Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 237-239

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__237_1>

CORRESPONDANCE.

Grenoble, 23 février 1870.

Monsieur,

Dans le numéro de février des *Nouvelles Annales* (p. 53), M. Neuberg, après avoir remarqué que j'avais énoncé plusieurs théorèmes à l'aide desquels on pouvait déterminer les axes d'une conique, quand on connaît le centre et un triangle inscrit, conjugué ou circonscrit à la conique, a résolu la même question en substituant au centre un foyer. Je me suis aussi occupé de cette recherche, et mon *Recueil de Théorèmes*, publié en 1867, chez M. Gauthier-Villars, en donne la solution. La marche que j'ai suivie n'est pas la même que celle de M. Neuberg: je calcule directement la somme et le produit des carrés des axes de la conique au lieu de passer par les fonctions p et q de l'auteur, et j'adopte le système des coordonnées trilinéaires.

J'ai donné en 1863, p. 299 (t. II, 2e série), des formules qui donnent la somme et le produit des carrés des axes d'une conique en fonction des coefficients de l'équation générale du second degré rapportée à un triangle de référence. Or, lorsqu'il s'agit de coniques inscrites, conjuguées ou circonscrites à ce triangle, c'est-à-dire lorsque l'équation de la conique ne contient plus que trois coefficients différents, on conçoit que l'on puisse exprimer ces coefficients au moyen des distances du centre, du foyer ou même d'un point quelconque aux côtés du triangle de référence. Cela fait, il n'y a plus qu'à appliquer les formules de la page citée (299) à ces équations particulières. Toute la difficulté de la question se réduit donc à trouver ces équations particulières. Or, dans mon *Recueil*, on trouve les théorèmes suivants, que je me borne à indiquer comme pouvant servir d'exercice aux élèves :

1° Quand une conique est conjuguée à un triangle abc, si l'on désigne par p_a, p_b, p_c les puissances de son foyer F par rapport aux cercles qui ont pour diamètres les côtés bc, ca, ab, pour tout point m de la conique, on a la relation

$$\frac{\overline{mbc}^2}{p_a . \mathrm{F}bc} + \frac{\overline{mca}^2}{p_b . \mathrm{F}ca} + \frac{\overline{mab}^2}{p_c . \mathrm{F}ab} = 0 \quad (\text{p. } 22);$$

2° Une conique étant inscrite au triangle abc, si l'on désigne par F l'un des foyers de la conique, et par m un de ses points, on a la relation

$$\mathrm{F}a(\mathrm{F}bc.mbc)^{\frac{1}{2}} + \mathrm{F}b(\mathrm{F}ca.mca)^{\frac{1}{2}} + \mathrm{F}c(\mathrm{F}ab.mab)^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (\text{p. } 34);$$

3° Lorsqu'une conique est circonscrite à un triangle abc, si l'on désigne par F l'un de ses foyers, et par m un point de la conique, on a la relation

$$\frac{\sin^2 \frac{1}{2} b\mathrm{F}c}{\mathrm{F}a.mbc} + \frac{\sin^2 \frac{1}{2} c\mathrm{F}a}{\mathrm{F}b.mca} + \frac{\sin^2 \frac{1}{2} a\mathrm{F}b}{\mathrm{F}c.mab} = 0 \quad (\text{p. } 44).$$

Sur la transformation homographique.

Soient F et F′ deux figures homographiques, c' la conique qui, dans l'une des figures F′ correspond au cercle imaginaire c, situé à l'infini dans la figure F. *Ce cercle reste fixe, quel que soit le déplacement de cette figure, translation ou rotation.*

Or, pour que les figures F et F′ puissent devenir homologiques, il faudra que la figure F puisse être placée de telle manière que la conique c' et le cercle c appartiennent à un même cône, et le sommet de ce cône sera le centre d'homologie. Or ce cône n'est autre chose qu'une sphère de rayon nul, qui, dès lors, ne peut être coupé par un plan que suivant des cercles. Donc la conique c' est un cercle, et l'on retrouve la condition obtenue par M. Painvin.

Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération distinguée.

H. Faure,
Capitaine d'Artillerie.