NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. NEUBERG

# Théorie des indices des points, des droits et des plans par rapport à une surface du second ordre

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 9 (1870), p. 317-324

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__317_0>

# THÉORIE DES INDICES DES POINTS, DES DROITES ET DES PLANS PAR RAPPORT A UNE SURFACE DU SECOND ORDRE (*);

PAR M. J. NEUBERG,
Professeur à l'Athénée de Bruges (Belgique).

---

1. Soit $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Sigma A_{rs} x_r x_s = 0$ ou simplement $f(x) = 0$ l'équation homogène d'une surface du second ordre rapportée à des axes rectangulaires quelconques. Désignons par $m_1$, $m_2$, $m_3$ les cosinus directeurs d'une sécante quelconque passant par le point $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, a_4)$; les cordonnées du point M situé sur cette sécante à la distance $\rho$ de A peuvent être représentées par $\alpha_r + m_r \rho$, où $m_4$ est un cosinus directeur fictif qu'il faut supposer égal à zéro. Si M est sur la surface, on a $f(\alpha + m\rho) = 0$, ou

$$\rho^2 f(m) + \rho \Sigma m_1 f_1(\alpha) + f(\alpha) = 0,$$

$f_r(\alpha)$ tenant lieu de $\dfrac{df(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)}{d\alpha_r}$.

Les racines de cette équation donnent les distances de A aux deux points d'intersection M et M' de la sécante et de la surface, ces distances étant de même signe ou non, suivant que M et M' sont d'un même côté ou de part et d'autre de A. Nous aurons donc

$$\mathrm{AM}\ \mathrm{AM}' = \frac{f(\alpha)}{f(m)}.$$

Une sécante conduite par le point B parallèlement à

---

(*) Ces développements renferment les solutions des Questions 837, 918, 919, 920 et 921 (*Voir* 2e série, t. VI, p. 527, et t. VIII, p. 96.)

AM, et coupant la surface en N et N′, donnerait de même

$$BN.BN' = \frac{f(\beta)}{f(m)}.$$

Par conséquent, le rapport

$$(1) \qquad \frac{AM.AM'}{BN.BN'} = \frac{f(\alpha)}{f(\beta)}$$

et est indépendant de la direction des parallèles menées par A et par B (Théorème connu de Newton). Si l'on suppose B fixe et A variable, ce rapport pourrait être appelé la *caractéristique* du point A. Plus particulièrement, si B coïncide avec le centre O de la surface, on a $ON = -ON'$, et le rapport $\frac{AM.AM'}{ON^2} = -\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}$ prend le nom d'*indice* du point variable A.

L'indice est *négatif* ou *positif*, suivant que le point A et le centre O appartiennent à la même région de la surface ou non; l'indice d'un point de la surface est nul, et celui du centre vaut $-1$. L'indice d'un point par rapport à une sphère est égal à sa puissance divisée par le carré du rayon.

Si la surface est représentée par l'équation

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} - 1 = 0,$$

l'indice du point $(x_1, x_2, x_3)$ est égal au premier membre de cette équation. Si les axes sont quelconques, la quantité $f(\beta)$ résulte de l'élimination de $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ entre les quatre équations

$$\tfrac{1}{2}f_r(\beta) = A_{r1}\beta_1 + A_{r2}\beta_2 + A_{r3}\beta_3 + A_{r4}\beta_4 = 0 \; (r = 1, 2, 3),$$
$$A_{41}\beta_1 + A_{42}\beta_2 + A_{43}\beta_3 + A_{44}\beta_4 = f(\beta),$$

à cause de $f(\beta) = \frac{1}{2}\Sigma\beta_1 f_1(\beta) = \frac{1}{2}\beta_4 f_4(\beta), \beta_4 = 1$. Nous trouvons

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44}-f(\beta) \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en désignant par H le déterminant (Hessien) des coefficients $A_{rs}$ et par $B_{rs}$ le mineur $\frac{dH}{dA_{rs}}$,

$$f(\beta) = \frac{H}{B_{44}},$$

et par suite, $I_x$ étant l'indice du point $x$,

$$I_x = -f(x)\frac{B_{44}}{H}, \tag{2}$$

valeur indiquée sans démonstration par M. Faure (t. V, 2[e] série, p. 10).

Bien que l'équation (1) ait été obtenue en supposant des axes coordonnés rectangulaires, il est évident qu'elle subsiste encore pour des axes obliques et même pour des coordonnées tétraédriques (*). La valeur (2) est donc également applicable aux coordonnées cartésiennes obliques. Mais, pour des coordonnées tétraédriques liées par l'identité

$$k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 + k_4x_4 = 1,$$

on obtient le centre $\beta$ en identifiant les équations $\Sigma x_1 f_1(\beta) = 0$ et $\Sigma k_1 x_1 = 0$, qui représentent respectivement le plan polaire du point $\beta$ et le plan de l'infini.

---

(*) A cause du caractère *covariant* des quantités $f(\alpha)$ et $f(\beta)$. Car, si $F(x') = 0$ est l'équation de la surface en d'autres coordonnées, une transformation de coordonnées change $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ en $\lambda F(\alpha')$ et $\lambda F(\beta')$, où $\lambda$ est un facteur constant et $\alpha'_r$, $\beta_r$, $x'_r$ les nouvelles coordonnées des points A, B, X.

Nous aurons ainsi, $\mu$ étant un facteur indéterminé,

$$\tfrac{1}{2}f_r(\beta) = A_{r1}\beta_1 + A_{r2}\beta_2 + A_{r3}\beta_3 + A_{r4}\beta_4 = \mu k_r (r = 1, 2, 3, 4),$$

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 + k_4\beta_4 = 1,$$

$$f(\beta) = \tfrac{1}{2}\Sigma\beta_1 f_1(\beta) = \Sigma\mu k_1\beta_1 = \mu,$$

et, en éliminant les $\beta$ entre les cinq premières équations,

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & k_1 f(\beta) \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & k_2 f(\beta) \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & k_3 f(\beta) \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & k_4 f(\beta) \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

On tire de là

$$f(\beta) = -\frac{H}{\left(H\begin{matrix} k \\ k \end{matrix}\right)},$$

la notation $\left(H\begin{matrix} k, l, \ldots \\ p, q, \ldots \end{matrix}\right)$ servant à désigner le *Hessien bordé* des colonnes $(k_1, k_2, k_3, k_4)$, $(l_1, l_2, l_3, l_4), \ldots$, et des lignes $(p_1, p_2, p_3, p_4)$, $(q_1, q_2, q_3, q_4), \ldots$.

2. Passons à quelques transformations de l'indice. En menant la sécante AM par le centre O, nous aurons $I_a = \frac{AM.AM'}{OM^2}$. Soit A' le point où OA est rencontré par le plan polaire de A; les points A et A' qui divisent le diamètre MM' harmoniquement, et que nous appellerons *points réciproques*, donnent les relations

$$AM.AM' = AA'.AO, \quad OM^2 = OA.OA'.$$

Par conséquent, $I_a = -\frac{AA'}{OA'}$, c'est-à-dire *l'indice d'un point est égal au rapport, changé de signe, des dis-*

*tances de ce point et du centre de la surface au plan polaire de ce point*. C'est la définition proposée par M. Faure, 2e série, t. VIII, p. 95, et déjà indiquée, 2e série, t. V, p. 9.

Si le point A est intérieur à la surface (*), soient AM une demi-corde conjuguée avec OA, et $Om$ le demi-diamètre parallèle; on a $I_a = -\frac{AM^2}{Om^2}$. Désignons par B l'extrémité du diamètre OA et par C celle du diamètre conjugué avec le plan OAM; le volume V du parallélépipède construit sur le tétraèdre OBMC est ce que M. Aoust nomme la *puissance* du point A. Comme les tétraèdres OBMC et O$\mathrm{B}m$C ont même base OBC et des hauteurs proportionnelles aux parallèles AM et $Om$, on reconnaît immédiatement que $\frac{V}{abc} = \frac{AM}{Om}$; par suite, $I_a = -\frac{V^2}{a^2b^2c^2}$, le tétraèdre O$\mathrm{B}m$C étant équivalent à celui qui est construit sur les demi-axes principaux $a$, $b$, $c$ de la surface.

Si le point A est extérieur, menons une tangente quelconque AM, et soit $Om$ le demi-diamètre parallèle; nous aurons $I_a = \frac{AM^2}{Om^2}$. Soit C l'extrémité du diamètre conjugué avec le plan OMA. Le volume V du parallélépipède construit sur le tétraèdre OMAC est encore appelé la *puissance* du point A; en le comparant à celui du parallélépipède construit sur les demi-diamètres conjugués OM, $Om$ et OC, on trouve, comme ci-dessus, $I_a = \frac{V^2}{a^2b^2c^2}$.

De l'expression $I_x = -\frac{f(x)}{f(\beta)}$ et des différentes ma-

(*) Cet alinéa et le suivant renferment la solution de la question 837. Les développements que nous y donnons se rapportent principalement à l'ellipsoïde. Les deux hyperboloïdes exigent quelques légères modifications, à cause des diamètres imaginaires.

nières d'estimer l'indice, on peut tirer de nombreuses conséquences. Nous nous bornons à énoncer la suivante :

*Quand trois surfaces du second ordre ont la même intersection deux à deux, les indices (ou plus généralement les caractéristiques) de tous les points de l'une d'elles par rapport aux deux autres ont une raison constante.*

La proposition analogue sur les coniques avec de nombreux corollaires et les théorèmes corrélatifs font l'objet des Chapitres XVI et XVIII du *Traité des Sections coniques* de M. Chasles.

3. Soient $M_1 M_2 M_3 M_4$ un tétraèdre conjugué par rapport à $f$, V son volume, $V_1$, $V_2$,... les volumes des tétraèdres $OM_2M_3M_4$, $OM_3M_4M_1$,... (*), et $I_r$ l'indice de $M_r$. Comme $I_r = -\frac{V}{V_r}$ et $V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$, on a

$$(3) \qquad \frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} + \frac{1}{I_3} + \frac{1}{I_4} = -1,$$

ce qui donne une relation nécessaire entre les indices des quatre sommets d'un tétraèdre conjugué.

Soient $N_1$, $N_2$, $N_3$, $N_4$ les points réciproques de $M_1$,... ; ces points sont les centres des sections de $f$ par les faces du tétraèdre. En désignant par $I'_r$ l'indice de $N_r$, nous aurons

$$I_r = -\frac{M_rN_r}{ON_r}, \quad I'_r = -\frac{N_rM_r}{OM_r};$$

d'où

$$(4) \qquad \frac{1}{I_r} + \frac{1}{I'_r} = \frac{-ON_r + OM_r}{M_rN_r} = -1,$$

(*) $V_r$ est positif ou négatif, suivant que O et $M_r$ se trouvent du même côté ou de part et d'autre de la face opposée à $M_r$.

c'est-à-dire *la somme des inverses des indices de deux points réciproques est égale à* $-1$.

Des relations (3) et (4), on conclut facilement

$$\frac{1}{I_1}+\frac{1}{I_2}+\frac{1}{I_3}=\frac{1}{I'_4},$$

$$\frac{1}{I'_1}+\frac{1}{I'_2}+\frac{1}{I'_3}+\frac{1}{I'_4}=-3,$$

égalités qui démontrent les théorèmes **920** et **921** de M. Faure.

Prenons pour la surface $f$ une sphère S de rayon R, et soient $p_r^2$ la puissance (dans le sens de Steiner) de $M_r$, $(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4)$ les rayons des sections de S par les faces du tétraèdre; nous aurons $I_r=\frac{p_r^2}{R^2}$, $I'_r=-\frac{\rho_r^2}{R^2}$, et les égalités ci-dessus se transforment en

$$-\frac{1}{R^2}=\frac{1}{p_1^2}+\frac{1}{p_2^2}+\frac{1}{p_3^2}+\frac{1}{p_4^2},$$

$$-\frac{1}{\rho_4^2}=\frac{1}{p_1^2}+\frac{1}{p_2^2}+\frac{1}{p_3^2},$$

$$\frac{1}{R^2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\rho_1^2}+\frac{1}{\rho_2^2}+\frac{1}{\rho_3^2}+\frac{1}{\rho_4^2}\right)\ (^*),$$

théorèmes signalés sans démonstration par M. Lafitte (*Nouvelles Annales*, année 1857, p. 205). Le dernier pourrait s'énoncer ainsi : *Dans tout tétraèdre dont les hauteurs se coupent en un même point, l'inverse du*

---

(*) La première et la seconde de ces égalités expriment au fond la même propriété, l'une se rapportant à la sphère conjuguée et l'autre à la circonference conjuguée. Si l'on ne veut conserver dans ces relations que des éléments réels, et que $M_1$ est celui des quatre sommets qui est intérieur à la sphère, on remplacera $p_2$, $p_3$, $p_4$ par les tangentes issues de $M_2$, $M_3$, $M_4$, $p_1\sqrt{-1}$ par le rayon de la section perpendiculaire à $OM_1$ en $M_1$ et $\rho_1\sqrt{-1}$ par la tangente issue de $N_1$.

*carré du rayon de la sphère conjuguée est égal au tiers de la somme qu'on obtient en ajoutant les inverses des carrés des rayons des cercles conjugués avec les faces.*

(*La suite prochainement.*)