Bibliographie

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 385-392

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__385_0>

BIBLIOGRAPHIE.

Schlömilch (O.). *Compendium der höheren Analysis* Dritte verbesserte Auflage. In zwei Banden. Erster Band. Braunschweig, Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn. 1869 (*).

Avant d'entrer dans le détail de la composition de cet excellent Traité, nous allons exposer quelques vues critiques sur la méthode suivie par l'auteur, et qui est aussi celle de la plupart des ouvrages modernes sur le Calcul infinitésimal. Il s'agit, il est vrai, d'une simple question de forme, peu importante lorsqu'il s'agit de Traités rédigés au point de vue de la Science élevée, et dont la lecture suppose la connaissance des éléments. Mais cette question de forme devient capitale dans un livre destiné aux commençants, et s'il règne encore tant d'idées fausses sur la nature du Calcul infinitésimal, la faute en est, selon nous, au peu de développement que les Traités élémentaires accordent généralement à ce qu'on appelle improprement la *métaphysique* de ce Calcul, et aux conceptions artificielles à l'aide desquelles on a cru pouvoir éviter certaines difficultés apparentes, qui se représentent plus tard sous un aspect plus embarrassant, et qui finissent par former une lacune irréparable dans l'éducation mathématique.

La première précaution de l'auteur d'un Traité d'Analyse doit être d'écarter de l'esprit des commençants la notion, toute physique, de grandeur *absolue*, et la notion

(*) *Précis d'Analyse supérieure*, par O. Schlömilch; 3e édition, revue et corrigée. En deux volumes. Tome Ier. Brunswick, chez Fr. Vieweg et fils; 1869. In-8o (563 pages). Prix : 11 fr.

métaphysique de l'infini *absolu*. Les quantités mathématiques sont *plus* ou *moins* grandes les unes que les autres; aucune n'est ni grande ni petite, si on la considère en elle-même et indépendamment de la portée de nos sens.

L'infini métaphysique est une quantité ayant une existence *actuelle*, et, par suite, une quantité *constante* et n'*ayant point* de limites. L'infini mathématique, au contraire, est une quantité *variable*, n'ayant *actuellement* aucune valeur particulière, mais pouvant prendre toutes les valeurs, *quelque grandes qu'elles soient*. Ce n'est pas la valeur qu'elle peut *posséder* qui est sans bornes, l'absence de bornes étant essentiellement incompatible avec toute considération mathématique. Mais les bornes que l'on peut assigner à cette quantité sont *variables*, et ne sont assujetties *à aucune restriction* dans le sens des grandeurs croissantes.

L'infiniment petit n'est pas une quantité *nulle*, encore moins une entité mystérieuse qui ne serait ni nulle ni finie. Comme l'infiniment grand, l'infiniment petit est essentiellement une *variable*, n'ayant actuellement aucune valeur donnée, mais pouvant prendre toutes les valeurs, de manière à devenir, si l'on veut, moindre que toute grandeur assignée d'avance.

Dans une figure de géométrie infinitésimale, abstraction faite de l'imperfection inévitable du dessin, les longueurs infiniment petites sont représentées en *vraie grandeur*, et il faut se garder de considérer les constructions comme donnant une sorte d'induction, relativement à ce qui se passerait, si les lignes devenaient assez petites pour échapper à nos regards. Les figures, comme celles de la géométrie des quantités finies, représentent un *état possible* des variables. Seulement, en raison du but spécial que l'on se propose, on peut négliger dans les résultats certains termes dont on sait d'avance que l'influence finale sera nulle.

La *limite* d'une variable est une *constante* dont la variable peut différer *infiniment peu*, sans que cette différence puisse jamais s'annuler. Il faut généralement combattre cette idée fausse, mais assez répandue, que la limite *fait partie de la série des valeurs possibles* de la variable. Au contraire, la limite est précisément ce que la variable *ne peut pas être ;* elle est définie par exclusion (par *exhaustion,* comme disaient les anciens géomètres), et l'usage de la variable dans la méthode des limites est de pouvoir renfermer la constante cherchée dans des bornes indéfiniment resserrées.

La méthode infinitésimale, dégagée des entités métaphysiques qui l'ont si longtemps obscurcie, est *identique* pour le fond avec la méthode des limites, et n'en diffère que par l'adoption de certaines abréviations de langage et de certains procédés de calcul plus expéditifs. Il s'agit, dans les deux cas, de trouver les limites de certaines variables, et les infiniment petits ne sont autre chose que des variables auxiliaires, dont la limite est zéro.

Lorsqu'une équation, posée en vue du calcul d'une limite, contient des termes, que l'on sait d'avance ne devoir jouer aucun rôle dans la détermination de la quantité cherchée, on peut faire tout d'abord abstraction de ces termes. On sacrifie ainsi l'exactitude des *équations auxiliaires*, qui deviennent des équations *imparfaites*. Mais l'erreur volontairement commise n'altérera pas le résultat, ou plutôt ce n'est pas une erreur, mais une simple abréviation, qui revient au même que si l'on avait remplacé les termes omis par un *etc.*

D'après cela, il revient absolument au même de représenter par dy l'accroissement lui-même d'une fonction y, correspondant à l'accroissement infiniment petit dx de la variable indépendante, ou de désigner par dy une partie de cet accroissement, qui ne diffère du tout que d'une fraction infiniment petite de ce tout. Seulement cette dernière conception est artificielle, et la double notation que l'on est alors amené à employer, en représentant l'accroissement total par la caractéristique Δ, nous semble non-seulement une complication inutile, mais encore une des principales sources des idées fausses ou incomplètes que tant de personnes se font sur le Calcul différentiel. Cette introduction de la notation des différences finies dans le Calcul infinitésimal porte, en effet, à croire que Δ désigne les accroissements *visibles,* comme ceux que l'on trace sur la figure, tandis que d est réservé pour les accroissements qui *deviennent* infiniment petits, c'est-à-dire, suivant le même ordre d'idées, qui deviennent, pour ainsi dire, ultra-microscopiques, à moins que, comme le veulent certains auteurs, les expressions telles que dy ne soient de purs symboles, n'ayant plus d'autre sens que d'indiquer par leurs combinaisons des limites de rapports. Dans le premiers cas, on ouvre la porte aux idées fausses, et même aux non-sens; dans le second, par une timidité excessive, on se prive de la représentation sensible de toutes les phases du calcul.

On éviterait ces inconvénients en réservant la caractéristique Δ pour les différences *finies* et *constantes* (en ce qui concerne du moins l'accroissement de la variable indépendante), et désignant par d les accroissements *infiniment petits,* auxquels rien n'empêche, comme nous l'avons dit, d'attribuer une valeur perceptible quelconque, lorsqu'on étudie leurs relations. C'est ce qu'avait fait M. Duhamel, dans la première édition de son *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* (1840-41), et cette voie nous semble la plus naturelle et la plus propre à donner une intelligence complète de la méthode infinitésimale. A l'avantage de donner des idées plus nettes, elle joint celui d'habituer dès le début à l'emploi rigoureux d'un langage que tôt ou tard on sera forcé d'adopter, pour peu que les questions deviennent compliquées, et l'on ne sera pas obligé, pour rassurer sa conscience, de donner, comme le faisait un illustre professeur, deux démonstrations de chaque proposition, une courte et une plus rigoureuse.

Une dernière critique que nous ferons à tous les Traités d'Analyse, à l'exception de l'excellente *Théorie des Fonctions* de M. Cournot, c'est de séparer d'une manière trop absolue le Calcul intégral du Calcul différentiel. Que l'on traite dans des Chapitres à part les parties de ces deux Calculs qui exigent des développements spéciaux, rien de plus naturel. Mais on doit rechercher toutes les occasions de rattacher l'une à l'autre les deux opérations inverses de la différentiation et de l'intégration, surtout quand on peut obtenir ainsi des simplifications notables dans l'exposition du Calcul différentiel. Il vaut mieux employer ouvertement l'algorithme du Calcul intégral que d'avoir recours, comme on le fait si souvent, à des intégrations déguisées. D'ailleurs une telle marche présente le très-grave inconvénient d'obliger à laisser inachevée l'exposition de théories, qui devraient se placer naturellement à côté d'autres appartenant au Calcul différentiel proprement dit. Nous pourrions citer à l'appui des exemples pris dans les Traités français les plus justement estimés, et dans l'Ouvrage même dont nous allons rendre compte en ce moment.

Le *Précis* de M. Schlömilch se compose de deux volumes, dont le premier, le seul dont nous devons nous occuper aujourd'hui, contient à peu près les matières de l'enseignement de notre École Polytechnique et du programme de la licence ès sciences mathématiques. Le second volume, auquel nous consacrerons un article spécial, forme un excellent complément aux Traités ordinaires de Calcul infinitésimal. Nous espérons cependant que l'Auteur, dans sa troisième édition, ajoutera à cette partie complémentaire des théories dont l'absence serait à regretter, telles que la théorie des équations aux dérivées partielles, le Calcul des variations et le Calcul aux différences finies.

Le premier volume se divise en deux Parties, à peu près d'égale étendue, consacrées l'une au Calcul différentiel, l'autre au Calcul intégral.

Après une Introduction, contenant les notions préliminaires sur la continuité des fonctions, et la détermination par voie algébrique des limites de plusieurs expressions importantes, l'Auteur expose, dans le premier Chapitre, les définitions du Calcul différentiel et la recherche des différentielles des premiers ordres des fonctions élémentaires. Nous remarquerons que, dans ce Chapitre, non plus que dans le reste du livre, l'Auteur ne prononce pas une seule fois le mot d'infiniment petit.

Le Chapitre II traite des dérivées et des différentielles des ordres supérieurs, et de leur calcul direct dans les cas les plus simples. Dérivées et différentielles des divers ordres des fonctions de plusieurs variables. Relations entre les accroissements d'une fonction et les valeurs moyennes de ses dérivées.

Dans le Chapitre III, l'Auteur développe les applications du Calcul différentiel à la théorie des courbes et des surfaces.

Les deux Chapitres suivants ont pour objet la détermination des valeurs-limites des expressions qui se présentent sous une forme indéterminée, et la théorie des maxima et minima des fonctions d'une ou de plusieurs variables.

Les Chapitres VI et VII sont consacrés à la théorie des séries, aux conditions de convergence des séries simples et doubles, aux théorèmes de Taylor et de Maclaurin, et à leur application au développement des principales fonctions. Plusieurs passages de ces Chapitres auraient pu être simplifiés et éclairés, si l'Auteur ne s'était pas interdit le secours des premiers éléments du Calcul intégral.

Le Chapitre VIII contient les premières notions sur les fonctions de variables complexes, sur leur différentiation et leur développement en séries.

Le Chapitre IX, qui termine le Calcul différentiel, traite des applications des théories précédentes à la théorie des équations algébriques, et à la décomposition des fonctions rationnelles en fractions simples.

Dans le Chapitre X, qui commence la seconde partie du volume, sont exposés les préliminaires du Calcul intégral. Les trois Chapitres suivants traitent de l'intégration des fonctions simples.

Le Chapitre XIV contient les applications géométriques du Calcul intégral : quadratures exactes ou approximatives des aires planes, rectifications des courbes, cubature et complanation des surfaces courbes.

Le Chapitre XV donne les principales méthodes élémentaires pour le calcul des intégrales définies simples.

Les intégrales définies multiples font l'objet du Chapitre suivant, qui traite des applications géométriques aux cubatures dans les divers systèmes de coordonnées, et du changement de variables dans les intégrales doubles et triples. Ce dernier point aurait pu être exposé avec plus de simplicité, si l'Auteur eût voulu faire usage des déterminants.

Les trois derniers Chapitres contiennent un exposé très-abrégé de la théorie des équations différentielles dans le cas d'une seule variable indépendante.

Nous regrettons que le défaut d'espace ne nous ait pas permis de signaler les précieuses remarques et les démonstrations nouvelles que le savant Auteur a introduites dans son Ouvrage, qui se distingue par les qualités de rédaction et par la belle exécution typographique.

M. Schlömilch publie en ce moment, cemme complément à son Traité, un excellent recueil d'exercices (*), dont la première Partie a paru en 1868, et qui est appelé à rendre les plus utiles services à l'enseignement des hautes mathématiques. J. Hoüel.