HERMANN

Méthode de l'élimination des intervalles pour servir à la résolution des équations algébriques et transcendantes

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 9 (1870), p. 180-187

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1870_2_9__180_1>

MÉTHODE DE L'ÉLIMINATION DES INTERVALLES

pour servir à la résolution des équations algébriques et transcendantes ;

PAR M. HERMANN,
Ancien Élève de l'École Normale.

Cauchy a donné, pour le calcul numérique de la plus petite racine positive d'une équation algébrique, une formule d'approximation remarquable, en ce qu'elle permet de calculer cette racine, quelles que soient les limites qui la comprennent, en prenant même, si l'on veut, les limites supérieures et inférieures des racines positives de l'équation. Partant, cette méthode permettrait de calculer successivement toutes les racines en les considérant successivement comme étant chacune la plus petite. Toutefois, dans l'esprit de Cauchy et de ceux qui ont écrit depuis sur ce sujet, il était nécessaire, pour l'application de la méthode à une racine, que cette racine fût séparée; on n'avait donné jusqu'ici aucun caractère permettant de reconnaître avec certitude si, en partant d'un nombre a, l'équation ne contenait aucune racine plus grande que a. Néanmoins la formule de Cauchy, interprétée d'une manière convenable, constitue une méthode complétement générale pour la résolution des équations numériques. Toutefois, il est bon de la combiner avec quelques caractères éliminatoires qui en facilitent les applications.

C'est à l'ensemble de ces caractères éliminatoires et de la formule de Cauchy, que je propose de donner le nom de *méthode d'élimination des intervalles*, parce que le caractère comme le but de cette méthode est d'éliminer successivement les intervalles qui ne contiennent pas de racines réelles.

Occupons-nous d'abord de la recherche de ces caractères.

Premier caractère éliminatoire. — Soit une équation $f(x) = 0$, que j'écris sous la forme

$$\varphi(x) - \psi(x) = 0,$$

$\varphi(x)$ étant l'ensemble des termes précédés du signe $+$, $\psi(x)$ l'ensemble des termes précédés du signe $-$. L'équation n'aura aucune racine comprise entre a et b si les deux quantités $f(a)$, $f(b)$ étant de mêmes signes, par exemple positives, il en est de même de

$$\varphi(a) - \psi(b),$$

car cette quantité est inférieure à la plus petite valeur de $f(x)$ entre a et b. Cette simple remarque pourrait suffire pour la résolution des équations numériques, algébriques ou transcendantes; seulement, dans une équation transcendante, les termes positifs ne sont pas toujours ceux qui sont précédés du signe $+$, les termes négatifs ceux qui sont précédés du signe $-$, et la plus petite valeur d'un terme n'a pas toujours lieu pour la plus petite valeur de la variable; mais cela n'infirme en rien la conclusion précédente. Seulement, dans les termes précédents, il faudra remplacer x tantôt par a, tantôt par b, de manière à leur donner leur petite valeur, et, dans l'ensemble des termes négatifs, remplacer également x tantôt par a, tantôt par b, de manière à leur donner leur plus grande valeur. Ce caractère se présentera toujours si les termes a et b sont suffisamment rapprochés; car dire que $f(x)$ est positif, c'est dire que l'ensemble des termes positifs l'emporte d'une quantité finie sur l'ensemble des termes négatifs, et la substitution de a à b dans un terme ou un coefficient n'altère qu'infiniment peu ce terme ou ce coefficient si les nombres a et b sont suffisamment voisins. Considérons par exemple l'équation transcendante

$$(4 - 3x^2)\sin x - 4x\cos x = 0.$$

Cherchons si cette équation a des racines réelles comprises entre 92 et 95 degés. Le résultat de la substitution de 92 degrés est :

pour 92° . . . . $-3{,}475$,
pour 95° . . . . $-3{,}653$.

L'équation n'aura aucune racine réelle entre 92 et 95 degrés, si, en donnant au terme négatif $(4 - 3x^{\circ}) \sin x$ sa plus petite valeur, au terme positif $-4x \cos x$ sa plus grande valeur, on a encore un résultat négatif. La plus petite valeur absolue du terme

$$(4 - 3x^2) \sin x$$

s'obtiendra en remplaçant x par 92 degrés dans $3x^2$, et par 95 degrés dans $\sin x$. On obtient ainsi

$$-3,722.$$

La plus grande valeur du terme $-4x \cos x$ aura lieu pour $x = 95^{\circ}$, ce qui donne

$$+0,577,$$

comme

$$-3,722 + 0,577$$

est négatif.

L'équation transcendante n'a aucune racine réelle comprise entre 92 et 95 degrés.

Deuxième caractère éliminatoire.— Si deux nombres, a et b, substitués dans le premier membre d'une équation, donnent des résultats de même signe, par exemple positifs, l'équation n'aura aucune racine réelle comprise entre a et b, si la quantité

$$\varphi'(a) - \varphi'(b)$$

a le même signe que $f(a)$ et $f(b)$. Le caractère est une conséquence de la formule de Cauchy.

Formule de Cauchy. — Proposons-nous de résoudre le problème suivant :

Une fonction (*) *ayant un certain signe, par exemple positif, trouver une limite de l'intervalle pour lequel cette fonction conserve son signe.*

Supposons qu'une fonction soit positive pour $x = a$ et $x = b$, il est clair que cette fonction sera positive tant que l'on aura

$$(1) \qquad f(a + h) > 0;$$

or on a

$$\begin{aligned} f(a + h) &= fa + h\,[f'(a + \theta h)] \\ &= fa + h\,[\varphi'(a + \theta h) - \psi'(a + \theta h)]. \end{aligned}$$

Or $\varphi'(a + \theta h)$ est toujours supérieur à $\varphi'(a)$, $\psi'(a + \theta h)$ est toujours inférieur à $\psi'(b)$; par conséquent, pour satisfaire à l'inégalité (1), il suffira de satisfaire à l'inégalité

$$f(a) + h[\varphi'(a) - \psi'(b)] > 0;$$

si $\varphi'(a) - \psi'(b)$ est positif, cette inégalité aura lieu d'elle-même, sinon il suffira de prendre

$$(2) \qquad h < \frac{fa}{\psi'(b) - \varphi'(a)}.$$

La formule (2) est la formule de Cauchy. L'interprétation que nous en avons donnée permet de l'appliquer à la résolution numérique des équations, puisqu'elle permet, à partir d'une valeur quelconque de la variable, d'éliminer un intervalle ne contenant pas de racines réelles. Elle s'applique également aux équations transcendantes sous le bénéfice des précautions que nous avons déjà indiquées.

(*) C'est en donnant cette interprétation à la formule de Cauchy qu'il nous a été possible de créer la méthode d'élimination des intervalles.

On pourrait de même trouver, à partir de b, une limite k telle, que l'équation n'ait aucune racine comprise entre $b - k$ et b. On trouvera facilement que si la quantité

$$\psi'(a) - \varphi'(b)$$

est positive, l'équation n'aura aucune racine réelle comprise entre a et b, ce qui constitue un troisième caractère éliminatoire, et que, si cette quantité est négative, l'équation n'aura aucune racine comprise entre

$$b \text{ et } b - \frac{f(b)}{\varphi'(b) - \psi'(a)}.$$

En résumé, nous voyons que si une fonction est de même signe pour deux valeurs a et b de la variable, nous pourrons reconnaître que l'équation n'a aucune racine comprise entre a et b, si le signe de $f(a)$ et de $f(b)$ est le même que celui d'une des trois équations suivantes :

$$\varphi(a) - \psi(b),$$
$$\varphi'(a) - \psi'(b),$$
$$\psi'(a) - \varphi'(b).$$

Si chacune de ces quantités n'est pas de même signe que $f(a)$ et $f(b)$, l'équation n'aura néanmoins aucune racine comprise entre

$$a + \frac{f(a)}{\psi(b) - \varphi'(a)} \quad \text{et} \quad b - \frac{f(b)}{\varphi'(b) - \psi'(a)}.$$

D'après cela, pour résoudre une équation par la méthode de l'élimination des intervalles, on fera des substitutions équidistantes ou non dans les fonctions

$$\varphi(x), \quad \psi(x),$$
$$\varphi'(x), \quad \psi'(x);$$

les caractères éliminatoires permettront de rejeter un grand nombre d'intervalles ne contenant pas de racines réelles, et la formule d'approximation de resserrer la recherche des racines réelles dans les intervalles non éliminés. S'il s'agit d'une équation algébrique, il sera bon de faire ces substitutions par la méthode des différences qui se prête d'une manière remarquable à la recherche des résultats obtenus dans une série de substitutions équidistantes. Pour les équations transcendantes, la méthode des différences ne peut plus être employée, et c'est au calculateur à diriger d'une manière convenable les substitutions, par exemple en employant la méthode de double fausse position. Mais la méthode d'élimination des intervalles offre cela de remarquable qu'elle est applicable à toutes les formes d'équations transcendantes, et qu'elle participe à la généralité de la série de Taylor, dont elle est une application importante.

Application numérique. — L'exemple suivant fera mieux saisir l'usage des caractères et de la formule d'approximation.

Soit proposé de résoudre l'équation

$$x^5 - 8x^3 + x^2 - 2x + 10 = 0.$$

Occupons-nous seulement de la recherche des racines positives. 4 est la limite supérieure des racines positives. Je substitue, dans le premier membre, les nombres 0, 1, 2, 3, 4 :

$$\varphi(x) = x^5 + x^2 + 10, \qquad -\psi(x) = -8x^3 - 2x.$$

	$\varphi(x)$	$-\psi(x)$	
0	+ 10	— 0	int. élim. d'après le 1er caract.
1	+ 12	— 10	
2	+ 46	— 68	
3	+ 262	— 222	
4	+ 1040	— 520	

Pour trouver les racines de l'équation comprises entre 1 et 2, substituons dans $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ des nombres équidistants de 0,1 :

1	+ 12	— 10	
1,1	+ 12,820	— 12,848	
1,2	+ 13,928	— 16,224	éliminé.
1,3	+ 15,403	— 20,176	
1,4	+ 17,338	— 24,752	*Id.*
1,5	+ 19,843	— 30,000	*Id.*
1,6	+ 23,045	— 35,068	*Id.*
1,7	+ 27,079	— 42,704	*Id.*
1,8	+ 32,197	— 50,256	*Id.*
1,9	»	»	*Id.*
2	+ 46	— 68	

L'équation a un nombre impair de racines comprises entre 1 et 1,1, et n'en a aucune entre 1,2 et 2. Pour l'intervalle compris entre 1,1 et 1,2, il y a doute. Ayons recours au deuxième caractère éliminatoire, substituons 1,1 et 1,2 dans $\varphi'(x)$ et $\psi'(x)$.

	$\varphi'(x)$	$\psi'(x)$	
1,1	+ 9,74	— 31,4	éliminé.
1,2	+ 12,968	— 36,56	

La formule d'approximation nous permet de resserrer la recherche des racines comprises entre 1 et 1,1 ; elle nous apprend que l'équation n'a aucune racine comprise entre 1 et $1 + \dfrac{f(1)}{\psi'(1,1) - \varphi'(1)}$, ou entre 1 et 1,08.

Les racines réelles comprises entre 1 et 2 se trouvent resserrées dans l'intervalle compris entre 1,08 et 1,10, intervalle qu'il serait facile de resserrer encore davantage.