NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CHARLES BRISSE

Démonstration d’un théorème de Gauss relatif aux séries

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 36-37

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__36_1>

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE GAUSS RELATIF AUX SÉRIES;

PAR M. CHARLES BRISSE,
Ancien Élève de l'École Polytechnique, Agrégé de l'Université.

Lemme I. — Le rapport d'un terme au précédent ayant pour limite l'unité, mettons-le sous la forme $\frac{1}{1+\alpha}$, où α a pour limite zéro, la série sera convergente si $\lim. n\alpha > 1$, et divergente si $\lim. n\alpha < 1$.

Lemme II. — Si $\lim. n\alpha = 1$, mettons α sous la forme $\frac{1}{n} + \beta$, où $n\beta$ a pour limite zéro; la série sera convergente si $\lim. n\beta(l.n) > 1$, et divergente si $\lim. n\beta(l.n) < 1$.

C'est en nous appuyant sur ces deux lemmes, généralement démontrés dans les cours, que nous allons établir le théorème de Gauss dont voici l'énoncé :

THÉORÈME. — *Le rapport d'un terme au précédent ayant pour limite l'unité et étant de la forme*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^\lambda + an^{\lambda-1} + bn^{\lambda-2} + \ldots}{n^\lambda + An^{\lambda-1} + Bn^{\lambda-2} + \ldots},$$

c'est-à-dire s'exprimant par une fraction rationnelle de n, il faut et il suffit que

$$A - a > 1$$

pour que la série soit convergente.

En appliquant le lemme I, on trouve

$$\alpha = \frac{(A-a)n^{\lambda-1} + (B-b)n^{\lambda-2} + \ldots}{n^\lambda + \ldots},$$

d'où

$$n\alpha = \frac{(A-a)n^\lambda + \ldots}{n^\lambda + \ldots},$$

d'où

$$\lim. n\alpha = A - a.$$

Donc, si $A - a > 1$ la série est convergente, et si $A - a < 1$ la série est divergente.

Supposons donc $A - a = 1$, et appliquons le lemme II, on a

$$\frac{1}{n} + \beta = \frac{n^{\lambda-1} + (B-b)n^{\lambda-2} + \ldots}{n^\lambda + \ldots},$$

d'où

$$n\beta = \frac{(B-b)n^{\lambda-1} + \ldots}{n^\lambda + \ldots},$$

d'où

$$n\beta(l.n) = \frac{l.n}{n} \cdot \frac{(B-b)n^{\lambda-1} + \ldots}{n^{\lambda-1} + \ldots},$$

d'où

$$\lim. n\beta(l.n) = 0.$$

Donc la série est divergente.