ALLÉGRET

Note sur la propriété dont jouit le cercle osculateur en un point quelconque d'une certaine famille de courbes

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 30-32

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__30_1>

NOTE

Sur la propriété dont jouit le cercle osculateur en un point quelconque d'une certaine famille de courbes ;

PAR M. ALLÉGRET,

Professeur de Mathématiques à la Faculté des Sciences de Clermont.

Le Révérend M. Salmon a remarqué, dans son excellent *Traité sur les Courbes planes de degré supérieur* (nos 110 et autres), que l'équation polaire

$$r^m = a^m \cos m\theta,$$

dans laquelle r et θ désignent les coordonnées polaires d'un point d'une courbe, a un paramètre quelconque et m un nombre arbitraire positif ou négatif, comprend une famille nombreuse de courbes dont quelques-unes sont très-connues : par exemple, la droite ($m = -1$) ; le cercle ($m = 1$) ; une hyperbole équilatère ($m = -2$) ; la lemniscate de Bernoulli ($m = 2$) ; la parabole ($m = -\frac{1}{2}$) ; une épicycloïde ($m = \frac{1}{2}$) ; la caustique par réflexion d'une parabole, lorsque les rayons lumineux sont perpendiculaires à l'axe ($m = -\frac{1}{3}$), etc.

On démontre que la *podaire* de l'une quelconque de ces courbes appartient à la même famille, et que ces courbes se transforment les unes dans les autres par la méthode des *vecteurs inverses* ou par celle des *polaires réciproques;* les arcs de ces courbes s'expriment aussi par les *transcendantes elliptiques* ou *abéliennes* les plus simples. (*Voir* l'ouvrage cité.)

Je ne sache pas qu'on ait observé encore que le cercle osculateur en un point quelconque d'une de ces courbes peut se construire presque aussi facilement que la tangente ou la normale au même point, en utilisant la propriété suivante, qui me paraît assez curieuse, et qui consiste en ce théorème :

Le cercle osculateur en un point quelconque de la courbe représentée par l'équation précédente

$$r^m = a^m \cos m\theta$$

intercepte sur le rayon vecteur mené au point de contact une corde qui est toujours avec ce rayon dans le rapport constant de 2 *à* $1+m$.

La démonstration de ce théorème est extrêmement facile.

En effet, si l'on représente par ρ le rayon du cercle osculateur, on sait qu'on a, par une formule très-connue (*voir,* par exemple, le *Cours d'Analyse* de M. Sturm, n° 255),

$$\rho = \frac{\left[r^2 + \left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\dfrac{d^2r}{d\theta^2}}.$$

D'autre part, le cosinus de l'angle u que fait la normale à la courbe avec le rayon vecteur mené à son pied a pour expression

$$\cos u = \frac{r}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}}.$$

La corde interceptée par le cercle osculateur sur ce rayon est donc égale à

$$\frac{2\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}.$$

Si l'on substitue dans cette formule les valeurs de r, $\frac{dr}{d\theta}$ et $\frac{d^2r}{d\theta^2}$ tirées de l'équation de la courbe, et si l'on prend ensuite le rapport de la corde au rayon r, on vérifie que ce rapport est constant et égal à $\frac{2}{1+m}$, ce qu'il fallait démontrer.

Il est non moins aisé de s'assurer, en outre, que la propriété dont il s'agit ne s'applique qu'aux courbes précédentes; mais je crois inutile de m'arrêter plus longtemps sur ce sujet.