Nouvelles annales de mathématiques

L. Painvin

Note sur l'hypocycloïde à trois rebroussements

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 202-211

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__202_1>

NOTE SUR L'HYPOCYCLOÏDE A TROIS REBROUSSEMENTS;

Par M. L. PAINVIN.

(Note communiquée à la rédaction en juillet 1865.)

M. Cremona a publié dans le *Journal de Crelle* (t. LXIV) une étude géométrique de l'hypocycloïde à trois rebroussements; la théorie générale des courbes planes a permis à M. Cremona d'établir avec la plus grande élégance les théorèmes que Steiner avait énoncés sans démonstration sur cette courbe, et d'en faire connaître de nouvelles propriétés fort remarquables. Je me propose ici de montrer comment, en faisant intervenir simultanément les équations ponctuelles et les équations tangentielles, on peut arriver à démontrer, par l'analyse, les propositions principales renfermées dans le Mémoire de M. Cremona. Le mode de démonstration que j'ai adopté me conduisait naturellement à de nouvelles propriétés; je n'en ai signalé que quelques-unes.

§ I. — *Définition de la courbe; formules préliminaires.*

1. *L'hypocycloïde à trois rebroussements est la courbe engendrée par un point d'un cercle mobile roulant intérieurement sur un cercle fixe dont le rayon est triple de celui du cercle mobile.*

Nous désignerons par x et y les coordonnées cartésiennes d'un point; en choisissant pour origine le centre du cercle fixe, pour axe des x une droite passant par un des points du cercle fixe avec lequel vient coïncider le point décrivant; pour axe des y une perpendiculaire à Ox dans le sens du mouvement du cercle. On trouve, pour les équations de l'hypocycloïde,

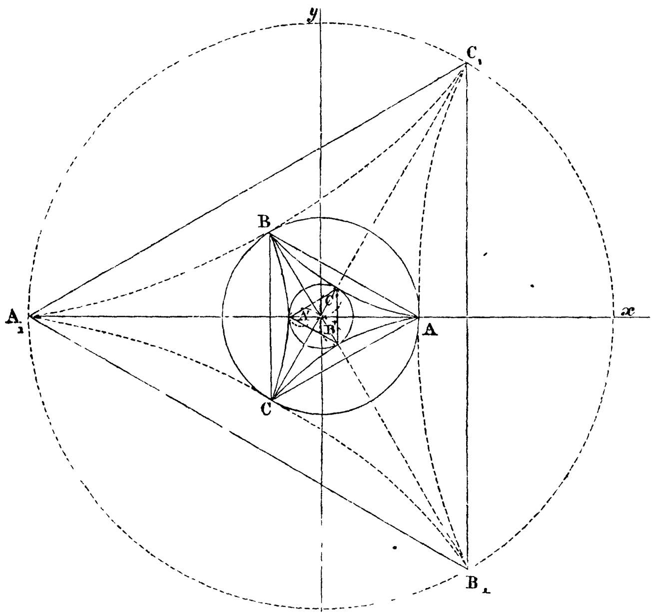
$$\text{(I)} \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= a(2\cos\alpha + \cos 2\alpha), \\ y &= a(2\sin\alpha - \sin 2\alpha); \end{aligned} \right.$$

a est le rayon du cercle mobile, $3a$ sera celui du cercle fixe; α est l'angle avec Ox du rayon qui joint le centre du cercle fixe avec le centre du cercle mobile.

L'élimination de α entre les équations (I) nous conduit à l'équation

$$\text{(II)}\quad (x^2+y^2)^2+8ax(3y^2-x^2)+18a^2(x^2+y^2)-27a^4=0;$$

c'est l'équation, en coordonnées cartésiennes, de l'hypocycloïde.



On trouvera sans difficulté que l'équation de la tangente à l'hypocycloïde au point défini par les égalités (I) est

$$\text{(1)}\qquad x\sin\frac{\alpha}{2}+y\cos\frac{\alpha}{2}=a\sin\frac{3\alpha}{2};$$

α est le paramètre angulaire du point de contact.

Les équations (I) et (II) nous permettent de constater immédiatement les propriétés suivantes :

THÉORÈME I. — 1° *L'hypocycloïde a trois points sur le cercle fixe; ces trois points*, A, B, C, *sont les sommets d'un triangle équilatéral; ce sont trois points de rebroussement; les tangentes de rebroussement sont les rayons* OA, OB, OC. *Chaque tangente de rebroussement a un contact du premier ordre et rencontre la courbe en un second point à une distance a du centre.*

2° *La courbe est du quatrième ordre et de troisième classe; elle possède trois axes de symétrie qui sont les droites* OA, OB, OC.

3° *L'hypocycloïde est inscrite dans le cercle directeur (de rayon $3a$), et circonscrite au cercle concentrique de rayon a.*

4° *L'hypocycloïde n'a pas de point d'inflexion; elle possède une seule tangente double qui est la droite de l'infini; les points de contact de cette tangente double sont les points circulaires à l'infini.*

2. Nous allons maintenant chercher l'équation de la courbe lorsqu'on la rapporte au triangle ABC.

Désignons par X, Y, Z les distances d'un point quelconque du plan aux trois côtés du triangle ABC, on aura les formules suivantes :

$$(2)\quad \begin{cases} X = x + \dfrac{3a}{2}, \\ Y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y + \dfrac{3a}{2}, \\ Z = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y + \dfrac{3a}{2}, \end{cases}$$

qui permettent, dans le cas actuel, de passer des coordonnées *cartésiennes* x, y, aux coordonnées *trilatères* X, Y, Z, et inversement.

On déduit de ces formules

$$(3)\qquad X+Y+Z=\frac{9a}{2},$$

$$(4)\qquad \begin{cases} x=\dfrac{3a(2X-Y-Z)}{2(X+Y+Z)}, \\ y=\dfrac{3a\sqrt{3}(Y-Z)}{(X+Y+X)}. \end{cases}$$

L'équation de la droite de l'infini est visiblement, dans le système actuel,

$$(5)\qquad X+Y+Z=0.$$

La substitution des valeurs (4) dans l'équation (II) de la courbe nous conduit à l'équation suivante :

$$(\text{III})\qquad X^2Y^2+Y^2Z^2+Z^2X^2=2XYZ(X+Y+Z);$$

c'est l'équation, en *coordonnées trilatères*, lorsqu'on prend le triangle ABC pour triangle de référence.

L'équation (III) peut encore s'écrire sous la forme qui suit :

$$(\text{III } bis)\qquad (XY+YZ+ZX)^2=4XYZ(X+Y+Z).$$

3. Pour obtenir l'*équation tangentielle* de l'hypocycloïde, nous prendrons l'équation (III), savoir :

$$(\text{III})\qquad X^2Y^2+Y^2Z^2+Z^2X^2=2XYZ(X+Y+Z),$$

et nous chercherons la condition pour que la droite

$$(6)\qquad uX+vY+wZ=0$$

soit tangente à cette courbe.

Pour cela rappelons-nous que la condition, pour que l'équation du quatrième degré

$$AX^4+4BX^3Y+6CX^2Y^2+4DXY^3+EY^4=0$$

ait deux racines égales, est

$$(AE - 4BD + 3C^2)^3 = 27(ACE + 2BCD - AD^2 - EB^2 - C^3)^2.$$

Éliminons Z entre les équations (6) et (III), puis appliquons à l'équation obtenue la relation ci-dessus, on trouve, pour la condition cherchée,

$$\text{(IV)} \qquad (u + v + w)^3 = 27uvw.$$

Mais les quantités u, v, w peuvent être regardées comme les coordonnées trilatères de la droite (6) par rapport au triangle ABC; et dans le système tangentiel actuel les paramètres de référence sont égaux entre eux (*Géométrie analytique*, n° 139); de sorte que l'équation (III) est l'*équation tangentielle* de l'hypocycloïde: ABC est toujours le triangle de référence. Les quantités u, v, w sont les distances des sommets A, B, C à une tangente quelconque, ou ces distances divisées par un même nombre.

4. Démontrons de suite cette proposition importante :

Théorème II. — *Toute courbe de quatrième ordre et de troisième classe ayant la droite de l'infini pour tangente double aux points circulaires à l'infini est une hypocycloïde à trois rebroussements.* (Mémoire cité de M. Cremona, nos 8 *et* 9.)

Une courbe du quatrième ordre est, en général, de douzième classe; la diminution de la classe ne pouvant provenir que de la présence des points multiples, il faut que la courbe possède assez de points multiples pour que la diminution soit de 9 unités. Or un point triple ne peut jamais, dans une courbe du quatrième ordre, diminuer la classe de 9 unités, et, d'un autre côté, une courbe du quatrième ordre ne peut pas avoir, avec un point triple, d'autre point multiple. Une courbe du quatrième ordre ne peut pas avoir quatre points doubles, car une conique, passant par ces quatre points et par un cinquième point pris arbitrairement sur la courbe, rencontrerait cette courbe en 9 points. Ainsi, la classe ne peut être diminuée de 9 unités que par la présence de trois points doubles, et le maximum de diminution aura lieu lorsque ces trois points doubles seront des points de rebroussement, auquel cas la diminution est égale à 9 unités. Ajoutons que ces trois points de rebroussement ne sauraient être en ligne droite, car, autrement, cette droite rencontrerait la courbe en 6 points; aucun des points de rebroussement ne peut être à l'infini, car alors la courbe ne pourrait pas avoir la droite de l'infini pour tangente double proprement dite.

Ainsi, la courbe en question a donc trois points de rebroussement A, B, C, à distance finie; prenons pour triangle de référence le triangle formé par ces trois points, et écrivons que les trois sommets sont trois points de rebroussement, l'équation de la courbe prendra nécessairement la forme suivante :

$$(1^{\circ})\quad a^2Y^2Z^2 + b^2Z^2X^2 + c^2X^2Y^2 = 2XYZ(aX + bY + cZ).$$

Il faut exprimer maintenant que la droite de l'infini touche cette courbe aux points circulaires à l'infini.

Si A, B, C sont les angles du triangle de référence, l'équation du cercle circonscrit à ce triangle est

$$YZ\sin A + ZX\sin B + XY\sin C = 0,$$

et l'on a pour l'équation de la droite de l'infini

$$X\sin A + Y\sin B + Z\sin C = 0;$$

l'intersection de cette dernière droite avec le cercle donne les points circulaires à l'infini.

Mais l'équation générale des courbes du quatrième ordre touchées aux points circulaires à l'infini par la droite de l'infini pourra évidemment se mettre sous la forme suivante :

$$(2^\circ)\quad \left\{\begin{aligned} &(YZ\sin A + ZX\sin B + XY\sin C)^2\\ &\quad = (X\sin A + Y\sin B + Z\sin C)\\ &\qquad \times (a_1X^3 + b_1Y^3 + c_1Z^3 + a'X^2Y + a''X^2Z\\ &\qquad\qquad + b'Y^2X + b''Y^2Z + c'Z^2X + c''Z^2Y + 2hXYZ). \end{aligned}\right.$$

Identifions les équations (2°) et (1°), et remarquons que les quantités $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$, sont positives, on est très-facilement conduit aux conditions définitives :

$$(3^\circ)\qquad a = b = c,\quad \sin A = \sin B = \sin C.$$

Il résulte de là que l'équation de la courbe satisfaisant à toutes les conditions énoncées est nécessairement

$$(4^\circ)\qquad X^2Y^2 + Y^2Z^2 + Z^2X^2 = 2XYZ(X + Y + Z),$$

et le triangle de référence est un triangle équilatéral; ce qui démontre complétement le théorème en question.

5. Citons encore une proposition générale et remarquable :

Théorème III. — *Considérons un triangle fixe* ABC, *et une transversale quelconque; si la transversale est telle, que les perpendiculaires aux divers côtés du triangle aux points où elle les rencontre soient concourantes, cette transversale enveloppera une hypocycloïde à trois rebroussements.*

Soit l'équation de la transversale

$$(1^\circ)\qquad uX + vY + wZ = 0;$$

les équations des perpendiculaires aux côtés du triangle

aux points où ils sont rencontrés par la transversale sont respectivement

$$(v\cos C + w\cos B)\,x + vy + wz = 0,$$
$$ux + (w\cos A + u\cos C)\,y + wz = 0,$$
$$ux + vy + (u\cos B + v\cos A)\,z = 0.$$

On exprimera que ces trois droites sont concourantes en éliminant x, y, z entre ces trois équations, ce qui donne

$$(2^\circ)\quad \left\{\begin{aligned} F = {} & vw\sin^2 A\,(v\cos C + w\cos B) \\ & + wu\sin^2 B\,(w\cos A + u\cos C) \\ & + uv\sin^2 C\,(u\cos B + v\cos A) \\ & - 2uvw(1 + \cos A\cos B\cos C) = 0: \end{aligned}\right.$$

c'est l'équation tangentielle de l'enveloppe des droites (1°).

Les coordonnées de la droite de l'infini sont

$$(3^\circ)\qquad \frac{u}{\sin A} = \frac{v}{\sin B} = \frac{w}{\sin C};$$

or on constate immédiatement que ces valeurs satisfont aux équations

$$\frac{dF}{du} = 0, \quad \frac{dF}{dv} = 0, \quad \frac{dF}{dw} = 0;$$

la droite de l'infini est donc une tangente double. (*Géométrie analytique*, nos 452 et suiv.)

Les points de contact de la tangente double sont donnés par l'équation

$$u^2\frac{d^2F}{du_0^2} + v^2\frac{d^2F}{dv_0^2} + w^2\frac{d^2F}{dw_0^2}$$
$$+ 2vu\frac{d^2F}{du_0\,dv_0} + 2uw\frac{d^2F}{du_0\,w_0} + 2vw\frac{d^2F}{dv_0\,dw_0} = 0;$$

et on trouve, dans le cas actuel,

$$u^2 + v^2 + w^2 - 2vw\cos A - 2uw\cos B - 2uv\cos C = 0,$$

équation qui représente les deux points circulaires à l'infini, puisque les paramètres de référence sont $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$. (*Géométrie analytique*, n^{os} 139, 297.)

La courbe (2°) étant de troisième classe et ayant une tangente double, il en résulte qu'elle ne peut pas avoir de tangente d'inflexion, ni d'autre tangente multiple; la formule

$$m = n(n+1) - 2\tau - 3\iota$$

nous donne donc $m = 4$, puisque $n = 3$, $\tau = 1$, $\iota = 0$. Ainsi la courbe (2°) est de quatrième ordre et de troisième classe; la droite de l'infini la touche aux points circulaires à l'infini : c'est donc l'hypocycloïde à trois rebroussements (Théorème II).

On peut encore se proposer de déterminer la position des trois points de rebroussement par rapport au triangle ABC.

On constatera sans difficulté, pour la courbe qui nous occupe, que :

Théorème IV. — *L'hypocycloïde est l'enveloppe de la droite qui joint les projections d'un point quelconque de la circonférence, concentrique au cercle directeur et de rayon $2a$, sur les côtés du triangle équilatéral inscrit et ayant ses sommets sur les rayons* OA, OB, OC.

(*La suite prochainement.*)