Nouvelles annales de mathématiques

Laguerre

Sur l'emploi des imaginaires en géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 241-254

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__241_0>

SUR L'EMPLOI DES IMAGINAIRES EN GÉOMÉTRIE;

PAR M. LAGUERRE (*).

I. — *Considérations générales sur la représentation des points imaginaires situés sur une courbe donnée.*

1. L'emploi des imaginaires en Géometrie ne donne lieu à aucune difficulté sérieuse. Les notions essentielles sur lesquelles il repose sont immédiatement fournies par la Géométrie analytique, et trouvent en elle leur entière légitimation. Ces notions puisées dans l'analyse, le rôle de la Géométrie est de les développer et d'en poursuivre les conséquences par les moyens et avec les ressources qui lui sont propres.

Il y a deux points sur lesquels il semble nécessaire de compléter la théorie. D'une part, on ne sait pas toujours *réaliser* et effectuer les constructions où entrent des données imaginaires, en sorte que certains problèmes, dont la considération des quantités imaginaires fournit une solution très-simple et presque immédiate, ne sont en quelque sorte résolus que théoriquement, les constructions auxquelles conduirait le mode de démonstration employé n'étant pas immédiatement réalisables.

D'autre part, lorsque, dans une proposition, certaines parties de la figure deviennent imaginaires, la proposi-

(*) Je me propose de développer, dans cette série d'articles, quelques points de la théorie des sections coniques que j'ai laissés de côté dans le Cours que j'ai professé à la salle Gerson. Le lecteur pourra consulter sur ces questions diverses Notes que j'ai publiées dans le *Bulletin de la Société Philomathique* (1867-1869), et ma Note *sur l'emploi des imaginaires dans la Géométrie de l'espace* insérée dans le journal *l'Institut* (18 mai 1870).

tion donne lieu à plusieurs théorèmes relatifs aux éléments réels de la figure. Tout théorème exprime, en effet, une relation entre les données, relation que l'on peut représenter par l'équation

$$R = o;$$

si quelques-unes des données deviennent imaginaires, l'équation précédente peut se mettre sous la forme

$$P + Qi = o,$$

ce qui entraîne les deux équations

$$P = o \quad \text{et} \quad Q = o,$$

équations qui, évidemment, sont l'expression de deux théorèmes relatifs aux éléments réels de la figure.

Pour résoudre complétement les questions que soulève l'emploi des imaginaires en Géométrie, il faut donc pouvoir, d'une proposition où certains éléments sont imaginaires, dégager, par une voie purement géométrique et la considération seule de la figure, les propositions *réelles* qu'elle comprend dans son énoncé.

On pourrait presque, à certains égards, dire que la Géométrie en est actuellement au même point où serait l'Analyse, si l'on se contentait de montrer que toute quantité imaginaire peut être mise sous la forme

$$a + bi,$$

sans indiquer les moyens que l'on doit employer pour la réduire à cette forme.

2. Considérons, dans un plan réel, une droite $O\omega$ que nous prendrons pour l'axe d'un système de coordonnées isotropes; considérons en même temps un système de coordonnées rectangulaires ayant pour axe des x la droite $O\omega$, l'axe des y étant la perpendiculaire élevée en O à la droite $O\omega$.

Soit A un point du plan, réel ou imaginaire, et soient

$$u = \alpha + \beta i,$$
$$w = \gamma + \delta i,$$

ses coordonnées isotropes.

Ce point sera représenté dans le plan par un segment représentatif aa', l'origine a de ce segment étant le point réel situé sur la droite isotrope du premier système qui passe par A.

En coordonnées rectangulaires, l'équation de cette droite est

$$y = i(x - \alpha - \beta i);$$

d'où l'on voit immédiatement que les coordonnées rectangulaires du point a sont

$$x = \alpha \quad \text{et} \quad y = \beta.$$

L'extrémité a' du segment est le point réel situé sur la droite isotrope du second système passant par A; cette droite a pour équation

$$y = -i(x - \gamma - \delta i);$$

donc le point a' a pour coordonnées

$$x = \gamma \quad \text{et} \quad y = -\delta;$$

d'où cette conclusion :

Étant donné un point A *dont les coordonnées isotropes sont*

$$u = \alpha + \beta i,$$
$$w = \gamma + \delta i,$$

l'origine de son segment représentatif a pour coordon-

nées rectangulaires

$$x = \alpha, \quad y = \beta,$$

et les coordonnées de l'extrémité de ce segment sont

$$x = \gamma, \quad y = -\delta.$$

On peut dire, si l'on veut, que, dans le mode de représentation employé par Cauchy, l'origine du segment représente la quantité $u = \alpha + \beta i$, et que l'extrémité représente la quantité $\gamma - \delta i$ *conjuguée* de la coordonnée w.

3. Jusqu'ici nous ne nous sommes occupé que de points distribués d'une façon quelconque dans le plan. Supposons maintenant que nous considérions des points situés sur une courbe donnée (C), dont l'équation en coordonnées isotropes soit

$$(1) \qquad f(u, w) = 0.$$

Un point réel a, pris arbitrairement dans le plan, pourra toujours être considéré comme l'origine d'un segment représentatif d'un point situé sur la courbe.

Soient, en effet, α et β les coordonnées rectangulaires de ce point; faisons, dans l'équation (1), $u = \alpha + \beta i$; cette équation, résolue par rapport à w, nous donnera pour cette variable un certain nombre de valeurs; ce nombre étant, en général, égal au degré de la courbe, mais s'abaissant lorsque la courbe passe par les ombilics.

Soient $\gamma + \delta i$, $\gamma' + \delta' i$,... les différentes valeurs de w qui correspondent ainsi à la valeur donnée de u; il est clair, d'après ce qui précède, que si l'on construit les points dont les coordonnées rectangulaires sont respectivement γ et $-\delta$, γ' et $-\delta'$,..., ces points, que je désignerai par a', a'',..., pourront être considérés comme les extrémités d'autant de segments représentatifs de points situés sur la courbe, l'origine commune de ces segments étant le point a.

Pour abréger, je dirai que ces points a', a'',... sont associés au point a; si, d'ailleurs, la courbe est réelle (et ici, comme dans la suite, j'entends simplement par là une courbe dont l'équation en coordonnées rectangulaires est réelle), cette courbe ne peut contenir un point sans contenir aussi le point qui lui est imaginairement conjugué : donc, dans ce cas, si a' désigne l'un quelconque des points associés à un point donné a, a est aussi l'un des points associés de a'.

4. Pour étudier complétement une courbe, il importe de rechercher comment sont distribués dans le plan les segments représentatifs des divers points situés sur une courbe, ou, en d'autres termes, comment se déplace l'extrémité du segment représentatif d'un point de la courbe lorsque son origine se déplace elle-même dans le plan.

Divers géomètres allemands se sont occupés de la façon dont on pouvait représenter les points imaginaires d'une courbe, et ont émis à ce sujet des idées qui ont été reproduites par M. Transon. (*Application de l'Algèbre directive à la Géométrie; Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1868.)

L'équation d'une courbe en coordonnées rectangulaires étant

$$F(x, y) = 0;$$

et ξ, η étant un des systèmes de solutions communes de cette équation, on représente, d'après la méthode de Cauchy, les quantités ξ et η par deux points a et b. Ces deux points déterminent, en effet, parfaitement le point de la courbe, et le mode de relation qui existe entre eux caractérise très-bien cette courbe.

Mais on peut faire à cette solution les reproches suivants :

1° Un point réel de la courbe est toujours (si l'on excepte les points qui se trouvent sur l'axe des x) représenté par un couple de points séparés ;

2° Le mode de représentation varie suivant le système d'axes que l'on a choisi.

Ce dernier inconvénient suffirait seul à faire rejeter en Géométrie ce mode de représentation ; comme l'a très-bien dit M. Transon, l'équation proposée ne représente plus, à vrai dire, une courbe comme dans le système de Descartes, mais un mode *de transformation* dont les propriétés se rattachent à celles de la courbe.

L'emploi du segment représentatif, défini comme je l'ai dit plus haut, remédie à tous ces inconvénients. En employant l'équation en coordonnées isotropes de la courbe et en représentant chaque couple de solutions (u, w) de cette équation par les points réels du plan, qui, dans la méthode de Cauchy, représentent la quantité u et la quantité imaginaire conjuguée à w, on voit :

1° Qu'un point réel de la courbe est représenté par ce point lui-même ;

2° Qu'un point imaginaire est toujours représenté par le même segment, quels que soient les axes auxquels on ait rapporté la figure.

En réalité, ces axes ne jouent aucun rôle dans la question ; l'étude de la distribution dans le plan des segments représentatifs des points d'une courbe est une étude de *pure géométrie ;* et si, dans un grand nombre de questions, on peut avoir intérêt à se servir de l'analyse et à faire intervenir des axes coordonnés, les résultats sont toujours indépendants du choix de ces axes, et leur emploi est par là même facilité.

Pour éclaircir ce qui précède, je mentionnerai ici immédiatement quelques propositions très-simples et que l'on peut facilement démontrer par les considérations de la Géométrie les plus élémentaires. J'aurai lieu plus tard d'en développer les conséquences.

1° Étant donné un cercle réel, pour qu'un segment aa' représente un point situé sur ce cercle, il faut et il suffit que les points a et a' soient réciproques par rapport à ce cercle;

2° Étant donnée une ellipse réelle, pour qu'un segment aa' représente un point situé sur cette ellipse, il faut et il suffit que les deux points a et a' soient situés sur une hyperbole homofocale à l'ellipse, et que la droite aa' soit parallèle à l'une des normales que l'on peut mener à l'ellipse aux points où elle est coupée par l'hyperbole.

Ces notions peuvent être encore présentées d'une façon plus nette et plus précise; mais comme leur développement m'éloignerait un peu du sujet que je traite ici, je renverrai le lecteur à ma Note *sur l'emploi des imaginaires dans la Géométrie de l'espace.*

5. Lorsqu'un point est assujetti à demeurer sur une courbe donnée (C), on peut fixer sa position simplement par celle de l'origne de son segment représentatif.

Cette origine correspond, il est vrai, à plusieurs points de la courbe; en la désignant par a et en désignant par a', a'',... les divers points associés à a, on voit en effet que (a, a'), (a, a''),... désignent tous des points de la courbe, représentés par des segments ayant pour origine le point a.

Lors donc que l'on se donne le point a, on ne détermine pas complétement le point de la courbe qu'il représente. Cette indétermination peut être, comme on le sait, levée de plusieurs façons.

Considérons, avec Cauchy, un des points associés au point a, et soit a' ce point, en sorte que (a, a') désigne un des points de la courbe; si l'on admet que le point a se déplace en décrivant une courbe continue sans jamais passer par aucun des points auxquels correspondent deux points associés confondus en un même point, l'extrémité du segment, dont l'origine sera le point mobile, sera elle-même bien déterminée sans ambiguïté, si l'on admet que le point de la courbe s'est déplacé lui-même d'une façon continue.

Ces points critiques qui, dans la théorie de Cauchy, jouent un rôle fondamental, sont, il est facile de le voir, les *points singuliers* et les *foyers* de la courbe.

Si l'on suppose que le point a, représentatif du point variable de la courbe, se meut dans un contour ne comprenant aucun des foyers ni des points singuliers de la courbe, le point de la courbe qu'il représente est parfaitement déterminé. Dans le cas contraire, pour savoir quel point il représente, il faut connaître le chemin qu'il a suivi dans son déplacement depuis sa position initiale.

On peut encore lever l'indétermination en supposant, avec Riemann, que le plan se compose d'une série de feuillets superposés. Ainsi, un point quelconque d'une ellipse peut être représenté par un point qui se meut sur deux feuillets appliqués sur le plan de l'ellipse et soudés entre eux le long de la ligne qui joint les deux foyers de la courbe.

Au *point de vue géométrique*, la conception de Riemann semble préférable à celle de Cauchy; mais, pour le moment, je ne m'étendrai pas davantage à ce sujet, qui ne présente d'intérêt que dans les applications du calcul intégral à la Géométrie.

6. D'après ce qui précède, on voit qu'un point (réel

ou imaginaire) situé sur une courbe donnée peut être représenté par un *seul point réel* de son plan ; ce point est le point réel situé sur la droite isotrope du premier système qui passe par le point donné. Quand le point donné est réel, le point qui le représente se confond avec lui.

Nous pourrons nous représenter le déplacement d'un point sur une courbe, que les positions successives de ce point soient réelles ou imaginaires, par la courbe que trace dans le plan son *point représentatif*, déterminé comme je viens de le dire.

En général, on peut se représenter la façon dont varie une quantité z en fixant la valeur de cette quantité d'après la position qu'occupe un point mobile sur une courbe arbitrairement choisie du reste.

Lorsque la variable z prend des valeurs imaginaires, la position du point mobile, qui détermine sa valeur, peut être, comme je l'ai dit, représentée par un point réel du plan, et la courbe décrite par ce point donne une idée très-nette de la façon dont varie z.

Ces considérations se prêtent aisément à l'application du calcul intégral à la Géométrie.

Concevons en effet une courbe algébrique (C) et une intégrale dans laquelle la variable soit représentée par la position d'un point mobile sur cette courbe ; supposons, par exemple, que l'élément de l'intégrale soit de la forme

$$P\,ds,$$

ds désignant un élément de la courbe et P une fonction dont la valeur ne dépend que de la position du point sur la courbe et nullement des axes auxquels on peut la rapporter.

On comprendra facilement que, pour étudier cette intégrale, il soit avantageux de considérer la variable comme représentée par la position d'un point mobile sur la courbe, au lieu de la représenter par la position d'un point mobile sur un axe auxiliaire que l'on introduit arbitrairement et sans qu'il joue un rôle quelconque dans la question.

Les intégrales *géométriques* dont je viens de parler ont un sens parfaitement net, indépendamment des axes auxiliaires que l'on peut employer pour la facilité des calculs; il est donc essentiel de pouvoir les traiter d'une façon purement géométrique, ou du moins, si l'on est obligé, dans l'emploi de l'analyse, à se servir d'axes coordonnés, d'employer un système de coordonnées qui laisse en évidence ce caractère géométrique des intégrales. C'est à quoi l'on parviendra par l'emploi des coordonnées isotropes.

Il résulte, du reste, des beaux travaux de Riemann et de M. Clebsch, que ces intégrales géométriques comprennent toutes les intégrales d'origine algébrique.

Les considérations qui précèdent sont, au fond, le développement des idées de Cauchy. L'illustre géomètre fixe la valeur de la variable par la position d'un point sur une ligne droite; lorsque ce point est imaginaire, il le représente comme nous par le point réel situé sur la droite isotrope du premier système que l'on peut mener par le point donné.

A chaque courbe, comme l'a montré M. Clebsch, se rattachent un certain nombre d'intégrales qui jouent un rôle des plus importants dans la théorie de cette courbe; il semble donc naturel, pour étudier ces intégrales, de fixer la valeur de la variable par la position d'un point mobile sur cette courbe elle-même.

II. — *Représentation des points situés sur une droite donnée.*

7. Considérons une droite réelle ou imaginaire tracée dans un plan. Supposons-la rapportée à un système de coordonnées isotropes, et soit $O\omega$ l'axe des coordonnées. Soit A un point mobile de la droite dont les coordonnées soient

$$u = \alpha + \beta i,$$
$$w = \gamma + \delta i;$$

comme je l'ai montré ci-dessus, les coordonnées de l'origine a et de l'extrémité a' du segment représentatif de A seront respectivement

$$x = \alpha, \quad y = \beta,$$

et

$$y = \gamma, \quad y = -\delta.$$

Soit a'' le point symétrique du point a' par rapport à l'axe $O\omega$, ses coordonnées seront

$$x = \gamma \quad \text{et} \quad y = \delta,$$

en sorte que, si nous adoptons pour un instant le langage de l'Algèbre directive, les longueurs $O\bar{a}$ et $O\bar{a}''$ représenteront les deux coordonnées u et w.

Ces coordonnées sont liées entre elles par une relation linéaire que l'on peut mettre sous la forme suivante :

$$w = re^{\theta i}.u + m,$$

r et θ étant des quantités réelles et m une quantité imaginaire. Le vecteur $O\bar{a}''$ peut donc se déduire de $O\bar{a}$ au moyen des trois opérations suivantes :

1° En multipliant le vecteur $O\bar{a}$ par la quantité relle r: cette opération a pour but de dilater tous les vecteurs dans un rapport constant, en sorte qu'après l'opération la figure formée par les points a'' est homothétique à celle formée par les points a;

2° En multipliant le résultat obtenu par $e^{\theta i}$; l'opération a pour résultat de faire tourner la figure précédemment obtenue autour du point O de l'angle θ;

3° En ajoutant au deuxième résultat obtenu la quantité m; le résultat de l'opération est de transporter la figure parallèlement à elle-même.

D'où cette cette conclusion :

La figure formée par les points a et la figure formée par les points a'' sont deux figures directement semblables.

Remarquons maintenant que la figure formée par les points a' est symétrique par rapport à l'axe $O\omega$ de la figure formée par les points a', a''.

D'où cette conclusion :

Si un nombre quelconque de segments représentent des points situés sur une même ligne droite, le polygone formé par les origines de ces segments et le polygone formé par leurs extrémités sont deux polygones semblables et inversement placés.

Deux points suffisant pour déterminer une droite, la réciproque de cette proposition est évidemment vraie.

8. Les considérations qui précèdent mènent facilement à la solution de divers problèmes très-simples que l'on peut se proposer sur les droites, mais que je développerai avec quelques détails, parce qu'ils me seront utiles par la suite.

Problème I. — *Une droite étant définie par deux points (a, a') et (b, b'); étant donné un point réel quelconque du plan, si on le considère comme l'origine du segment représentatif d'un point de la droite, trouver son extrémité.*

Soit c le point donné; on construira le point c' tel, que le triangle $a'b'c'$ soit semblable au triangle abc et inversement placé; le point c' sera le point demandé.

Problème II. — *Une droite étant définie par deux points (a, a') et (b, b'), trouver le point réel situé sur cette droite.*

Soit x le point cherché; ce point étant réel, le segment qui le représente est xx : les deux triangles xab et $xa'b'$ doivent donc être semblables et inversement placés.

Construisons le cercle lieu des points dont les distances à a et a' soit dans le rapport de ab à $a'b'$; construisons le cercle lieu des points dont les distances à b et b' soit dans le même rapport. Ces deux cercles se coupent en deux points réels x' et x''; on choisira celui de ces deux points qui, joint aux points (a, b) et (a', b'), donne deux triangles semblables *inversement* placés.

Problème III. — *Une droite étant définie par deux points (a, a') et (b, b'), et une autre droite étant définie par deux autres points (α, α') et (β, β'), trouver leur point de rencontre.*

Déterminons les extrémités des segments qui représentent des points de la deuxième droite et ont pour origine les points a et b (problème I); soient a'' et b'' ces extrémités; soit (x, x') le point d'intersection cherché.

Les points (a, a'), (b, b'), (x, x') étant en ligne droite, les triangles abx et $a'b'x'$ sont semblables et inversement placés.

Les points (a, a''), (b, b''), (x, x') étant aussi en ligne droite, les triangles abx et $a''b''x'$ sont aussi semblables et inversement placés.

Donc les triangles $a'b'x'$ et $a''b''x'$ sont semblables et semblablement placés. On construira les deux cercles lieux des points dont les distances à a' et a'', et à b' et b''

sont dans le rapport de $a'b'$ à $a''b''$. Ces deux cercles se couperont en deux points réels; on choisira de ces deux points celui qui, joint aux points (a', b') et (a'', b''), donne deux triangles semblables et *semblablement* placés. Ce point sera le point x'; au moyen du problème I, on en déduira le point x.