m}{dx^2} + x\frac{df_m}{dx} = \sum n^2 \left(\frac{P_m}{P_n P_{m-n}}\right)^2 x_n t^{m-n}$$
$$= m^2 x \sum \left(\frac{P_{m-1}}{P_{n-1} P_{m-n}}\right)^2 x^{n-1} t^{m-n} = m^2 x f_{m-1},$$

et, en remplaçant les différentiations par rapport à x par les différentiations relatives à t,

$$t^2\frac{d^2 f_m}{dt^2} + t\frac{df_m}{dt} = m^2 t f_{m-1},$$

et en ajoutant membre à membre

$$(1)\qquad x^2\frac{d^2f_m}{dx^2}+t^2\frac{d^2f_m}{dt^2}+x\frac{df_m}{dx}+t\frac{df_m}{dt}=m^2f_{m-1}(x+t).$$

Posons

$$xt\frac{d^2f_m}{dt\,dx}=\varphi;$$

on a

$$\varphi=\sum n(m-n)\left(\frac{P_m}{P_n\,P_{m-n}}\right)^2x^n t^{m-n};$$

d'où

$$x\frac{d\varphi}{dx}=x\sum n^2(m-n)\left(\frac{P_m}{P_n\,P_{m-n}}\right)^2x^{n-1}t^{m-n}$$

$$=m^2xt\sum(m-n)\left(\frac{P_{m-1}}{P_{n-1}\,P_{m-n}}\right)^2x^{n-1}t^{m-1-n}=m^2xt\frac{df_{m-1}}{dt};$$

de même

$$t\frac{d\varphi}{dt}=m^2xt\frac{df_{m-1}}{dx};$$

d'où

$$(2)\qquad 2\left(x\frac{d\varphi}{dx}+t\frac{d\varphi}{dt}\right)=2m\varphi=2m^2xt\frac{df_{m-1}}{dx}.$$

Ajoutant les relations (1) et (2), après avoir divisé la seconde par m, et remarquant qu'on a

$$x\frac{df_m}{dx}+t\frac{df_m}{dt}=mf_m,$$

$$x^2\frac{d^2f_m}{dx^2}+2xt\frac{d^2f_m}{dx\,dt}+t^2\frac{d^2f_m}{dt^2}=m(m-1)f_m,$$

il vient

$$m^2f_m=m^2f_{m-1}(x+t)+2mxt\left(\frac{df_{m-1}}{dx}+\frac{df_{m-1}}{dt}\right),$$

ou, en remplaçant t par 1 et $\frac{df_{m-1}}{dt}$ par $f_{m-1}-xf'_{m-1}$,

$$(3)\qquad f_m=\frac{(3m-2)x+m}{m}f_{m-1}+\frac{2x}{m}(1-x)f'_{m-1}.$$

Le théorème se vérifie aisément pour m égal à 1, 2, 3,.... Pour le démontrer dans sa généralité, il suffit de prouver que, s'il a lieu pour une valeur de m, il a lieu par cela même pour la valeur de m immédiatement supérieure.

Supposons que l'équation $f_{m-1} = 0$ ait toutes ses racines réelles et inégales, et soient a_μ et $a_{\mu+1}$ deux racines consécutives de cette équation; elles réduisent f_m à $\frac{2x(1-x)}{m} f'_{m-1}$. Les quantités a_μ et $a_{\mu+1}$ sont négatives, puisque f_{m-1} n'offre pas de variations; elles donnent, par conséquent, le même signe au facteur $\frac{2x(1-x)}{m}$; mais f'_{m-1} prend des valeurs de signe contraire. Par conséquent, les nombres a_μ, $a_{\mu+1}$ comprennent au moins une racine de f_m. En appliquant ce raisonnement à tous les intervalles des racines de $f_{m-1} = 0$, on voit que les racines de $f_m = 0$ sont séparées par les nombres

$$-\infty \quad a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, \quad 0,$$

$a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ étant les racines de f_{m-1} rangées suivant leur ordre de grandeur.

Remarque. — Si dans la relation (3) on fait $x = 1$, elle devient

$$1 + \left(\frac{m^2}{1}\right)^2 + \left[\frac{m(m-1)}{1.2}\right]^2 + \ldots = \frac{2(2m-1)}{m}\left[1 + \left(\frac{m-1}{1}\right)^2 + \ldots\right].$$

On en déduit

$$1 + \left(\frac{m}{1}\right)^2 + \ldots = \frac{1.2.3\ldots(2m-1)2m}{[1.2.3\ldots(m-1)m]^2}.$$

Note. — Cette question a été résolue aussi par M. H. Brocard, lieutenant du Génie.

Question 874

(voir 2e série, t. VII, p. 232);

PAR M. F.-P. POURCHEIROUX.

On donne un cercle et deux points, inscrire dans le cercle un triangle isoscèle dont les deux côtés égaux passent par les deux points donnés. (LEMAIRE.)

Soient O le cercle donné et M et N les deux points; soit ABC le triangle cherché (*). Je construis les polaires PD et PE de M et de N. Les pôles de AB et AC seront sur des perpendiculaires à ces droites menées du centre du cercle O; de plus, ils doivent se trouver respectivement sur PD et PE; D et E sont donc les pôles de AB et AC.

Cela posé, le point A étant sur AB et sur AC, sa polaire, qui est la tangente en ce point, doit passer par les pôles D et E de AB et de AC. Pour construire le triangle isoscèle, il suffira donc de construire les polaires de M et de N et de mener au cercle O une tangente telle, que le point de contact soit le milieu de la partie comprise entre les deux polaires. Ce point de contact A sera le sommet du triangle cherché.

La question 874 se trouve donc ramenée au problème suivant :

Mener entre deux droites une tangente à un cercle, de telle manière qu'elle soit partagée en deux parties égales par le point de contact.

Ce dernier problème a été résolu complétement par M. Morel (*voir* 2e série, t. VIII, p. 242).

Note. — La même question a été résolue par M. H. Brocard.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Question 991

(voir 2ᵉ série, t. IX, p. 240) ;

PAR M. C. CLAVENAD,
Élève au collége Chaptal.

Deux divisions homographiques se trouvent sur la même droite. Au point a de la première division correspond le point b de la seconde ; au point b, pris dans la première division, correspond le point c de la seconde ; au point c de la première division correspond le point d de la seconde, et ainsi de suite. On obtient ainsi une série indéfinie de points a, b, c, d,.... Prouver que ces points se rapprochent indéfiniment d'un des points doubles des divisions homographiques, ces points doubles étant supposés réels. (ÉMILE WEYR.)

1ʳᵉ *Solution.* — Je suppose que e et f (*) soient les deux points doubles et que je relève l'une des divisions suivant la droite ek, ek étant égal à ef ; les droites qui joignent les divers points homologues passant toutes par un même point.

Je considère le point m qui a pour homologue m', et je le rapporte en m'' par une parallèle $m'm''$ à kf. De même m'' considéré comme appartenant à la première division, a pour homologue m''', par conséquent m^{iv} ; et ainsi de suite ; on voit donc que les divers rayons om, om'',... se rapprochent indéfiniment de la position of ; et par suite m, m'',... se rapprochent de f.

La condition pour que ces points se rapprochent du second point double e est que l'on considère primitivement le point m comme appartenant à la deuxième division.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

2^e^ *Solution.* — On peut arriver au même résultat par les formules de l'homographie.

En prenant l'origine au point O milieu de la IJ′ qui unit les homologues de l'infini, l'homographie s'exprime par la formule

$$Om\,Om' + \lambda\, mm' + \nu = 0,$$

λ et ν étant des constantes

$$\lambda = \mathrm{OJ}', \quad \nu = \mathrm{OIOO}'.$$

Je puis remplacer mm' par $Om' - Om$, par exemple, en supposant $Om' > Om$.

Et j'obtiendrai Om' par la formule

$$(1) \qquad Om' = \frac{\lambda Om - \nu}{Om + \lambda}.$$

Pour que mm' soit un point double, il faut que $Om' = Om$.

Or, si dans l'expression (1) je remplace Om par la valeur même de Om', j'aurai le segment Om'' qui correspond à Om', m' étant considéré comme appartenant à la première division. En continuant ainsi de suite indéfiniment, l'expression (1) sera absolument la même que celle qui donne Om. Au numérateur et au dénominateur, et par conséquent à la limite, le point considéré est venu occuper la position du point double.

Question 994

(voir 2^e^ série, t IX, p. 288);

PAR M. H. LAURENT,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

Si, en un point M *d'un hyperboloïde, on mène la normale et qu'on la prolonge jusqu'à la rencontre de la surface, en nommant* R *et* R′ *les rayons de courbure* *principaux du point* M, N *la longueur de la normale, on a*

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}+\frac{2}{N}=0.$$

(Laurent.)

Il s'est glissé, dans l'énoncé de cette question, une erreur que je vais rectifier ; je profiterai aussi de l'occasion pour énoncer un théorème plus général.

Soit

$$f(x, y, z)=0$$

l'équation d'une surface quelconque. Si l'on pose

$$\frac{df}{dx}=l,\quad \frac{df}{dy}=m,\quad \frac{df}{dz}=n,$$

$$\frac{d^2f}{dx^2}=a,\quad \frac{d^2f}{dy^2}=a',\quad \frac{d^2f}{dz^2}=a'',$$

$$\frac{d^2f}{dy\,dz}=b,\quad \frac{d^2f}{dx\,dz}=b',\quad \frac{d^2f}{dx\,dy}=b'',$$

$$\delta=\sqrt{l^2+m^2+n^2},\quad \Delta=a+a'+a'';$$

si enfin l'on désigne par R et R' les rayons de courbure principaux en (x, y, z), et par u l'un quelconque d'entre eux, on a

$$\begin{vmatrix} a-\frac{\delta}{u} & b'' & b' & l \\ b & a'-\frac{\delta}{u} & b & m \\ b' & b & a''-\frac{\delta}{u} & n \\ l & m & n & 0 \end{vmatrix}=0;$$

d'où l'on conclut aisement

$$(1)\qquad \frac{1}{R}+\frac{1}{R'}=\frac{1}{\delta^3}\big[\Delta\delta^2-(al^2+a'm^2+a''n^2 + 2bmn+2b'ln+2b''lm)\big].$$

Si maintenant on considère la surface du second ordre osculatrice

$$\begin{aligned} o = f(x, y, z) &+ (\xi - x)\, l + (\eta - y)\, m + (\zeta - z)\, n \\ &+ \tfrac{1}{2}\big[a(\xi - x)^2 + a'(\eta - y)^2 + a''(\zeta - z)^2 + 2b(\zeta - z)(\eta - y) \\ &\qquad + 2b'(\xi - x)(\zeta - z) + 2b''(\xi - x)(\eta - y)\big], \end{aligned}$$

et si l'on cherche la longueur N de la corde normale en (x, y, z) à cette surface, on a

$$\xi - x = \frac{lN}{\delta}, \quad \eta - y = \frac{mN}{\delta}, \quad \zeta - z = \frac{nN}{\delta},$$

et, par suite, en observant que $f(x, y, z) = o$,

$$N(al^2 + a'm^2 + a''n^2 + 2bmn + 2b'ln + 2b''mb) + 2\delta^3 = o.$$

L'équation (1) devient alors

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{1}{\delta^3}\left[\Delta\delta^2 + \frac{2\delta^3}{N}\right],$$

ou bien, en appelant ν la valeur absolue de la normale,

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{\Delta}{\delta} \pm \frac{2}{\nu}.$$

Si l'on avait $\Delta = o$, on aurait

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \pm \frac{2}{\nu}.$$

Applications.

I. Prenons l'hyperboloïde dont l'équation est

$$Ayz + Bzx + Cxy = 1;$$

on a ici $\Delta = o$, donc

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \pm \frac{2}{\nu}.$$

Cet hyperboloïde est un hyperboloïde particulier sur lequel on peut appliquer trois droites de directions rectangulaires, puisque son cône asymptote contient les axes de coordonnées.

II. Dans le cylindre hyperbolique

$$xy = k^2,$$

on a

$$\frac{1}{R} = \pm \frac{2}{N},$$

ou, si l'on veut, dans l'hyperbole équilatère, le rayon de courbure est la moitié de la corde normale correspondante, propriété analogue à celle du cercle.