NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

BELLAVITIS

Applications du calcul des équipollences à la solution des questions 955, 956

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 34-36

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__34_0>

APPLICATION DU CALCUL DES ÉQUIPOLLENCES A LA SOLUTION DES QUESTIONS 955, 956

(voir 2e série, t. VIII, p. 432),

PAR M. BELLAVITIS (*).

955. — *En deux points d'une ellipse on mène les normales; la perpendiculaire élevée sur le milieu de la corde passe par les milieux des segments interceptés entre les normales par chacun des axes.*

(LAGUERRE.)

956. — *En deux points d'un ellispsoïde on mène les normales. Le plan mené par le milieu de la corde et perpendiculairement à cette corde passe par les milieux des lignes qui joignent les points de rencontre des normales avec chacun des plans de symétrie.*

(LAGUERRE.)

Il suffit évidemment de résoudre la seconde question.

Considérons un ellipsoïde dont les demi-axes ont pour longueurs a, b, c; soient i, j, k trois droites égales, parallèles aux axes, et x, y, z trois variables assujetties à la condition

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1;$$

ax, by, cz seront les coordonnées rectangulaires d'un point M de l'ellipsoïde, et la droite OM, qui joint le centre à ce point, sera donnée par l'équipollence

$$\mathrm{OM} \triangleq axi + byj + czk.$$

(*) Nous publions la solution de M. Bellavitis comme application du calcul des équipollences à une question de l'espace. L'analyse ordinaire fournirait une solution aussi simple. (J. B.)

Supposons z constant et déplaçons infiniment peu le point M : $adxi + bdyi$, c'est-à-dire $ayi - bxj$, donnera la direction du déplacement, qui n'est autre chose que celle de la tangente à l'ellipsoïde menée par le point M, parallèlement au plan ij. De même, $bzj - cyk$, $azi - cxk$, sont les directions des tangentes parallèles aux plans jk, ki. Donc, la direction

$$\frac{x}{a} i + \frac{y}{b} j + \frac{z}{c} k,$$

qui est perpendiculaire aux trois précédentes, est la direction de la normale en M.

Considérons maintenant la droite MN donnée par l'équipollence

$$\mathrm{MN} \triangleq -c^2\left(\frac{x}{a} i + \frac{y}{b} j + \frac{z}{c} k\right);$$

nous avons

$$\mathrm{ON} \triangleq \mathrm{OM} + \mathrm{MN} \triangleq \left(a - \frac{c^2}{a}\right) xi + \left(b - \frac{c^2}{b}\right) yj.$$

Cette dernière équipollence ne renferme pas de terme en k. Donc la droite ON est située dans le plan principal parallèle aux ij, et le point N est le point où la normale MN perce ce plan.

Soient M′ un autre point quelconque de l'ellipsoïde, N′ le pied de la normale en ce point, on aura de même

$$\mathrm{OM}' \triangleq ax'i + by'j + cz'k,$$

$$\mathrm{ON}' \triangleq \left(a - \frac{c^2}{a}\right) x'i + \left(b - \frac{c^2}{b}\right) y'j,$$

et la corde MM′ sera donnée par l'équipollence

$$\mathrm{MM}' \triangleq a(x' - x)i + b(y' - y)j + c(z' - z)k.$$

Désignons par D le milieu de MM′, par E celui de NN′, on a

$$\mathrm{OD} \bumpeq \frac{a}{2}(x + x')\,i + \frac{b}{2}(y + y')\,j + \frac{c}{2}(z + z')\,k,$$

$$\mathrm{OE} \bumpeq \left(\frac{a}{2} - \frac{c^2}{2a}\right)(x + x')\,i + \left(\frac{b}{2} - \frac{c^2}{2b}\right)(y + y')\,j.$$

On en déduit

$$\mathrm{ED} \bumpeq \mathrm{OD} - \mathrm{OE} \bumpeq \frac{c^2}{2a}(x + x')\,i$$
$$+ \frac{c^2}{2b}(y + y')\,j + \frac{c}{2}(z + z')\,k.$$

Or, à cause de l'identité

$$(x + x')(x' - x) + (y + y')(y' - y) + (z + z')(z' - z) = 1 - 1 = 0,$$

cette droite est perpendiculaire à la corde MM'. Donc, le théorème est démontré.