NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions des questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 189-191

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__189_1>

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 957

(voir 2e série, t. VIII, p. 479).

SOLUTION DE M. LIONNET.

Euler dit avec raison que Fermat, en proposant cette question aux géomètres de son temps, avait en vue un mode de démonstration exclusivement géométrique, à la manière des anciens qui rejetaient toute espèce de démonstration algébrique (*Demonstrationes quæ analysin olent*). Sans cette explication, on aurait de la peine à comprendre qu'une question si facile à résoudre ait été proposée par Fermat, et qu'aucun des géomètres contemporains n'en ait donné la solution. Celle que nous proposons aux lecteurs des *Nouvelles Annales* nous paraît remplir toutes les conditions exigées par le célèbre géomètre toulousain.

Énoncé. — *Étant donné un demi-cercle* AMB *dont* AB *est le diamètre, et, de l'autre côté de* AB, *un rectangle* ABCD *dont la hauteur* AD *est égale au côté du carré inscrit dans le cercle, d'un point quelconque* M *de la demi-circonférence on mène les droites* MC, MD *qui coupent* AB *aux points* c, d; *et il s'agit de démontrer que*

$$\overline{Ac}^2 + \overline{Bd}^2 = \overline{AB}^2 \quad (1)$$ (*).

Démonstration. — Menons les droites MA, MB jusqu'à la rencontre de la direction CD en A′, B′, puis AE perpendiculaire à MA′ jusqu'à la rencontre de A′B′ en E. L'angle AMB inscrit dans un demi-cercle étant droit, les lignes AE, BB′ perpendiculaires à MA′ sont parallèles, et, de plus, égales entre elles comme opposées dans un parallélogramme; donc les triangles rectangles ADE, BCB′ ayant l'hypoténuse égale et un autre côté AD = BC, le troisième côté DE = B′C. De plus, les droites parallèles AB, A′B′ étant divisées aux points c et C, d et D

(*) AB, CD étant des droites quelconques, nous désignons par $\overline{AB}^2$ le carré construit sur AB, et par rect(AB, CD) le rectangle dont AB, CD sont les deux dimensions.

en segments proportionnels, on a

$$AB : A'B' = Ac : A'C = Bd : B'D;$$

donc le triangle ayant pour côtés les droites AB, Ac, Bd, dont la plus grande est moindre que la somme des deux autres, est semblable au triangle qui a pour côtés les droites A'B', A'C, B'D: donc, pour établir l'égalité (1), il suffit de prouver que ce dernier triangle est rectangle, ou, autrement, qu'on a

$$\overline{A'C}^2 + \overline{B'D}^2 = \overline{A'B'}^2. \tag{2}$$

Or la somme des carrés faits sur A'C et B'D, sommes des droites A'D, CD et CD, B'C, est égale à la somme des carrés faits sur A'D, CD, B'C, plus $\overline{CD}^2$, plus deux fois la somme des rectangles (A'D, CD), (CD, B'C); et, d'autre part, le carré fait sur A'B', somme des droites A'D, CD, B'C, est égal à la somme des carrés faits sur ces trois droites, plus deux fois la somme des rectangles (A'D, CD), (CD, B'C), (A'D, B'C); donc, pour démontrer l'égalité (2), il suffit de prouver qu'on a

$$\overline{CD}^2 = 2\,\text{rect}(A'D, B'C),$$

ou

$$2\overline{AD}^2 = 2\,\text{rect}(A'D, DE), \tag{3}$$

en observant que AD est égal au côté du carré inscrit dans le cercle dont le diamètre AB = CD, et que B'C = DE. Mais chacune des lignes AA', AE, A'E dont la dernière égale A'D + DE, étant l'hypoténuse d'un triangle rectangle, on a

$$\overline{A'D}^2 + \overline{DE}^2 + 2\overline{AD}^2 = \overline{A'D}^2 + \overline{DE}^2 + 2\,\text{rect}(A'D, DE),$$

ou

$$2\overline{AD}^2 = 2\,\text{rect}(A'D, DE).$$ C. Q. F. D.