Note sur une application de la théorie des déterminants

Nouvelles annales de mathématiques 2^e^ série, tome 9 (1870), p. 392-398

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__392_1>

NOTE SUR UNE APPLICATION DE LA THÉORIE DES DÉTERMINANTS.

---

1. L'objet de cette Note est de démontrer et de généraliser, au moyen de la théorie des *déterminants*, cette proposition que :

« Si neuf quantités a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', réelles ou *imaginaires*, satisfont aux conditions

$$(1)\quad \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1, & aa' + bb' + cc' = 0, \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1, & aa'' + bb'' + cc'' = 0, \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1, & a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0, \end{cases}$$

elles satisferont, de même, aux six conditions suivantes

$$(2)\quad \begin{cases} a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, & ab + a'b' + a''b'' = 0, \\ b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, & ac + a'c' + a''c'' = 0, \\ c^2 + c'^2 + c''^2 = 1, & bc + b'c' + b''c'' = 0. \end{cases}$$ »

(*) *Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis. Erster Theil: Aufgaben aus der Differentialrechnung.* Leipzig, Verlag von B. G. Teubner; 1868. — In-8° (264 p.). Prix : 6 fr. 50 c.

Les quantités a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', pouvant être considérées comme les éléments du déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix},$$

la proposition à démontrer revient à celle-ci :

« Lorsque, dans un déterminant du troisième ordre, la somme des carrés des éléments de chaque ligne horizontale est égale à l'unité, et qu'en outre la somme des produits obtenus en multipliant respectivement les éléments d'une ligne horizontale par les éléments correspondants d'une autre ligne horizontale est nulle, quels que soient les rangs des deux lignes considérées, les mêmes relations ont lieu entre les éléments des colonnes, ou lignes verticales, de ce déterminant. »

Énoncée de cette manière, la proposition est générale, dans ce sens qu'elle s'étend à un déterminant d'un ordre quelconque.

Dans la démonstration que nous allons donner, nous prendrons pour exemple un déterminant du troisième ordre; mais il sera facile de reconnaître que la même démonstration s'applique à tout déterminant dont les lignes horizontales sont composées d'éléments satisfaisant aux deux conditions indiquées.

1° Le déterminant $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$ est égal à ± 1.

Car, en nommant D la valeur de ce déterminant, on a

$$D^2 = \begin{vmatrix} a^2 + b^2 + c^2 & aa' + bb' + cc' & aa'' + bb'' + cc'' \\ aa' + bb' + cc' & a'^2 + b'^2 + c'^2 & a'a'' + b'b'' + c'c'' \\ aa'' + bb'' + cc'' & a'a'' + b'b'' + c'c'' & a''^2 + b''^2 + c''^2 \end{vmatrix},$$

ou, en ayant égard aux égalités (1),

$$D^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

donc $D = \pm 1$.

2° Les coefficients des éléments du déterminant D sont égaux à ces éléments pris avec leurs signes, ou en signes contraires, suivant que D est positif ou négatif.

C'est-à-dire qu'en désignant par α, β, γ, α', ..., γ'' les coefficients des éléments a, b, c, a', ..., c'' dans le développement du déterminant D, on a

$$\alpha = \pm a,\quad \beta = \pm b,\quad \gamma = \pm c,\quad \alpha' = \pm a', \ldots,\quad \gamma'' = \pm c'';$$

les signes supérieurs correspondant à $D = +1$, et les signes inférieurs à $D = -1$.

En effet, multiplions respectivement par a, b, c les éléments des colonnes de D, il en résultera

$$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ aa' & bb' & cc' \\ aa'' & bb'' & cc'' \end{vmatrix} = Dabc = \pm abc.$$

Puis, ajoutons aux éléments de la première colonne de ce dernier déterminant les éléments correspondants des autres colonnes, il viendra

$$\begin{vmatrix} 1 & b^2 & c^2 \\ 0 & bb' & cc' \\ 0 & bb'' & cc'' \end{vmatrix} = \pm abc,$$

égalité qui donne successivement

$$bc\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} = \pm abc; \qquad \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} = \pm a.$$

Mais

$$\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} = \alpha,$$

donc $\alpha = \pm a$.

On établira de même les égalités $\beta = \pm b$, $\gamma = \pm c$, $\alpha' = \pm a', \ldots$; et il est clair que les seconds membres de ces égalités doivent être précédés du signe $+$ ou du signe $-$ suivant que la valeur de D est $+1$ ou -1.

3° On a

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{ll} a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, & ab + a'b' + a''b'' = 0, \\ b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, & ac + a'c' + a''c'' = 0, \\ c^2 + c'^2 + c''^2 = 1, & bc + b'c' + b''c'' = 0. \end{array} \right.$$

Les trois premières de ces égalités s'obtiennent immédiatement, en observant que la valeur ± 1 du déterminant D est représentée par chacune des expressions $a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha''$, $b\beta + b'\beta' + b''\beta''$, $c\gamma + c'\gamma' + c''\gamma''$, dans lesquelles les coefficients $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ sont égaux aux éléments $a, a', a'', \ldots$, pris avec leurs signes si $D = +1$, et en signes contraires quand $D = -1$.

Les trois dernières se déduisent de même des relations connues

$$\begin{aligned} a\beta + a'\beta' + a''\beta'' &= 0, \\ a\gamma + a'\gamma' + a''\gamma'' &= 0, \\ b\gamma + b'\gamma' + b''\gamma'' &= 0. \end{aligned}$$

La proposition est ainsi démontrée.

Remarque. — Les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \ldots, \gamma''$ étant égaux aux éléments $a, b, c, a', \ldots, c''$, ou à ces éléments changés tous de signe, on peut remplacer, dans les égalités (1) et (2), $a, b, c, a', \ldots, c''$, par $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \ldots, \gamma''$ sans que ces égalités cessent d'exister. Ainsi, *la somme des carrés des coefficients des éléments d'une ligne ho-*

rizontale, ou verticale, du déterminant D *est égale à l'unité.*

2. Pour montrer une application de ce qui précède, supposons que les droites OA, OB, OC représentent trois demi-diamètres conjugués d'un ellipsoïde dont l'équation en coordonnées rectangulaires est

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

et désignons par (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) les coordonnées des extrémités A, B, C de ces diamètres.

Dans le déterminant

$$(\Delta)\qquad \begin{vmatrix} \frac{x_1}{a} & \frac{y_1}{b} & \frac{z_1}{c} \\ \frac{x_2}{a} & \frac{y_2}{b} & \frac{z_2}{c} \\ \frac{x_3}{a} & \frac{y_3}{b} & \frac{z_3}{c} \end{vmatrix}$$

la somme des carrés des éléments de chaque ligne horizontale est égal à $+1$, et la somme des produits obtenus en multipliant respectivement les éléments d'une ligne horizontale quelconque par les éléments d'une autre ligne horizontale est nulle; donc les sommes des carrés des éléments de chacune des lignes verticales sont égales à $+1$. De là les égalités

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=a^2,\quad y_1^2+y_2^2+y_3^2=b^2,\quad z_1^2+z_2^2+z_3^2=c^2,$$

qui font voir que les sommes des carrés des projections des diamètres conjugués sur les axes a, b, c sont respectivement égales aux carrés de ces axes. Conséquemment, *la somme des carrés de trois diamètres conjugués d'un ellipsoïde est égale à la somme des carrés des trois axes.*

Le déterminant (Δ) étant égal à ± 1, on a

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \pm abc.$$

Mais la valeur absolue de ce dernier déterminant représente le volume du parallélépipède construit sur les trois droites OA, OB, OC (*); donc *le parallélépipède construit sur trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde est équivalent au parallélépipède des axes.*

Les éléments $\frac{z_3}{c}, \frac{z_2}{c}, \frac{z_1}{c}$ de (Δ) ont pour coefficients les déterminants partiels

$$\begin{vmatrix} \frac{x_1}{a} & \frac{y_1}{b} \\ \frac{x_2}{a} & \frac{y_2}{b} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{y_1}{b} & \frac{x_1}{a} \\ \frac{y_3}{b} & \frac{x_3}{a} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{x_2}{a} & \frac{y_2}{b} \\ \frac{x_3}{a} & \frac{y_3}{b} \end{vmatrix};$$

la somme des carrés de ces trois coefficients étant égale à $+1$ (*Remarque* du numéro précédent), on a

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_1 & x_1 \\ y_3 & x_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}^2 = a^2 b^2.$$

Or, les valeurs absolues des déterminants

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} y_1 & x_1 \\ y_3 & x_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

représentent les aires des projections, sur le plan XOY,

(*) Cela résulte de ce que l'expression du volume du tétraèdre OABC, en fonction des coordonnées des sommets O, A, B, C, est

$$\pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

des parallélogrammes construits avec les droites OA, OB, OC, considérées deux à deux (*); par conséquent, *la somme des carrés des projections, sur le plan* XOY, *des parallélogrammes construits avec trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde est égale au carré du rectangle des axes qui appartiennent à ce plan.* La même proposition s'appliquant aux projections de ces parallélogrammes sur les deux autres plans de coordonnées, il en faut conclure que :

La somme des carrés des aires des trois parallélogrammes construits sur des diamètres conjugués de l'ellipsoïde est égale à la somme des carrés des trois rectangles construits sur les axes de l'ellipsoïde.

(G.)