LAGUERRE

Sur l'équation du troisième degré

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 342-347
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__342_1>

SUR L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ;

PAR M. LAGUERRE.

I.

Soient $F(x)$ et $f(x)$ deux polynômes du troisième degré par rapport à la variable x; y désignant une quantité arbitraire, considérons l'équation

$$(1) \qquad F(x) + yf(x) = 0.$$

Soit V le discriminant de cette équation; V est, comme on le voit facilement, une fonction entière et du quatrième degré de y. En regardant y comme inconnue, l'équation

$$(2) \qquad V = 0$$

a quatre racines; désignons par a, b, c trois quelconques de ces racines.

Si, dans l'équation (1), on donne à y la valeur a, l'équation résultante a deux racines égales; soient λ la valeur commune à ces deux racines, et α la valeur de la troisième racine.

Pour abréger, représentons aussi par

$$-g(y)$$

le coefficient de x^3 dans le premier membre de l'équation (1).

On a identiquement

$$-\mathrm{F}(x)-af(x)=g(a)(x-\lambda)^2(x-\alpha),$$

d'où

$$\frac{1}{\sqrt{g(a)}}\sqrt{\frac{-\mathrm{F}(x)-af(x)}{x-\alpha}}=x-\lambda;$$

en désignant respectivement par μ, ν et β, γ les quantités analogues à λ et à α et relatives aux deux racines b et c de l'équation (2), on a de même

$$\frac{1}{\sqrt{g(b)}}\sqrt{\frac{-\mathrm{F}(x)-bf(x)}{x-\beta}}=x-\mu,$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{g(c)}}\sqrt{\frac{-\mathrm{F}(x)-cf(x)}{x-\gamma}}=x-\nu.$$

Multiplions la première des trois relations précédentes par $(\mu-\nu)$, la deuxième par $(\nu-\lambda)$, la troisième par $(\lambda-\mu)$ et additionnons, membre à membre, les équations ainsi obtenues, il vient

$$\frac{\mu-\nu}{\sqrt{g(a)}}\sqrt{\frac{-\mathrm{F}(x)-af(x)}{x-\alpha}}+\frac{\nu-\lambda}{\sqrt{g(b)}}\sqrt{\frac{-\mathrm{F}(x)-bf(x)}{x-\beta}}$$
$$+\frac{\lambda-\mu}{\sqrt{g(c)}}\sqrt{\frac{-\mathrm{F}(x)-cf(x)}{x-\gamma}}=0.$$

Cette relation est une identité qui doit être vérifiée, quelle que soit x.

On peut la mettre sous la forme suivante :

$$\frac{\mu-\nu}{\sqrt{g(a)}}\sqrt{\frac{-\dfrac{\mathrm{F}(x)}{f(x)}-a}{x-\alpha}}+\frac{\nu-\lambda}{\sqrt{g(a)}}\sqrt{\frac{-\dfrac{\mathrm{F}(x)}{f(x)}-b}{x-\beta}}$$
$$+\frac{\lambda-\mu}{\sqrt{g(c)}}\sqrt{\frac{-\dfrac{\mathrm{F}(x)}{f(x)}-c}{x-\gamma}}=0.$$

Si maintenant on suppose que x ne désigne plus une quantité arbitraire, mais une racine de l'équation (1), on a

$$y = -\frac{F(x)}{f(x)};$$

et si l'on pose, pour abréger,

$$\frac{\mu - \nu}{\sqrt{g(a)}} = A, \quad \frac{\nu - \lambda}{\sqrt{g(b)}} = B, \quad \frac{\lambda - \mu}{\sqrt{g(c)}} = C,$$

on a la relation suivante :

$$(3) \qquad A\sqrt{\frac{y-a}{x-\alpha}} + B\sqrt{\frac{y-b}{x-\beta}} + C\sqrt{\frac{y-c}{x-\gamma}} = 0.$$

Voilà ainsi une forme irrationnelle que l'on peut donner à l'équation (1); d'après ce qui précède, cette transformation peut être faite de quatre façons différentes, puisque l'on peut employer, pour l'effectuer, trois quelconques des racines de l'équation

$$V = 0.$$

II.

Si l'on considère y et x comme les coordonnées rectangulaires d'un point mobile du plan, on peut dire que l'équation (3) est une forme particulière de l'équation de la courbe du quatrième ordre représentée par l'équation (1).

Pour parler plus exactement, les points de cette courbe satisfont à l'équation (3); mais cette dernière est plus générale.

En effet, si l'on fait disparaître de cette équation les irrationnalités, en effectuant le produit des différentes valeurs que prend son premier membre, quand on donne aux radicaux les divers signes dont ils sont susceptibles, on obtient une équation

$$U = 0,$$

dans laquelle U est un polynôme entier du quatrième degré en x et du deuxième degré en y.

Il résulte de ce qui précède que U doit être exactement divisible par

$$F(x) + yf(x).$$

U est donc égal au produit de ce polynôme par un facteur qui est nécesairement du second degré en x et en y, et du premier degré par rapport à chacune de ces variables.

Géométriquement, ce second facteur, égalé à zéro, représente une hyperbole équilatère.

On voit ainsi que l'équation (3) représente à la fois la courbe représentée par l'équation (1) et une hyperbole équilatère ayant ses asymptotes parallèles aux axes.

Ces deux courbes jouissent toutes les deux de la propriété géométrique exprimée par l'équation (3), propriété très-simple que je me dispenserai de transcrire ici.

III.

On peut se demander, *à priori*, étant donnée l'équation (3), de déterminer quelle relation il doit exister entre les coefficients de cette équation, pour que la courbe qu'elle représente se décompose en une hyperbole équilatère ayant ses asymptotes parallèles aux axes et une autre courbe, qui est alors nécessairement représentée par une équation de même forme que l'équation (1).

Si cette décomposition a lieu effectivement, on doit pouvoir satisfaire à l'équation (3) par une valeur de x

de la forme

$$x = \frac{py + q}{ry + s}.$$

Remarquons maintenant que l'on peut toujours trouver quatre nombres : p, q, r et s tels, que l'on ait simultanément

$$a = \frac{p\alpha + q}{r\alpha + s}, \quad b = \frac{p\beta + q}{r\beta + s}, \quad c = \frac{p\gamma + q}{r\gamma + s}.$$

Ces nombres étant ainsi choisis, posons

$$(4) \qquad x = \frac{sy - p}{-ry + p};$$

en substituant ces valeurs de a, b, c et x dans l'équation (3), il vient, toutes réductions faites,

$$\sqrt{p - ry}\left(\frac{A}{\sqrt{r\alpha + s}} + \frac{B}{\sqrt{r\beta + s}} + \frac{C}{\sqrt{r\gamma + s}}\right) = 0.$$

Si donc on a entre les coefficients la relation

$$\frac{A}{\sqrt{r\alpha + s}} + \frac{B}{\sqrt{r\beta + s}} + \frac{C}{\sqrt{r\gamma + s}} = 0,$$

la valeur de x tirée de l'équation (4) satisfait, quelle que soit y, à l'équation (3), et, par conséquent, U est divisible par le polynôme

$$rxy - px + sy - q;$$

le second facteur de U, étant du premier degré en y et du troisième degré par rapport à x, est nécessairement de la forme

$$F(x) + yf(x).$$

IV.

Les résultats qui précèdent peuvent être encore exprimés d'une feçon un peu différente.

Soient $F(x,y)$ et $f(x, y)$ deux polynômes homogènes en x et y, et du troisième degré par rapport à ces variables; étant donnée l'expression

$$T = \xi F(x, y) + \eta f(x, y),$$

on peut toujours trouver quatre facteurs de la forme

$$\xi(mx + ny) + \eta(px + qy),$$

qui jouissent de la propriété suivante.

Soit Q l'un de ces facteurs, on peut toujours poser

$$TQ = (\sqrt{L} + \sqrt{M} + \sqrt{N})(\sqrt{L} + \sqrt{M} - \sqrt{N}) \\ \times (\sqrt{L} - \sqrt{M} + \sqrt{N})(\sqrt{L} - \sqrt{M} - \sqrt{N}),$$

L, M et N désignant des polynômes de la forme suivante :

$$L = (x - \beta y)(x - \gamma y)(A\xi + A'\eta),$$
$$M = (x - \alpha y)(x - \gamma y)(B\xi + B'\eta),$$
$$N = (x - \beta y)(x - \alpha y)(C\xi + C'\eta).$$

Il est bien clair que dans cet énoncé les lettres x et y, A, B,..., ont un sens différent de celui que je leur ai attribué dans les paragraphes précédents.

V.

Les considérations très-simples que j'ai employées pour obtenir les résultats précédents s'étendent sans difficulté à des équations d'un degré supérieur au troisième. Mais ce cas particulier est de beaucoup plus intéressant, et je me propose de revenir sur quelques relations dignes de remarque qui existent entre les racines du discriminant

$$V = 0$$

et celles de l'équation

$$F(x) + yf(x) = 0,$$

relations qui peuvent servir utilement d'exercice aux élèves.