H. DURRANDE

Note sur les surfaces du quatrième ordre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 410-417
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__410_1>

NOTE SUR LES SURFACES DU QUATRIÈME ORDRE;

Par M. H. DURRANDE,
Professeur à la Faculte des Sciences de Rennes.

Depuis quelques années l'étude des surfaces de degré supérieur au second a pris une extension considérable; il suffit, pour s'en convaincre, de lire le remarquable Rapport de M. Bertrand sur les progrès des Sciences mathématiques, dont un extrait a été publié dans les *Nouvelles Annales*, 1868. Ce Rapport signale les beaux travaux de Cayley sur la surface des ondes, de Kummer sur une classification des surfaces du quatrième ordre, de MM. Moutard et Darboux sur quelques surfaces de cet ordre, jouissant de propriétés très-intéressantes, et enfin les études de M. de la Gournerie et de M. Chasles sur la développable circonscrite à deux surfaces du second ordre et sur la *quadrispinale*. (*Voir* les *Nouvelles Annales*.)

Je me propose, dans cette Note, d'étudier les surfaces du quatrième ordre d'une manière générale, en les considérant comme lieux des intersections successives des surfaces correspondantes de deux faisceaux de surfaces du second degré liées par une relation homographique. C'est de cette manière que M. Chasles a considéré la génération des courbes du quatrième et du troisième ordre dans un travail qui fait partie du tome XXXVII des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*. On voit ainsi avec une grande facilité comment les diverses particularités que présentent les surfaces du quatrième ordre se rattachent à des particularités analogues des surfaces génératrices. Je fais un grand usage des notations abrégées qui indiquent si simplement les propriétés des surfaces dont elles servent à former les équations. Le mode de génération des surfaces du quatrième ordre donne, comme cas particulier, celle des surfaces du troisième ordre.

Je donne un peu plus de développement au cas remarquable où les deux faisceaux de surfaces du second ordre sont composés de surfaces homothétiques, et en particulier à celui où l'on a deux faisceaux de sphères. On retrouve alors les belles propriétés des surfaces *anallagmatiques* étudiées par MM. Moutard et Darboux, surfaces dont le *tore* et la *cyclide* sont des cas particuliers.

Je rattache aussi la *surface des ondes* à ce mode de génération.

I. — *Définition des surfaces du quatrième ordre.*

(Comme le mot de *surfaces du second ordre* va revenir à chaque instant, je me servirai, pour désigner ces surfaces, d'un nom qui leur a été donné par Cayley, je crois, celui de *quadriques*. Il n'est pas encore aussi couramment employé que celui de *coniques*, donné aux courbes du second ordre; mais, puisqu'il est créé, je ne vois pas pourquoi on ne s'en servirait pas pour abréger le discours.)

Soient

$$S = 0, \quad S_1 = 0$$

les équations de deux *quadriques* ; l'équation

$$(1) \qquad S - \lambda S_1 = 0,$$

dans laquelle λ est un paramètre variable, représente un faisceau de *quadriques* passant toutes par les points communs aux deux surfaces S, S_1.

De même

$$(2) \qquad \Sigma - \mu \Sigma_1 = 0$$

est l'équation d'un second faisceau de *quadriques* passant par les points communs aux surfaces Σ, Σ_1.

Ceci posé, si l'on suppose les deux paramètres λ, μ liés par la relation de l'homographie

$$(3) \qquad A\lambda\mu + B\lambda + C\mu + D = 0,$$

à chaque surface du premier faisceau en correspond une, et une seule, du second.

Si l'on élimine λ, μ entre les équations (1), (2), (3), l'équation résultante

$$(4) \qquad AS\Sigma + BS\Sigma_1 + CS_1\Sigma + DS_1\Sigma_1 = 0$$

représente une surface du quatrième ordre passant par les courbes (S, S_1), (Σ, Σ_1) communes aux *quadriques* des deux faisceaux, courbes que nous appellerons les *bases* des faisceaux.

On a donc ainsi l'énoncé suivant :

THÉORÈME I. — *Si l'on a deux faisceaux homographiques de quadriques, le lieu des points d'intersection des quadriques correspondantes sera une surface du quatrième ordre passant par les bases des deux faisceaux.*

2. La relation entre les paramètres λ, μ peut se simplifier ; il y a surtout deux formes à remarquer. Cela dépend au surplus de la manière d'établir la correspondance entre les deux faisceaux. Quand on connaît trois couples de surfaces correspondantes, les constantes de la relation (3) sont connues. Supposons, par exemple, que les surfaces S et Σ se correspondent, ainsi que S_1, Σ_1 : cela exige que λ et μ soient nuls ou infinis à la fois, et par conséquent que les coefficients A et C soient nuls ; la relation (3) simplifiée prend la forme

$$\lambda + k\mu = 0.$$

Si, au contraire, ce sont les surfaces S, Σ_1, et Σ, S_1 qui se correspondent, alors à la valeur infinie de μ doit correspondre la valeur nulle de λ ; on a

$$\lambda\mu + k = 0.$$

De là les deux formes suivantes de l'équation du quatrième ordre

$$S\Sigma_1 + k\Sigma S_1 = 0, \tag{5}$$

$$S\Sigma + k\Sigma_1 S_1 = 0. \tag{6}$$

3. L'une ou l'autre de ces formes met en évidence l'existence d'un double mode de génération de la surface du quatrième ordre.

Prenons la forme (5), par exemple : on peut considérer la surface qu'elle représente comme le lieu des courbes

$$\left\{\begin{aligned} &S - \lambda S_1 = 0, \\ &\Sigma - \mu\Sigma_1 = 0 \end{aligned}\right. \tag{7}$$

avec

$$\lambda + k\mu = 0,$$

ou bien comme le lieu des courbes

$$(8) \qquad \begin{cases} S - \lambda' \Sigma = 0, \\ \Sigma_1 - \mu' S_1 = 0 \end{cases}$$

avec

$$\lambda' \mu' + k = 0.$$

On peut reconnaître aisément que deux courbes gauches du même système n'ont pas en général de points communs. Soient, en effet, deux courbes du système (7)

$$\begin{cases} S - \lambda S_1 = 0, \\ \Sigma - \mu \Sigma_1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} S - \lambda_1 S_1 = 0, \\ \Sigma - \mu_1 \Sigma_1 = 0. \end{cases}$$

Pour toute solution commune à ces quatre équations, on doit avoir

$$(\lambda_1 - \lambda) S_1 = 0$$

ou

$$(\mu_1 - \mu) \Sigma_1 = 0.$$

Or, à moins que le point commun ne soit sur les surfaces S_1, Σ_1, on doit avoir $\lambda_1 = \lambda$ ou $\mu_1 = \mu$, ce qui est la même chose, car la première condition entraîne la seconde. (*Voir* la Note I.)

Toute courbe du premier système coupe les courbes du second, ce qu'on vérifiera très-facilement.

4. Les équations du quatrième degré que nous avons obtenues sont-elles générales? Peut-on les identifier avec celle d'une surface quelconque du même ordre? D'après le nombre des constantes contenues dans les diverses fonctions S et Σ, il semble qu'on peut répondre affirmativement; il faut, en effet, trente-quatre conditions simples pour déterminer une surface du quatrième ordre;

or les quatre fonctions du second degré renferment chacune neuf arbitraires; il y a en outre des coefficients de liaison : l'identification paraît possible. Mais il est difficile de savoir si toutes les constantes sont indépendantes.

Dans le travail relatif aux courbes du quatrième ordre, M. Chasles a démontré qne toute courbe du quatrième degré pouvait être engendrée par les intersections de deux faisceaux homographiques de coniques; mais il n'est pas facile d'appliquer une démonstration de ce genre à la génération des surfaces de même ordre.

Il y a aussi une lacune regrettable dans la théorie des surfaces du quatrième ordre. M. Chasles, remarquant la relation très-simple qui lie un point variable d'une conique à quatre points fixes de cette même courbe (*), en a conclu sans peine que : *Si l'on joint le point d'intersection de deux coniques correspondantes des faisceaux ayant pour bases deux systèmes de quatre points* (a, b, c, d), (a', b', c', d') *à ces deux systèmes de points, les deux faisceaux de quatre droites ainsi formés ont entre leurs rapports anharmoniques une relation linéaire par rapport à chacun d'eux.*

Et réciproquement, *le lieu des points jouissant de cette propriété est une courbe du quatrième ordre qui passe par les huit points* a, b, c, d, a', b', c', d'.

Or il est évident qu'à cette propriété des coniques doit correspondre une relation entre les droites joignant un point quelconque d'une surface du second degré aux huit points fixes situés sur une courbe gauche du quatrième ordre et servant de bases aux faisceaux de quadriques que nous considérons. Cette relation doit être sans doute assez compliquée. Il me paraît donc assez difficile de

(*) Si l'on joint un point quelconque d'une conique à quatre points fixes pris sur cette conique, le rapport anharmonique du faisceau est constant.

substituer à la définition des surfaces du quatrième ordre une propriété géométrique convenant à tous ses points.

Cependant, en remarquant que le résultat de la substitution des coordonnées d'un point quelconque dans le premier membre de l'équation d'une *quadrique* représente le rapport des distances du point et du centre de la surface (dans le cas des surfaces à centre) au plan polaire du point, on peut écrire l'équation générale des surfaces du quatrième degré, trouvée précédemment, sous la forme

$$A\frac{d}{d_0}\frac{\delta}{\delta_0}+B\frac{d}{d_0}\frac{\delta_1}{\delta_{1,0}}+C\frac{d_1}{d_{1,0}}\frac{\delta}{\delta_0}+D\frac{d_1}{d_{1,0}}\frac{\delta_1}{\delta_{1,0}}=0,$$

les d et δ désiguant les distances d'un point de la surface aux plans polaires relatifs aux quadriques S, Σ, et les mêmes lettres, affectées de l'indice zéro, se rapportant aux distances des centres aux mêmes plans (*).

5. Il y a encore une propriété géométrique des courbes d'intersection des quadriques correspondantes des deux faisceaux, qui me paraît digne d'être remarquée. On sait que tous les plans polaires d'un point (x, y, z) par rapport aux quadriques du faisceau (S, S_1) passent par une même droite D; de même, tous les plans polaires du même point par rapport aux quadriques du faisceau (Σ, Σ_1) passent par une même droite Δ; d'où il suit que la tangente au point (x, y, z) à la courbe d'intersection des deux quadriques correspondantes passant par ce point est l'intersection des deux plans menés par ce point et par

(*) Ce travail était complétement terminé, lorsqu'en parcourant les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* j'ai trouvé dans le tome XLV, page 1066, une nouvelle Note de M. Chasles, relative à la génération des courbes et surfaces de degré m. Le double mode de génération de la surface du quatrième ordre, dont il est question au n° 3 de ce paragraphe, n'est qu'un cas particulier du théorème énoncé par l'illustre géomètre (*Loc. cit.*).

les droites D et Δ. C'est d'ailleurs ce qui résulte immédiatement des équations des deux faisceaux.

Je vais maintenant examiner les principales modifications que subit l'équation générale des surfaces du quatrième ordre lorsque les quadriques des deux faisceaux prennent elles-mêmes quelque propriété particulière. Nous rencontrerons ainsi fréquemment des surfaces du troisième ordre comme cas particuliers.

(*La suite prochainement.*)