Nouvelles annales de mathématiques

Painvin

Note sur la construction géométrique des normales à une conique

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 348-353

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__348_0>

NOTE SUR LA CONSTRUCTION GÉOMETRIQUE DES NORMALES A UNE CONIQUE;

PAR M. PAINVIN,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Lyon.

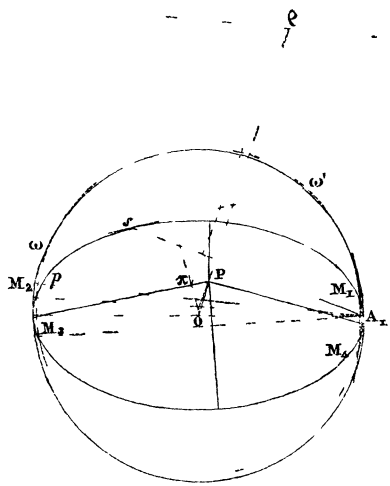
1. THÉORÈME I. — *Si d'un sommet* A_1 *d'une conique* Σ *on abaisse des perpendiculaires sur les quatre normales menées à la courbe d'un même point* P, *les quatre points* M_1, M_2, M_3, M_4, *où ces perpendiculaires rencontrent la courbe, sont sur une même circonférence* Ω.

THÉORÈME II. — *Si du sommet* A_1 *on abaisse, sur le diamètre passant par* P, *une perpendiculaire qui rencontre la conique en* s, *la tangente en* s *sera l'axe radical du cercle précédent et du cercle décrit sur l'axe qui passe par* A_1.

THÉORÈME III. — *Par le sommet* A_1 *on mène une parallèle à la polaire du point* P *relative à* Σ; *soit* p *l'intersection de cette parallèle avec* Σ; *soit* π *le centre du cercle passant par* p *et par les points* ω, ω', *où la tangente en* s *rencontre le cercle décrit sur l'axe qui passe par* A_1; *soit* ρ *l'intersection du diamètre passant par* P *avec la polaire du point* P. *Le centre du cercle* Ω *sera sur la droite menée par le point* P *parallèlement à* $\pi\rho$.

Les deux premiers théorèmes sont dus à Joachimsthal (*Journal de Crelle*, t. XXVI, p. 172; t. XLVIII, p. 337); le troisième théorème est extrait du remarquable Mémoire de M. Smith sur *quelques problèmes cubiques et quadratiques* (*Annali di Matematica*, 2^e série, t. III, p. 145).

Ces trois propositions donnent évidemment la solution de la question énoncée; car on peut construire le cercle Ω qui passe par les points ω et ω' (théorème II), et dont le centre se trouve sur la droite menée par P parallèlement à $\pi\rho$ (théorème III), ce cercle coupera la conique Σ en



quatre points M_1, M_2, M_3, M_4; les normales cherchées seront les perpendiculaires abaissées du point P sur les quatre droites A_1M_1, A_1M_2, A_1M_3, A_1M_4 (théorème I).

Je donnerai la démonstration analytique suivante des propositions qui précèdent.

2. Soient α, β les coordonnées du point P, φ le paramètre angulaire du pied d'une des normales menées du point P à la conique

$$(1) \quad (\Sigma) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

l'équation de cette normale sera

$$\frac{ax}{\cos\varphi} - \frac{by}{\sin\varphi} - c^2 = 0,$$

et l'on aura la condition

$$(2) \qquad \frac{a\alpha}{\cos\varphi} - \frac{b\beta}{\sin\varphi} - c^2 = 0.$$

L'équation de la perpendiculaire menée du point A_1 à cette normale sera

$$(3) \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b}\operatorname{tang}\varphi - 1 = 0;$$

si l'on élimine $\operatorname{tang}\varphi$ entre les équations (2) et (3), on trouve

$$\left[a\alpha\left(1-\frac{x}{a}\right) - b\beta\frac{y}{b}\right]\sqrt{\left(1-\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{y^2}{b^2}} = c^2\left(1-\frac{x}{a}\right)\frac{y}{b},$$

ou, en élevant au carré,

$$(4) \qquad \left\{\begin{array}{l} \left[a^2\alpha^2\left(1-\frac{x}{a}\right)^2 - 2ab\alpha\beta\left(1-\frac{x}{a}\right)\frac{y}{b} + b^2\beta^2\frac{y^2}{b^2}\right] \\ \qquad \times\left[\left(1-\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{y^2}{b^2}\right] \\ = c^4\left(1-\frac{x}{a}\right)^2\frac{y^2}{b^2}. \end{array}\right.$$

Cette dernière équation représente les quatre droites menées du point A_1 perpendiculairement aux quatre normales issues du point P; les équations (1) et (4), considérées simultanément, détermineront les intersections de ces quatre droites avec la conique Σ.

Or remplaçons $\frac{y^2}{b^2}$ par $\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$, et supprimons le facteur $\left(1-\frac{x}{a}\right)^2$, on aura l'équation suivante :

$$\left[a^2\alpha^2\left(1-\frac{x}{a}\right)-2ab\alpha\beta\frac{y}{b}+b^2\beta^2\left(1+\frac{x}{a}\right)\right]$$
$$\times\left(1+\frac{x}{a}+1-\frac{x}{a}\right)=c^4\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right),$$

laquelle représente une courbe passant par les quatre points M_1, M_2, M_3, M_4; cette équation est, en définitive,

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} & c^4\frac{x^2}{a^2}-2(a^2\alpha^2-b^2\beta^2)\frac{x}{a}-4ab\alpha\beta\frac{y}{b} \\ & \qquad +2(a^2\alpha^2+b^2\beta^2)-c^4=0. \end{aligned}\right.$$

L'équation des coniques passant par les quatre points communs aux courbes (1) et (5) étant

$$\left(\frac{c^4}{a^2}+\frac{\lambda}{a^2}\right)x^2+\lambda\frac{y^2}{b^2}-2(a^2\alpha^2-b^2\beta^2)\frac{x}{a}-4ab\alpha\beta\frac{y}{b}$$
$$+2(a^2\alpha^2+b^2\beta^2)-c^4-\lambda=0,$$

on aura un cercle si l'on prend $\lambda=b^2c^2$.

Le premier théorème est donc démontré, et l'équation du cercle Ω est

$$(\mathrm{I})\quad (\Omega)\quad \left\{\begin{aligned} & x^2+y^2-2\frac{a^2\alpha^2-b^2\beta^2}{c^2}\frac{x}{a}-4\frac{ab\alpha\beta}{c^2}\frac{y}{b} \\ & \qquad +2\frac{a^2\alpha^2+b^2\beta^2}{c^2}-a^2=0; \end{aligned}\right.$$

les coordonnées de son centre sont

$$(\mathrm{II})\quad (\mathrm{C})\quad \left\{\begin{aligned} x_0 &= \frac{a^2\alpha^2-b^2\beta^2}{c^2a}, \\ y_0 &= \frac{2a\alpha\beta}{c^2}; \end{aligned}\right.$$

et enfin l'axe radical du cercle Ω et du cercle décrit sur

$A_1 A_2$ est visiblement

$$(\mathrm{III})\quad (\omega\omega')\quad (a^2\alpha^2 - b^2\beta^2)\frac{x}{a} + 2ab\,\alpha\beta\,\frac{y}{b} - (a^2\alpha^2 + b^2\beta^2) = 0.$$

3. Les coordonnées des points s, ρ et p définis dans l'énoncé sont

$$(6)\quad (s)\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{a(a^2\alpha^2 - b^2\beta^2)}{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2}, \\[2ex] y_1 = \dfrac{2ab^2\alpha\beta}{a^2\alpha^2 + b^2\beta^2}; \end{cases}$$

$$(7)\quad (\rho)\quad \begin{cases} x_2 = \dfrac{a^2b^2\alpha}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}, \\[2ex] y_2 = \dfrac{a^2b^2\beta}{b^2x^2 + a^2\beta^2}; \end{cases}$$

$$(8)\quad (p)\quad \begin{cases} x_3 = a\,\dfrac{b^2\alpha^2 - a^2\beta^2}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}, \\[2ex] y_3 = \dfrac{2ab^2\alpha\beta}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}. \end{cases}$$

Le calcul de ces coordonnées est très-simple et ne présente aucune difficulté. On voit immédiatement que la tangente à la conique Σ au point $s(x_1, y_1)$ est l'axe radical (III); la seconde proposition est donc démontrée.

4. L'équation d'un cercle passant par les points ω, ω' est

$$(9)\begin{cases} x^2 + y^2 - a^2 \\ \quad + \mu\left[(a^2\alpha^2 - b^2\beta^2)\dfrac{x}{a} + 2ab\,\alpha\beta\,\dfrac{y}{b} - (a^2\alpha^2 + b^2\beta^2)\right] = 0; \end{cases}$$

si l'on exprime que ce cercle passe par le point $p(x_3, y_3)$, on trouve

$$\mu = -\frac{2a^2b^2}{c^2(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2)};$$

les coordonnées x', y' du centre du cercle $\omega\omega' p$ seront alors

$$(10)\quad (\pi)\quad x' = \frac{ab^2(a^2\alpha^2 - b^2\beta^2)}{c^2(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2)},\quad y' = \frac{2a^3b^2\alpha\beta}{c^2(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2)}.$$

5. Il est maintenant facile d'écrire les équations des deux droites qui, d'après l'énoncé, doivent déterminer le centre du cercle Ω. La droite menée perpendiculairement à $\omega\omega'$, et en son milieu, doit passer par le centre du cercle décrit sur $A_1 A_2$ et par le centre π du cercle $\omega\omega' p$; son équation est donc

$$(11)\qquad \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'};$$

la droite menée par le point P parallèlement à $p\pi$ est

$$(12)\qquad \frac{x-\alpha}{x_2 - x'} = \frac{y-\beta}{y_2 - y'}.$$

Or des valeurs (II), (7) et (10), il résulte évidemment

$$(13)\quad \frac{x'}{x_0} = \frac{y'}{y_0} = k,\quad \frac{x_2}{\alpha} = \frac{y_2}{\beta} = k,\quad \text{où}\quad k = \frac{a^2b^2}{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2}.$$

Eu égard à ces dernières relations, les équations (11) et (12) deviennent

$$(14)\qquad \frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0},\quad \frac{x-\alpha}{x_0-\alpha} = \frac{y-\beta}{y_0-\beta};$$

il est bien visible que ces deux droites se coupent au point (x_0, y_0), centre du cercle Ω; ce qui démontre le troisième théorème.